LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 26	JUIN 1991	Abonnement 4 n^os^ par an : 30 F

TAN N

N

EVAPM3/90
EVALUATION DU PROGRAMME DE TROISIEME

Faites gagner un peu d'argent à votre Régionale (elle en a bien besoin) : commandez-lui directement la brochure EVAPM3/90 au prix de 85 F Franco (vous y gagnez les 15,40 E de port !). Envoyez votre commande à Jacques VERDIER, 4 rue J. Huet, 54130-ST-MAX, accompagnée d'un chèque de 85 F. à l'ordre de APMEP-Lorraine (offre réservée aux adhérents de la Régionale)

POUR LES ETABLISSEMENTS :

Les collèges connaissent déjà (tous ?) la collection EVAPM.
EVAPM3/90 vient de sortir, concernant les programmes de troisième. Ce document se doit de figurer aussi dans tous les C.D.I. et les laboratoires de maths des Lycées (L.E.G., L.T. et L.P.).
Envoyez un bon de commande administratif à Jacques VERDIER, et l'établissement recevra les brochures avec une facture.

Références à commander :
EVAPM3 : Evaluation progr. de 3^{e} (1990). 100,40 F port inclus
EVAPM4 : Evaluation progr. de 4^{e} (1989). 100,40 F port inclus
EVAPM5 : Evaluation progr. de 5^{e} (1988). 90,40 F port inclus
EVAPM6 : Evaluation progr. de 6^{e} (1987). 60,40 F port inclus

NOUVELLE BROCHURE APMEP :
JEUX 3

"Jeux 3 : des jeux pour la tête et les mains". Des jeux pour se distraire et pour apprendre.
Une brochure pour exercer votre sagacité, trouver des idées d'activités, percevoir l'interaction des maths et du jeu.
Prix : 70 F
Envoyer commande à Jacques VERDIER avec chèque joint (à l'ordre de APMEP-Lorraine ; facture sur demande pour les établissements).

DERNIERE MINUTE

Nous croyions la brochure "JEUX 1", accompagnée d'une pochette de fiches de jeux cartonnées, définitivement épuisée… Nous venons d'en retrouver un petit stock. Avis donc aux amateurs.
Prix : 51 F + port éventuel (11,50 F).

EDITORIAL

Le rapport du C.N.P. n'a pas enthousiasmé les foules. L'A.P.M.E.P. a dit, par son Comité National, ce qu'elle en pensait : aspects positifs, craintes engendrées. Relisez à ce propos le B.G.V. n° 32 de mars 1990.

Le Ministre de l'Éducation Nationale, après longue réflexion, a, dans une conférence de presse, fait des propositions pour transformer les lycées : lisez à ce propos le texte intégral qui est dans tous les lycées et a sûrement été mis à la disposition des enseignants. Là encore, il y a lieu d'apprécier le « bon » et le « douteux » : c'est ce qu'aura certainement fait le Comité national de l'A.P.M.E.P. (les 15 et 16 juin) quand vous lirez ces lignes.

Sans a priori, et après studieux examen, les divers membres de ce Comité se seront exprimés.

« Sortant » de ce Comité, je peux témoigner de la volonté de ses membres, devant chaque problème posé, de développer des idées clairvoyantes, de proposer des solutions raisonnables, que le Bureau doit ensuite mettre en œuvre au nom de l'Association.

