

Les mathématiques se mettent à table

Mireille Schumacher
Dr. es sciences

schumacher.mireille@gmail.com

Journées Régionales de l'APMEP de Lorraine
Académie de Nancy-Metz

20 mars 2019

Déroulement de l'atelier

- *La modélisation des pâtes alimentaires*
- *Combien de feuilles compte un millefeuille ?*
- *La percolation et le jeu de Hex*
- *Champagne !*
- *Quand les sangakus s'invitent à table*
- *Bibliographie*



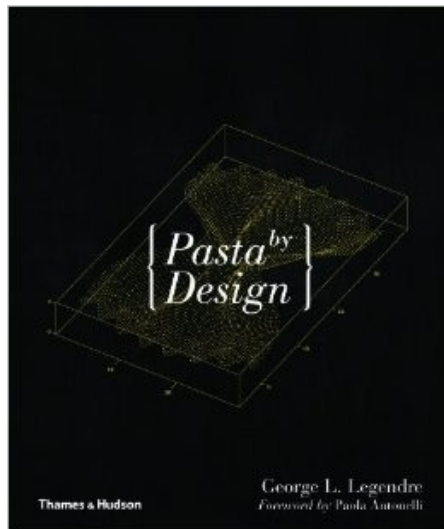
*La modélisation
des
pâtes alimentaires*

Une castellana, ou bernard l'hermite

© Robert Märki

La géométrie des pâtes alimentaires

Il existe des centaines de formes de pâtes. Au cours de la fabrication, la pâte est soit pressée en cordon, soit étendue et finalement coupée. D'autres étapes peuvent suivre, comme par exemple le tournage, la torsion ou la compression. L'architecte et designer George L. Legendre a modélisé plus de 90 sortes de pâtes sous forme mathématique. Son ouvrage "*Pasta by Design*" paru en 2011 se situe à la limite entre art, mathématiques et cuisine



En s'inspirant des travaux de George L. Legendre on peut développer soi-même de nouveaux types de pâtes et même les concrétiser à l'aide d'une imprimante 3D !

L'élaboration de modèles mathématiques de pâtes naît en étudiant leurs formes de base récurrentes : ce sont des cylindres, des spirales ou des hélices. Leur combinaison permet déjà la modélisation de nombreux types de pâtes

- La pâte est-elle lisse ou crénelée sur ses bords ?
- Sa surface est-elle lisse ou striée ?
- Est-ce que la section transversale de la pâte est solide, creuse ou semi-ouverte ?
- Comment se présente le profil longitudinal de la pâte ?
Est-il torsadé, hélicoïdal, pincé (ravioli), cisailé ?

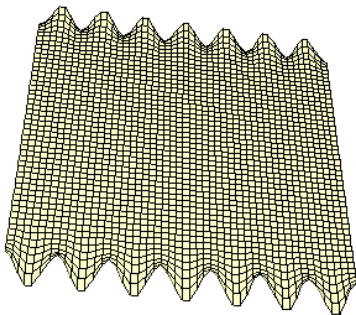
La *farfalla* (large papillon)



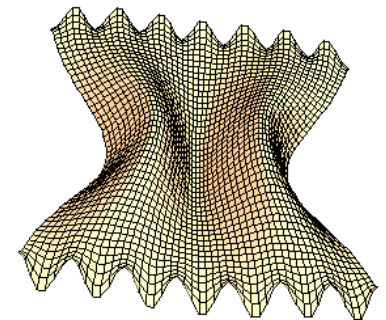
- La forme de base de la farfalla est un rectangle ayant 2 bords opposés festonnés

La surface initiale est une surface rectangulaire qui se situe dans le plan yz et possède deux côtés opposés festonnés

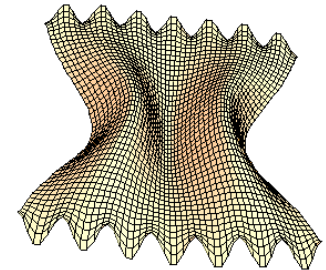
En ignorant les festons et le cintrage, on a pour la pâte les équations $y(t,u) = t$ et $z(t,u) = u$



- En comprimant " en dents de scie " les milieux des 2 bords droits du rectangle, on obtient une onde d'amplitude maximale au centre, décroissant pour disparaître sur les bords festonnés de la farfalla



- Lors d'une première approche, la forme de l'onde et celle des festons peuvent être identifiées à des fonctions cosinus
Les dents sont modélisées par le terme $za \cdot \cos(7\pi t) \cdot u^{10} \cdot \text{sgn}(u)$



Le paramètre **za** mesure l'amplitude des dents sur les 2 bords
Le facteur u^{10} assure un effet uniquement sur les bords
 $\text{sgn}(u)$ traduit la symétrie

Lors de l'étranglement, le bord festonné se courbe en forme de parabole, d'où l'introduction du terme $-0,3 \cdot (t \cdot es)^2 + 1$ dans l'équation

$$z(t; u) = u \cdot \left(-0,3 \cdot (t \cdot es)^2 + 1 \right) + za \cdot \cos(7\pi t) \cdot u^{10} \cdot \text{sgn}(u)$$

Le paramètre **es** mesure l'étranglement (resp. cintrage ou lignes de cotes)

- La courbe formée pendant l'étranglement latéral est modélisée par une transformation appropriée d'une courbe en forme de cloche. La vague en forme de cosinus qui se forme pendant l'étranglement de la pâte est décrite par l'équation

$$x(t, u) = -we \cdot es \cdot e^{-2,5u^2} \cdot \cos(1,8\pi t)$$

Le paramètre **we** mesure de l'amplitude de l'onde qui résulte de l'étranglement

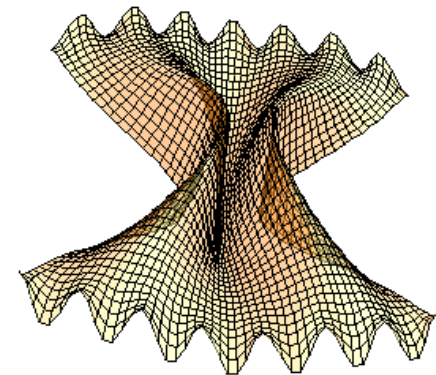
En partant de $es = 0$, si on augmente progressivement la valeur de es , on peut admirer la transformation du morceau de pâte et observer que l'amplitude de l'onde augmente au milieu en même temps que la courbure sur les bords

Voici les équations de la représentation géométrique de la farfalla correspondant à cette première approche

$$\begin{cases} x(t;u) = -we \cdot es \cdot e^{-2,5u^2} \cdot \cos(1,8\pi t) \\ y(t;u) = t \cdot (1 - e^{-ku^2} \cdot es) \\ z(t;u) = u \cdot (-0,3 \cdot (t \cdot es)^2 + 1) + za \cdot \cos(7\pi t) \cdot u^{10} \cdot \text{sgn}(u) \end{cases}$$

Les paramètres t et u varient de -1 à 1

- **es** : mesure de l'étranglement (resp. cintrage ou lignes de cotes)
- **we** : mesure de l'amplitude de l'onde qui résulte de l'étranglement
- **za** : mesure de l'amplitude des dents sur les 2 bords
- **k** : influence la forme du cintrage

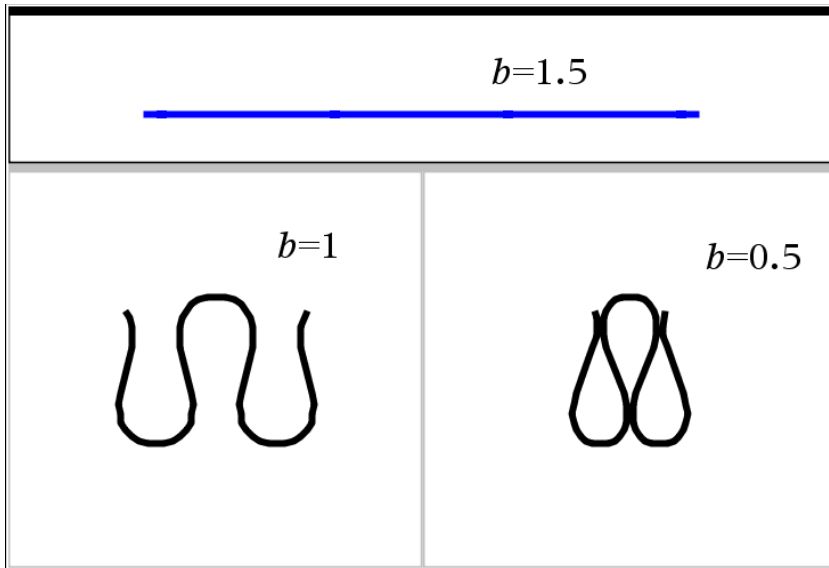


Pour tenir compte de la réalité, on peut affiner ce modèle

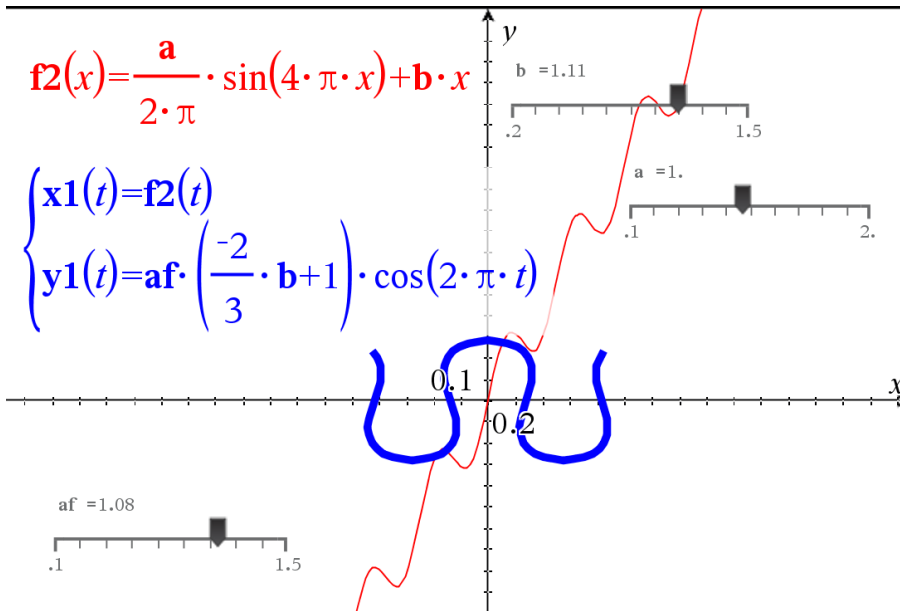
- Les bords festonnés ressemblent plus à une frise de triangles qu'à une fonction cosinus

On peut faire appel à un développement de Taylor de la fonction décrivant ces triangles

- Pour reproduire avec plus de précision le mouvement que provoque l'étranglement au milieu de la pâte, une possibilité consiste à paramétrer la section de courbe engendrée par la compression



Le paramètre b modélise le pliage
 Pour $b = 1,5$ la pâte est plate
 Lorsque b diminue, les plis de la pâte se forment, les rides peuvent se toucher



Mais tout dépend encore de la valeur d'un paramètre a

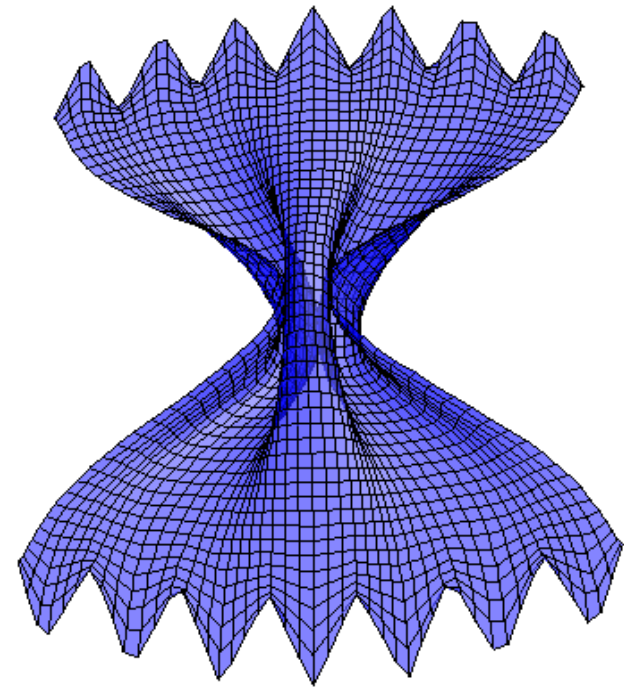
Le paramètre af donne l'amplitude du pli

Les équations de la farfalla sont maintenant plus sophistiquées mais le résultat est magnifique !

$$x(t;u) = -we \cdot es \cdot e^{-4,5u^2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot (1 - e^{-ku^2} \cdot es) + 1 \right) \cdot \cos(2\pi t)$$

$$y(t;u) = es \cdot \frac{0,35}{2\pi} \cdot e^{-2u^2} \cdot \sin(4\pi t) + (1 - e^{-ku^2} \cdot es) \cdot t$$

$$z(t;u) = u \cdot \left(-0,3 \cdot (t \cdot es)^2 + 1 \right) + za \cdot \left(\begin{array}{l} \cos \left(7,7\pi \cdot \left(\frac{0,35}{2\pi} \cdot e^{-2u^2} \cdot \sin(4\pi t) + (1 - e^{-ku^2} \cdot es) \cdot t \right) \right) \\ + \frac{1}{9} \cdot \cos \left(23,1\pi \cdot \left(\frac{0,35}{2\pi} \cdot e^{-2u^2} \cdot \sin(4\pi t) + (1 - e^{-ku^2} \cdot es) \cdot t \right) \right) \\ + \frac{1}{25} \cdot \cos \left(38,5\pi \cdot \left(\frac{0,35}{2\pi} \cdot e^{-2u^2} \cdot \sin(4\pi t) + (1 - e^{-ku^2} \cdot es) \cdot t \right) \right) \end{array} \right) \cdot u^{10} \cdot \text{sgn}(u)$$



Les buccoli sont des pâtes profilées comme un ruban enroulé en hélice autour d'un bâton

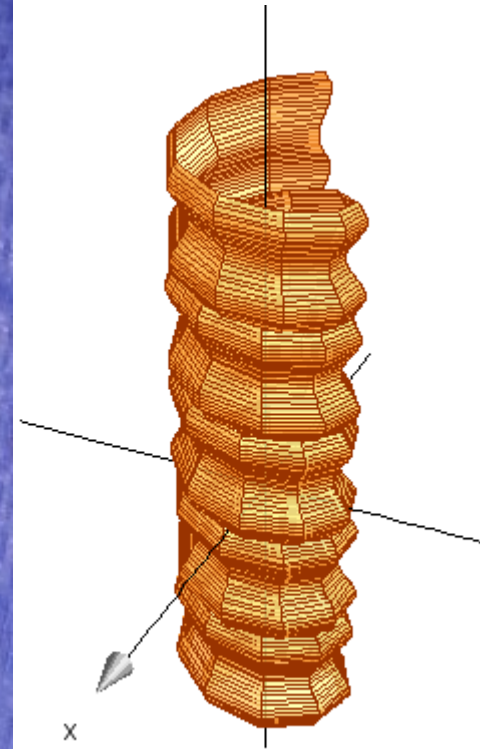
Equations d'un buccolo

$$\begin{cases} x(t;u) = (p + q \cdot \sin(3\pi u)) \cdot \cos(-t) \\ y(t;u) = (p + q \cdot \sin(3\pi u)) \cdot \sin(-t) \\ z(t;u) = \frac{t}{2\pi} + u \end{cases}$$

Les paramètres

- t varie entre -17 et 16
- u entre 0 et 1

Photographie d'un buccolo



Représentation géométrique du buccolo dans les délicats filets de sa formule mathématique

Modélisation d'une castellana ou bernard l'hermite

- Poser $x(z) = a(9 - z^2)$, $-3 < z < 2$; on obtient une portion de parabole qui épouse assez bien la forme d'une coupe longitudinale d'une castellana. Le paramètre a influence la construction de la pâte



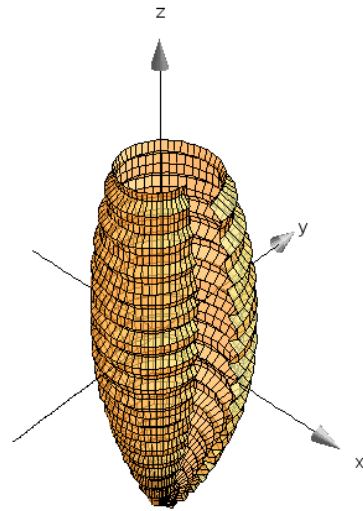
- Faire tourner cette portion de parabole autour de l'axe z ; au cours de cette rotation, le rayon diminue de façon linéaire en fonction de l'angle t de rotation. Chaque point de la parabole se meut sur une spirale d'Archimède. Cette spirale peut être modifiée par le paramètre b
- La section longitudinale est nervurée, ce qui peut être modélisé par une fonction sinus modulée. Le paramètre c est une mesure de l'amplitude de l'ondulation

Equations d'une castellana

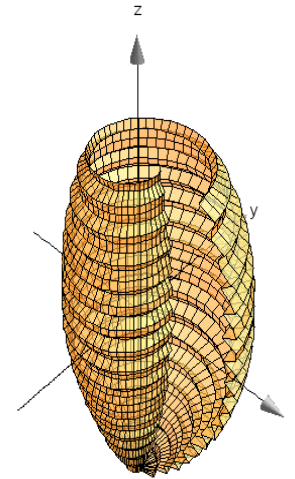
$$\begin{cases} x(t;u) = \left(a \cdot (9 - u^2) + c \cdot |\sin(20u)| \right) \cdot \cos(t) \cdot (1 - bt) \\ y(t;u) = \left(a \cdot (9 - u^2) + c \cdot |\sin(20u)| \right) \cdot \sin(t) \cdot (1 - bt) \\ z(t;u) = u \end{cases}$$

Les paramètres

- t varie entre 0 et 6,3
- u entre -3 et 2



a=0.1; b=0.08; c=0.16



a=0.15; b=0.1; c=0.24

En faisant varier les trois paramètres, on modifie à la fois

- la forme de la section longitudinale
- le choix de la spirale
- la forme et l'amplitude de l'ondulation



*Combien de feuilles
compte un millefeuille ?*

Pâte feuilletée maison

Préparation : 2h

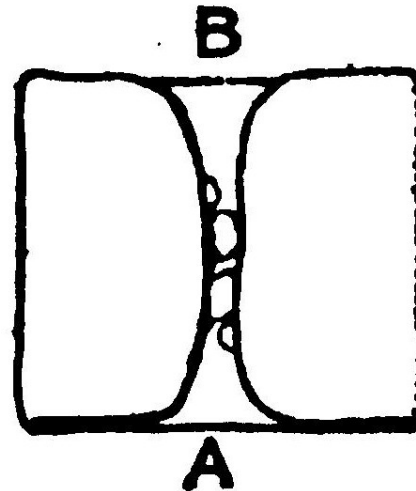
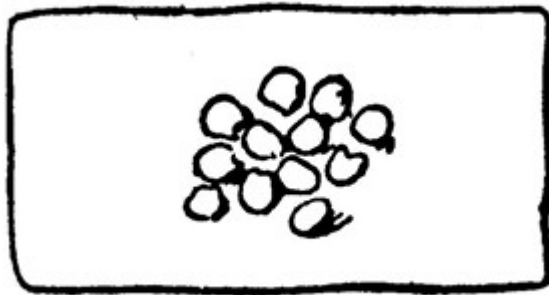
Ingrédients

- 200 g. de farine
- 100 g. beurre
- 1 dl. eau environ
- 5 g. sel

Préparation

- Tamiser la farine sur la planche à pâtisserie
- Faire la fontaine
- Y verser l'eau dans laquelle on a mis le sel à fondre
- Mélanger pour obtenir une pâte lisse, élastique et ferme
- Former une boule

- Soupoudrer un peu de farine sur le plan de travail
- Etaler au rouleau en un rectangle de ½ cm d'épaisseur
- Répartir le beurre divisé en petits morceaux



- **Rabattre les deux pans de détrempe** de manière à enfermer complètement le beurre

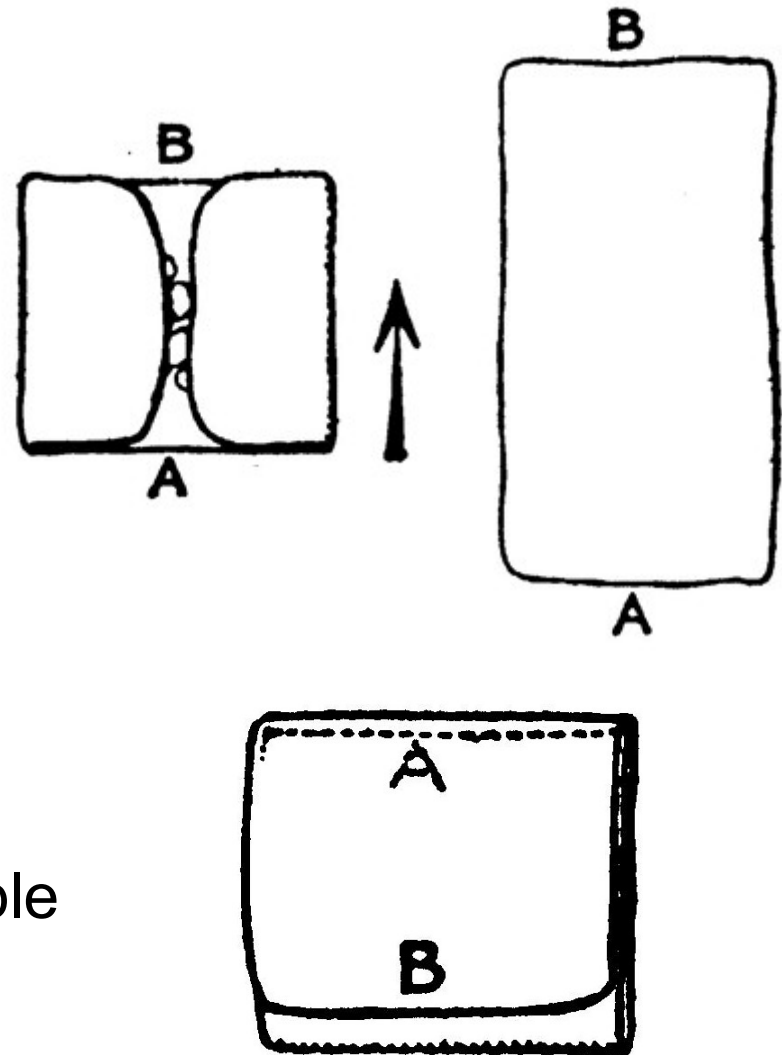
Laisser reposer 10' au frais

Le feuilletage

Premier tour

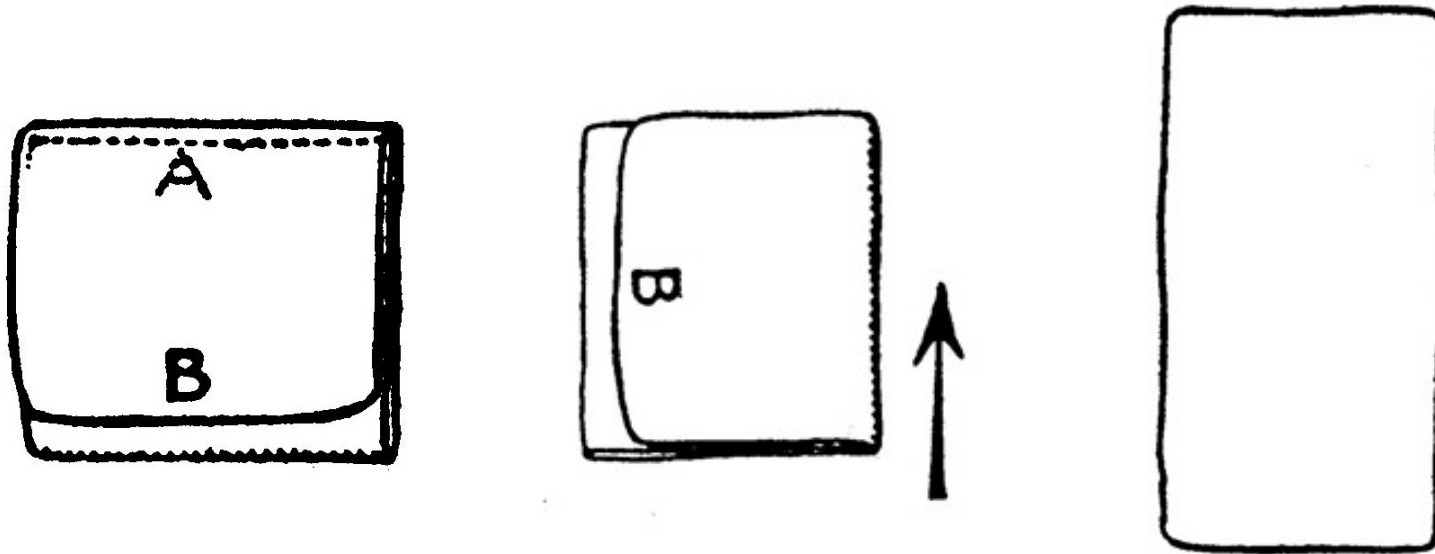
- Abaisser au rouleau sans laisser sortir le beurre en un rectangle régulier de $\frac{1}{2}$ cm d'épaisseur
- **Plier en 3** comme une serviette
- En rabattant le bord A sur les $\frac{2}{3}$
- Le bord B vient recouvrir l'ensemble

Remettre 15' au frais



Deuxième tour

- Faire pivoter la pâte de $\frac{1}{4}$ de tour

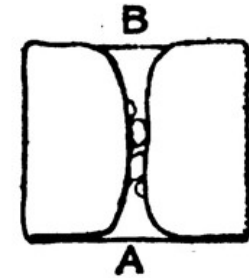


- Abaisser, plier et laisser reposer comme au 1^{er} tour

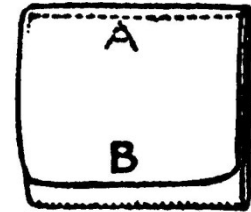
Après le 6^e tour, la pâte est prête

Sommes-nous en dessous de mille feuilles ?

- Enveloppement du beurre **2 feuilles**




- Après le premier *tour* $2 \cdot 3 = 6$ **feuilles**



- Après 6 *tours*, on compte

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^6 = \dots$$


$$2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1458$$

feuilles pour chaque
morceau de pâte

La percolation et la stratégie du jeu de Hex



© Hugo Duminil-Copin
Université de Genève

Une tasse de café ?

Quelle cafetière choisissez-vous pour obtenir un café serré ?

- Le *café* n'est *pas assez tassé*, l'eau passe très facilement et les arômes n'ont pas le temps de se diffuser dans l'eau. Vous obtenez un jus de chaussettes
- Le *café* est *trop tassé*. L'eau ne peut pas passer au travers du café. Pas de café avec cette cafetière !
- La mouture du café est assez dense pour que l'eau passe difficilement et que les arômes prennent le temps de se diffuser. Vous obtenez un bon café serré

Pour décrire la façon dont l'eau peut s'écouler à l'intérieur d'un filtre de café, au sein d'une roche poreuse ou pour comprendre comment se propage une maladie bactérienne dans une forêt, les mathématiciens font appel à un **modèle de percolation**

La **percolation** du latin *percolare*, « filtrer », « passer au travers » désigne le passage d'un fluide à travers un milieu plus ou moins perméable

En physique et en mathématique, le terme **percolation** a un sens plus précis

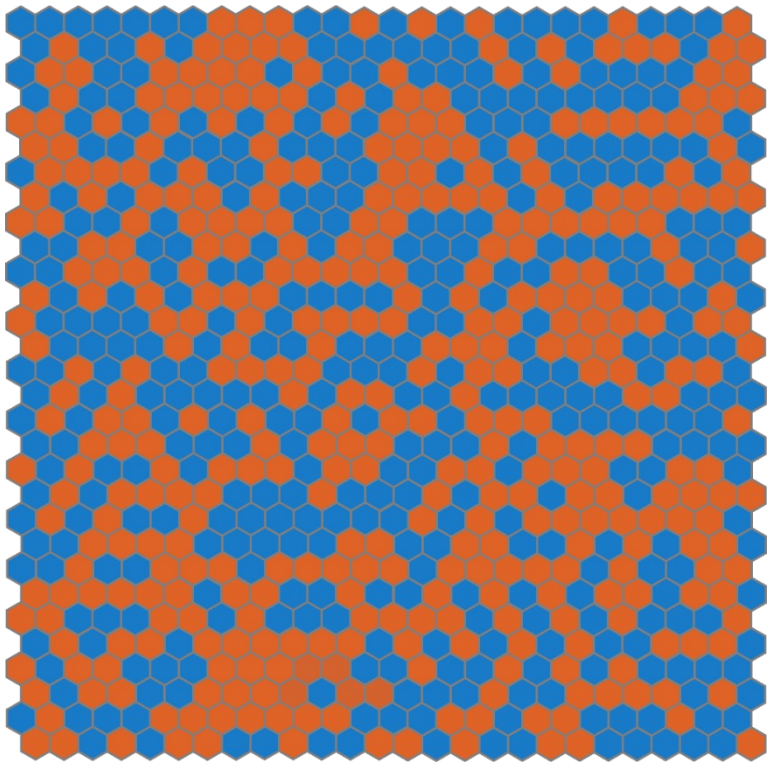
C'est un *processus physique critique* qui décrit, pour un système, une *transition d'un état vers un autre*.

C'est un phénomène de *seuil* associé à la transmission d'une « information » par le biais d'un réseau de sites et de liens qui peuvent, selon leur état, relayer ou non l'information aux sites voisins

Propagation d'une maladie dans une forêt

- La contamination causée par un arbre malade va-t-elle rester circonscrite dans une petite région ou risque-t-elle de s'étendre à des arbres situés très loin de la zone de contamination initiale
- L'approche que l'on adopte est celle de la *physique statistique*
Pour comprendre un phénomène macroscopique on s'intéresse aux éléments microscopiques qui composent le système
- La forêt tout entière est constituée d'un très grand nombre d'éléments microscopiques = de très petite taille par rapport à celle de la forêt, les arbres
- Faisons l'hypothèse que la maladie se transmet d'un arbre à l'autre si leurs feuillages se touchent
- Si on modélise cette forêt par un ensemble d'hexagones, certains étant occupés par un arbre, d'autres non, l'étude de la propagation du feu bactérien revient à étudier les amas d'arbres adjacents

- On obtient un modèle de percolation géométrique constitué par un pavage hexagonal



© Hugo Duminił-Copin
Université de Genève

- Si la transmission de la maladie se produit de manière *aléatoire* Il y a une certaine *probabilité* de contamination entre voisins
- Si la maladie est virulente, un arbre malade peut infecter d'autres arbres arbitrairement éloignés de lui et décimer la forêt

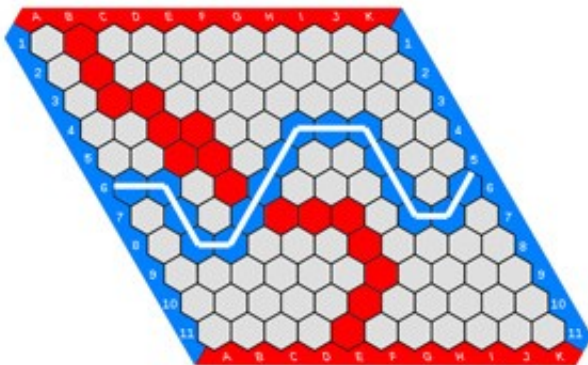
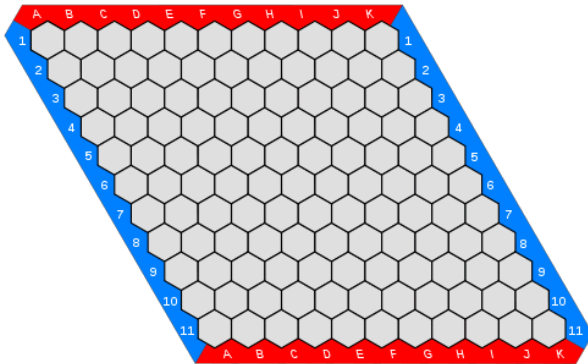
- Dès que la probabilité de transmission passe au dessous d'un certain *seuil*, la transmission des maladies reste locale L'infection est limitée à de petits domaines de la forêt
- Comment calculer cette *valeur critique* ?

Le jeu de Hex

Inventé indépendamment par le danois Piet Hein et l'américain John Nash dans les années 1940
Il a été réédité par le CIJM



Hugo Duminiel-Copin
Université de Genève



- Chaque joueur pose chacun son tour un jeton hexagonal bleu ou rouge selon sa couleur
- Le joueur bleu essaye de créer un chemin de gauche à droite
Le joueur rouge un chemin de haut en bas

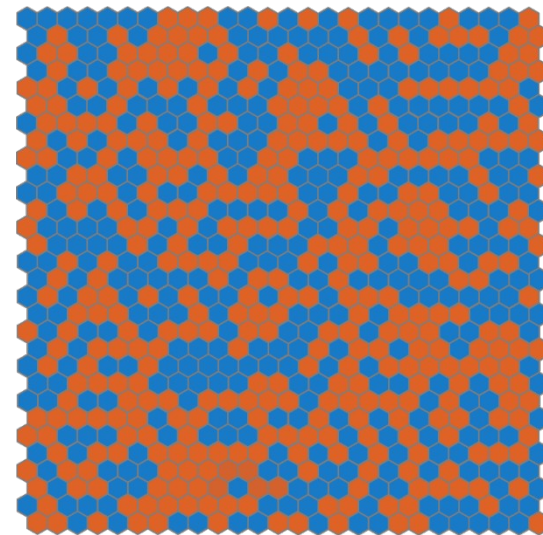
Y a-t-il toujours un gagnant ? Existe-t-il une stratégie gagnante ?

- Par symétrie, la *probabilité* de créer un *chemin bleu* d'un bord bleu du plateau à l'autre est *égale* à la *probabilité* de créer un *chemin rouge* d'un bord rouge à l'autre du plateau
- Comme il n'y a pas de possibilité de partie nulle, les deux ont une *probabilité égale à 1/2*
- **Attention** : ce raisonnement n'est possible que dans une forme qui a les symétries du réseau hexagonal «le losange dans le jeu de Hex» !
- Ne jouons plus sur un *plateau* en forme de losange, mais sur *n'importe quelle* autre *forme* : par exemple un carré
Qui gagne ?

Le jeu de Hex aléatoire

Choisissons la couleur de chaque jeton aléatoirement «lançons une pièce de monnaie par exemple» : ce modèle s'appelle la percolation

L'ordre dans lequel on choisit les cases n'importe pas. **Qui gagne ?**



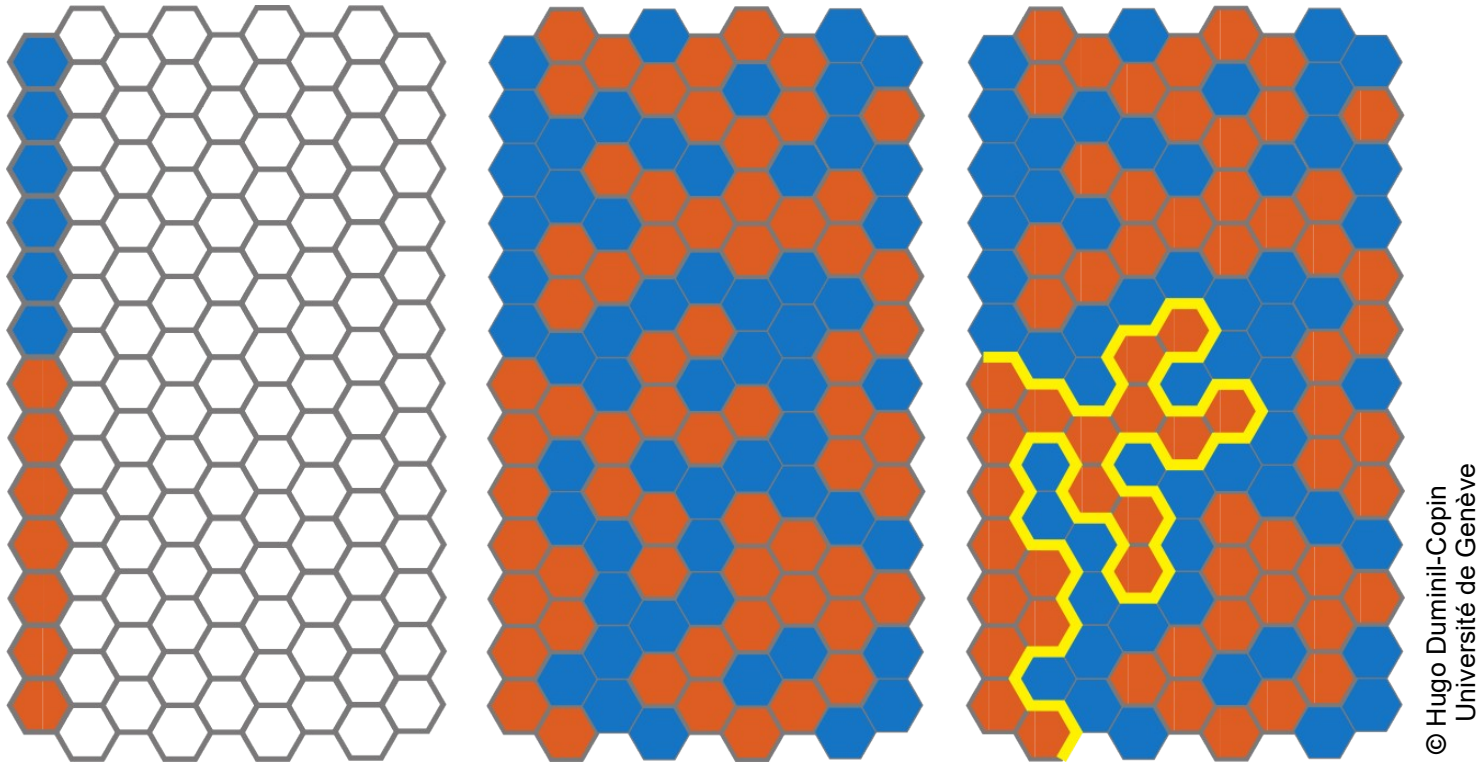
© Hugo Duminil-Copin
Université de Genève

- Ces questions sont extrêmement difficiles à résoudre
- Intéressons-nous à une question proche :
Qu'arrive-t-il lorsque l'on fixe strictement *la forme du plateau* et que *les cases deviennent de plus en plus petites* ?
- **Le Théorème de Smirnov** dit
Lorsque la taille des cases tend vers 0, la probabilité que les bleus gagnent sur un plateau de jeu de largeur 1 et de hauteur x converge vers une fonction explicite de x
De plus, la probabilité de victoire (à la limite) est invariante sous beaucoup de transformations du plateau de jeu : en fait toutes celles qui conservent les angles droits !



Stanislas Smirnov
Médaille Fields 2010
Université de Genève

Ce résultat permet de décrire une courbe très intéressante dans notre modèle : *le processus d'exploration*



© Hugo Durminil-Copin
Université de Genève

Théorème (Smirnov)

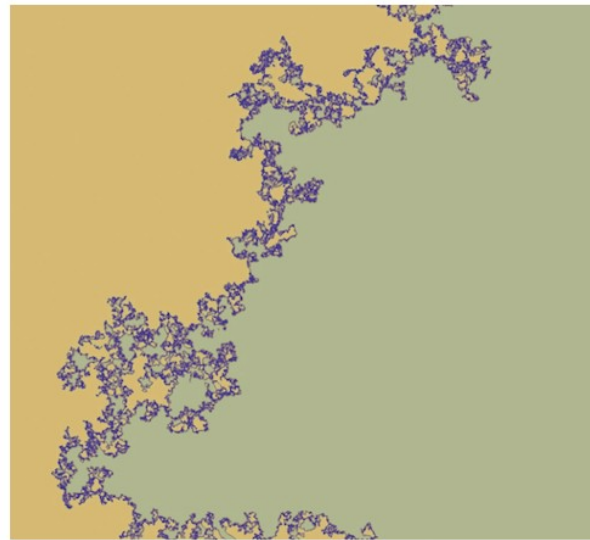
La courbe d'exploration de la percolation sur le réseau hexagonal converge vers une courbe aléatoire et fractale, appelée *SLE₆*

Cette courbe est fondamentale en physique théorique. Elle permet d'étudier des phénomènes comme :

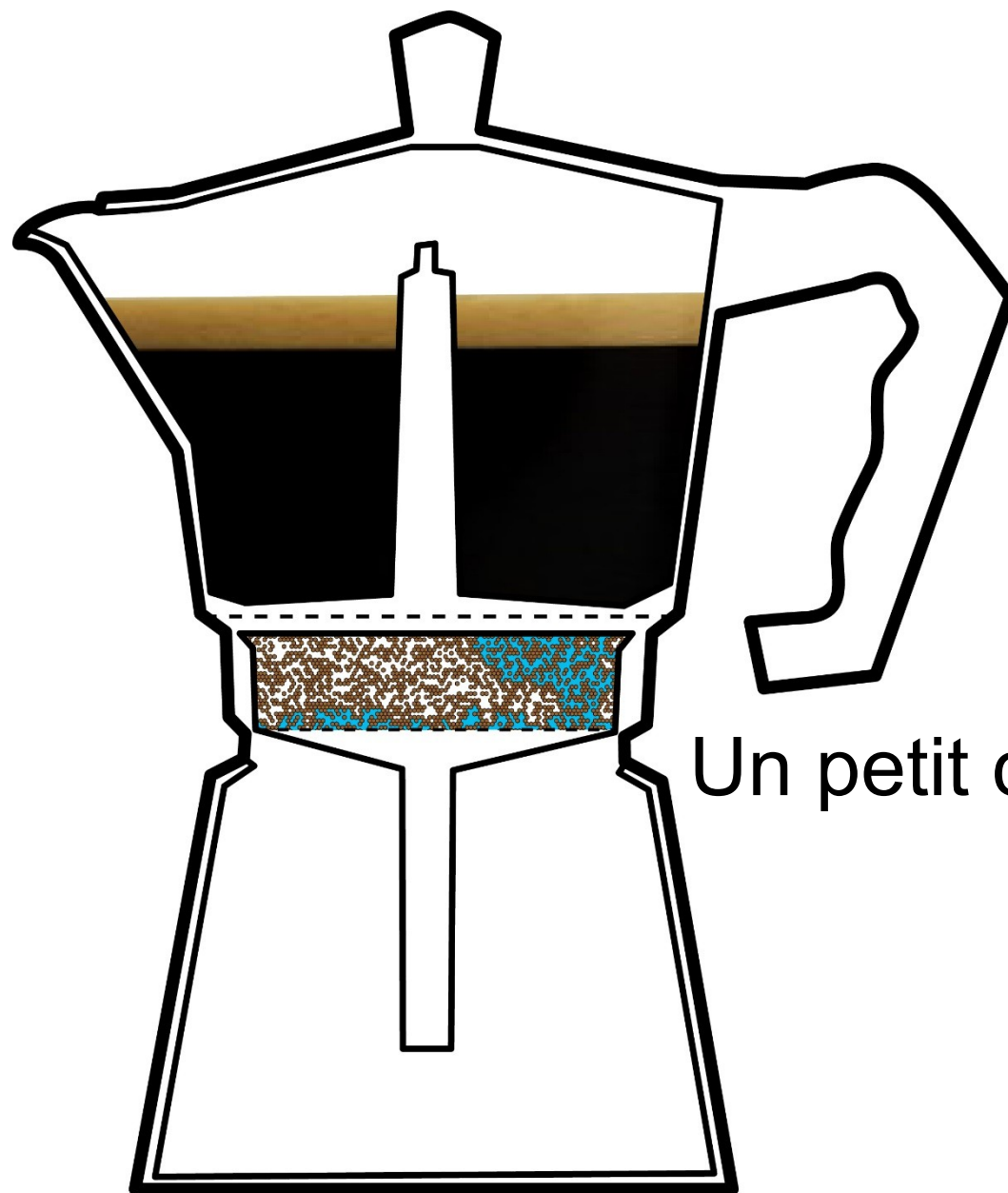
- Les transitions de phase : l'évaporation ou le point de Curie
- L'érosion : la rouille
- L'agglomération : formation de flocons de neige dans les nuages



Plaque de fer rouillée

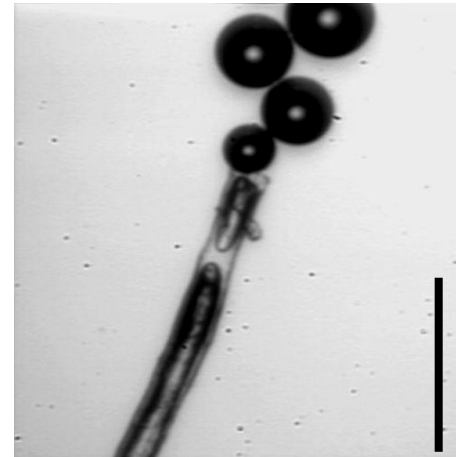
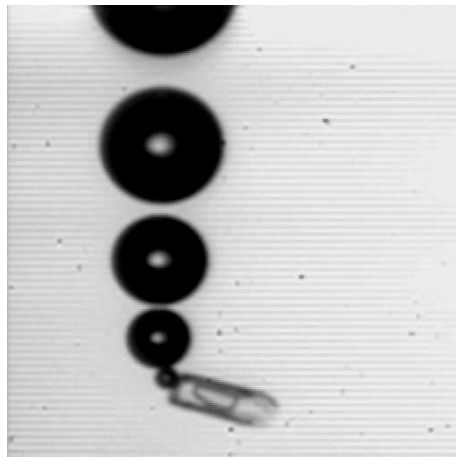


Courbe *SLE6*



Un petit café ?

Champagne ! Le mouvement des bulles en équations...

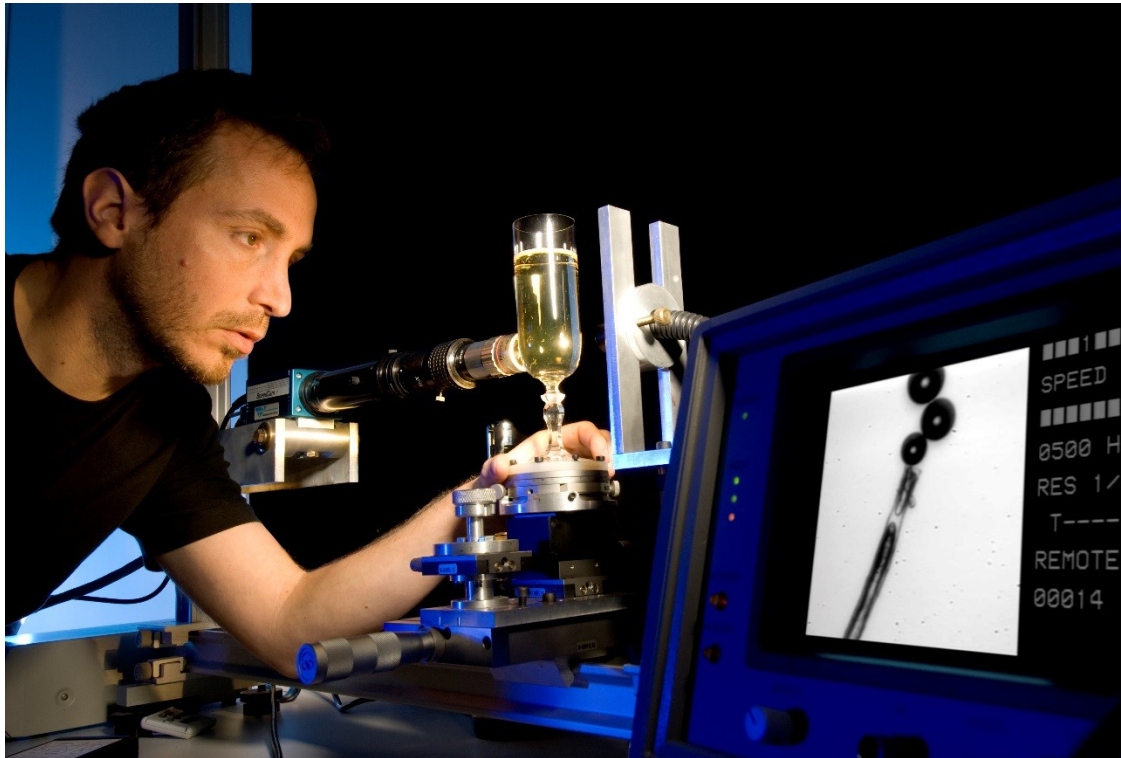


© Gérard Liger-Belair

Dans la majorité des cas, les sites de nucléation de bulles sont des fibres de cellulose accrochées à la surface du verre (barre = 100 μm)

La nucléation d'une bulle

Le champagne est un vin dit effervescent. Quelques dizaines de secondes après le service du champagne dans la flûte, vous pouvez observer des



colonnes de bulles, parfaitement verticales, qui courent le long de la paroi du verre, semblant surgir d'un même point pour rejoindre la surface.

Ce sont des bulles de dioxyde de carbone CO_2 dissous, issues de la fermentation du vin en bouteille sous l'action des levures

© Hubert Raguét

Gérard Liger-Belair

Equipe Effervescence, Champagne et Applications - Université de Reims

Champagne-Ardenne

Photographie du banc optique destiné à scruter la nucléation des bulles de champagne in situ, dans une flûte

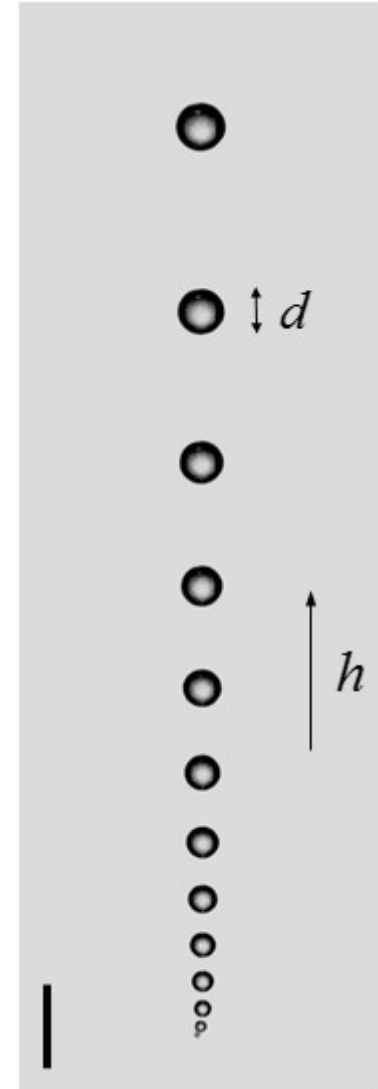
L'ascension d'une bulle

La vitesse ascensionnelle U des petites bulles est définie comme la dérivée par rapport au temps t de la distance h parcourue par une bulle d est le diamètre de la bulle

$$U = \frac{dh}{dt} \approx 5 \times 10^{-2} g^{0,8} \left(\frac{\rho}{\eta} \right)^{0,6} d^{1,4}$$

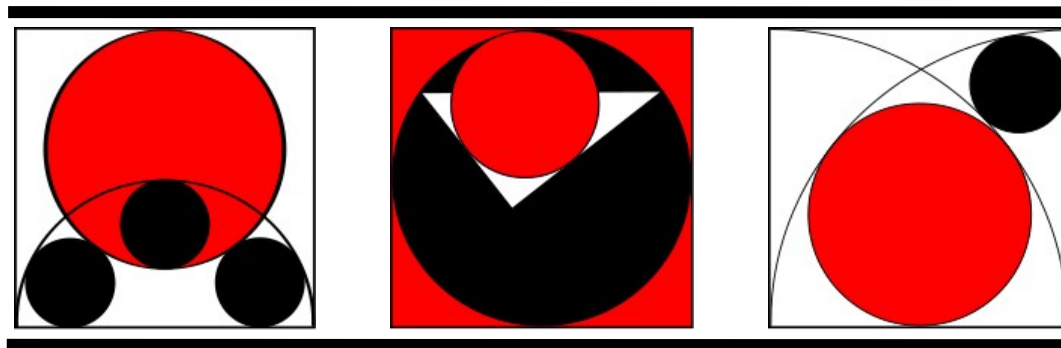
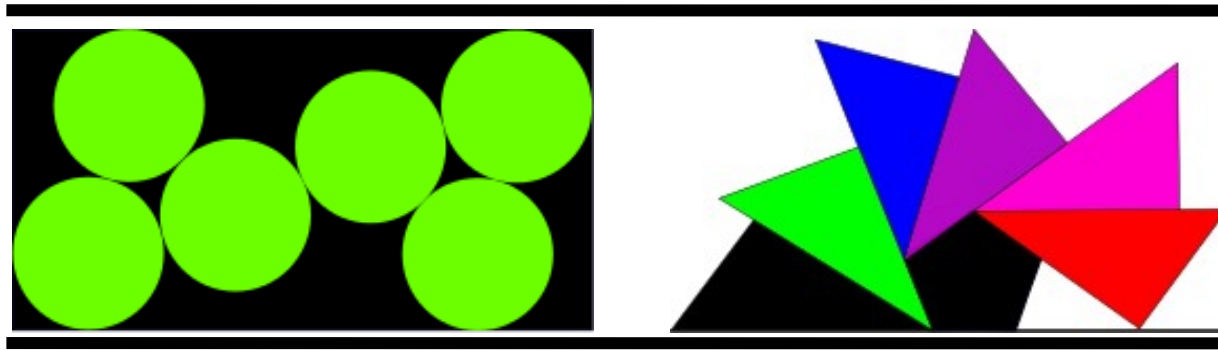
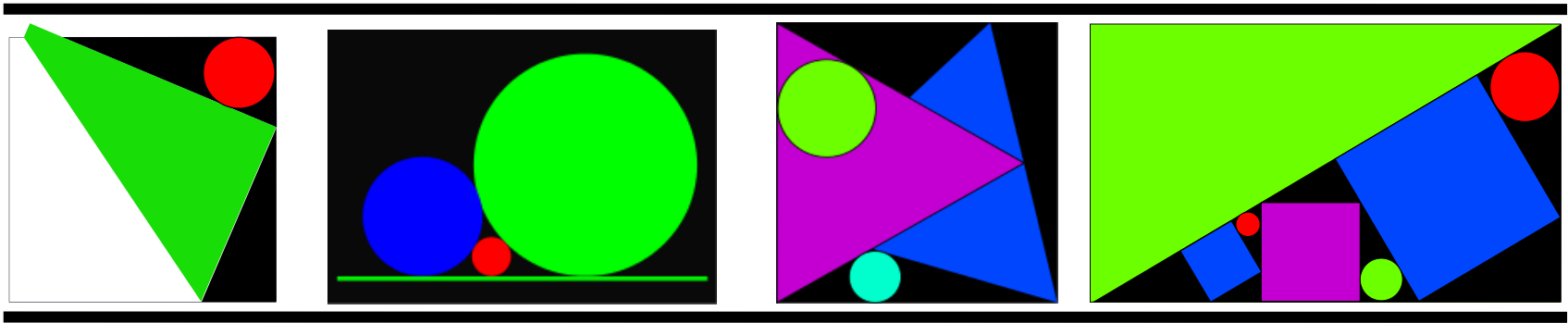
On peut déterminer l'évolution théorique de la distance parcourue par une bulle, en fonction du temps

$$\begin{aligned} h &\approx 5 \times 10^{-2} g^{0,8} \left(\frac{\rho}{\eta} \right)^{0,6} \int_0^t (d_0 + kt)^{1,4} dt \\ &\approx 2 \times 10^{-2} g^{0,8} \left(\frac{\rho}{\eta} \right)^{0,6} \frac{((d_0 + kt)^{2,4} - d_0^{2,4})}{k} \end{aligned}$$



Quand les sangakus s'invitent à table

En s'inspirant des sangakus historiques



Résoudre ou construire des sangaku c'est :

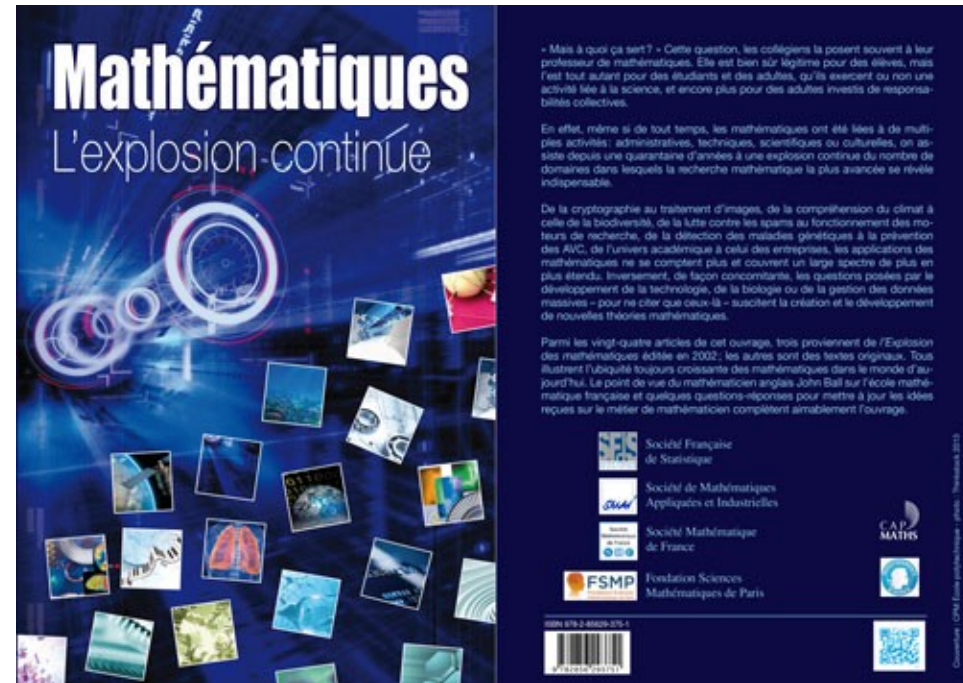
- Disposer d'un support pédagogique stimulant pour explorer de belles mathématiques
- Observer, conjecturer, analyser, chercher, comprendre
- Entrer dans une autre géométrie du triangle dans laquelle un triangle est avant tout un polygone plein, avec pour objets fondamentaux son aire, son périmètre et son cercle inscrit
- Mettre en évidence le cheminement vers une démonstration
- Utiliser des transformations géométriques : homothéties, inversion pour construire
- Aborder des problèmes historiques
- Le livre « ***Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*** » de Géry Huvent (HUVENT G., 2008) qui m'a permis de découvrir les sangaku est une source d'applications géométriques que je vous recommande vivement.

Bibliographie



Tangente n°158 - Les maths se mettent à table

Parution 06 - 2014



Brochure conçue par la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (FSMP), la Société Française de Statistiques (SFdS), la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) et la Société Mathématique de France (SMF), a été réalisée grâce au soutien financier de Cap'Maths

Septembre 2013

DUMINIL-COPIN H., *La percolation, jeu de pavages aléatoires*.
<http://images.math.cnrs.fr/La-percolation-jeu-de-pavages.html>

JEU de Hex. <http://fr.wikipedia.org/wiki/Hex>

JEU de Hex du CIJM.

LEGENDRE, G. L., *Pasta by Design*, Ed. Thames &Hudson, 2011

LIGER-BELAIR G., *Champagne ! Le mouvement des bulles en équations...*
Tangente 158, mai-juin 2014 : 42-44.

MAERKI R., *La modélisation des pâtes alimentaires*. *Tangente 158, mai-juin 2014 : 26-28.*

SCHUMACHER M., 2014. *Quand les sangaku s'invitent à table*. *Tangente 158, mai-juin 2014 : 38-39.*

SCHUMACHER M., *Sangaku ou énigmes mathématiques japonaises* Conférence à l'Université de Neuchâtel le 22.04.2015.
https://www.unine.ch/math/home/colloques_et_seminaires/mathematiques-et-societe.html

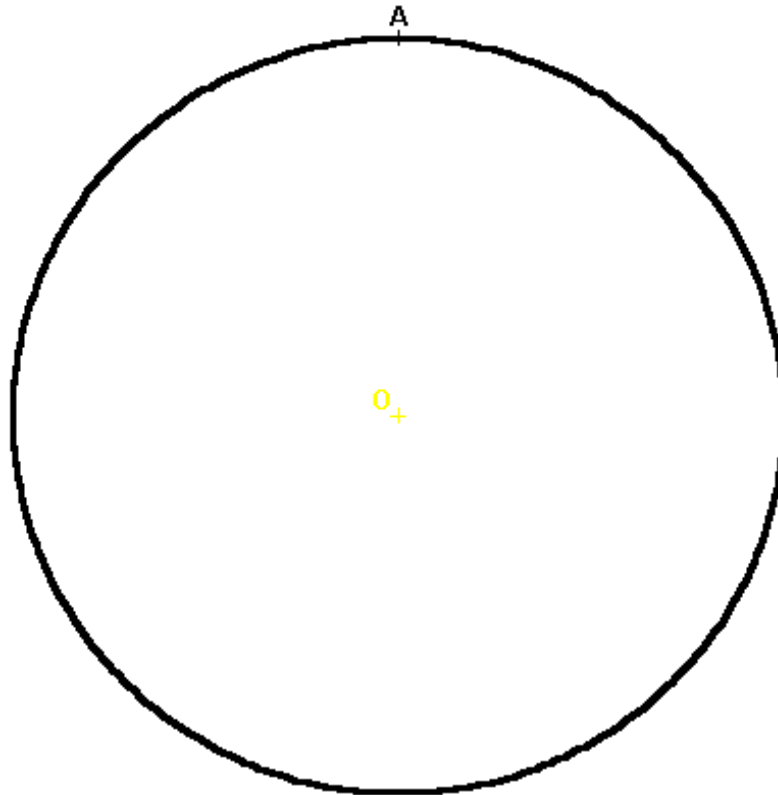
SOUDER D., *80 petites expériences de Maths Magiques*, Dunod, mai 2008 : 120-122.

TURNER P. et PARLIER Hugo, *Mathema*, éditions Tombooks, 2015, €9.99
<http://www.tom-books.com/fr/mathema>, <http://www.unige.ch/~turnerpa/Mathema.html>

Assiette magique

Meublez votre attente au restaurant en faisant des mathématiques magiques avec une assiette, la nappe en papier et un crayon...

Comment construire le **point diamétralement opposé** d'un point situé sur le contour d'une assiette retournée ?



Sujets de discussion

Il est impossible d'utiliser le centre de l'assiette...

Il n'y a pas d'objet comme une règle permettant de tracer des droites...

Tout se passe grâce à la seule assiette...

Indice...

Le défi sera relevé grâce à plusieurs cercles dessinés sur le contour de l'assiette placée en différentes positions...