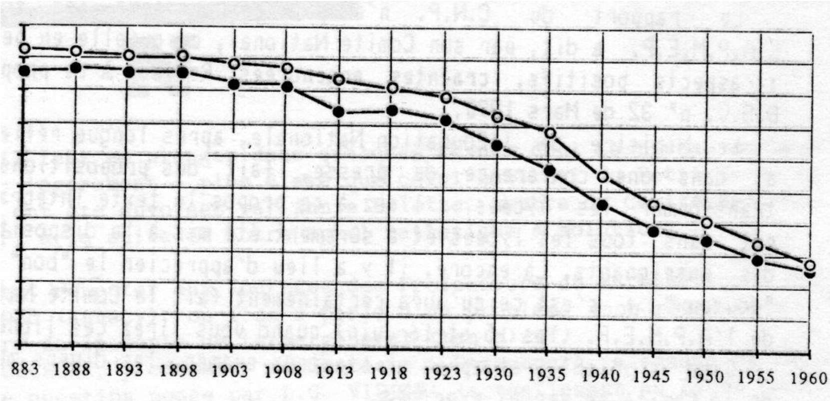
Je dois cependant regretter que leur bonne volonté, leur réflexion personnelle, soient quasiment les seules sources où ils puissent puiser. Ils ont été élus par des membres de l'Association, certes après une « déclaration d'intentions » mais, croyez-le bien, en cours de route, ils seraient ravis d'être éclairés, d'entendre des appréciations sur le fonctionnement et les prises de position de l'A.P.M.E.P. et de connaître des propositions personnelles sur tel ou tel sujet.

C'est un appel à une participation active des professeurs de Mathématiques à l'Association de Spécialistes par laquelle ils désirent être représentés, un appel à tous, et il y a place pour tous. Analyse des sujets d'examen, réponse aux enquêtes proposées, mise en œuvre des activités proposées (rallye, évaluation,…) …et si vous n'y trouvez pas votre compte, PROPOSEZ : votre Régionale vous écoutera.

Seuls quelques irréductibles n'ont pas d'idées ou se contentent d'idées préfabriquées (ailleurs) sur notre métiers : tous les autres peuvent apporter une contribution utile.

Vos élus au Comité Régional, au Comité National attendent votre concours. Merci d'avance.

Michel Bardy



LE NIVEAU BAISSE…

Chaque aimée, ils arrivent
En ne sachant plus rien
Leur ignorance est crasse
Ils ont tout oublié
Ils sont passés de classe en classe
Ils auront tous le bac bientôt
On nous dit en haut qu'il ne faut plus redoubler
Ça va encore se dégrader !

Refrain :
**** Le niveau baisse, le niveau baisse***
**** Il a déjà atteint celui de l'an prochain***
(Air connu,
Paroles de J.-M. Zakhartchouk)

En ce qui concerne les techniques de calcul algébrique, les capacités exigibles en fin de troisième sont - aux dires des collègues - en recul par rapport à ce qu'ils avaient l'habitude d'attendre des élèves ayant suivi les anciens programmes.

L'APMEP a testé, dans son EVALUATION DU PROGRAMME DE TROISIEME, les capacités d'environ 100 000 élèves dans le domaine du calcul littéral et algébrique "pur" d'une part, et dans le domaine de la mise en équation et de la résolution de problèmes d'autre part.

Une des questions posées à certains élèves était la suivante :

Développer et réduire l'expression: $A = \left(5a + \frac{1}{2}\right)^2$

A = ...

Ecrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré, les expressions suivantes:

$B = (x+1)(x-2) - 5(x-2)$

B = ...

$C = (4x-3)^2 + (4x-3)(x+3)$

C = ...

Voici les résultats de l'évaluation observés :

A : 39% de réussite,
B : 50% de réussite,
C : 44% de réussite.

Il faut toutefois souligner que cette question était en fin de questionnaire (en temps limité) ; les taux de non-réponse sont respectivement de 18%, 19% et 22%.

Il n'empêche que ces résultats seront considères comice faibles, puisqu'il s'agit d'une "capacité exigible" en fin de troisième, De là à conclure que le niveau baisse, il n'y a qu'un pas.

En effet, des questions analogues avaient été proposées dans d'autres évaluations il y a quelque temps déjà : <u>elles donnaient de bien plus mauvais résultats</u>. En voici deux exemples :

Factoriser $C = (2a - 6)(a + 5) - (a - 3)^2$

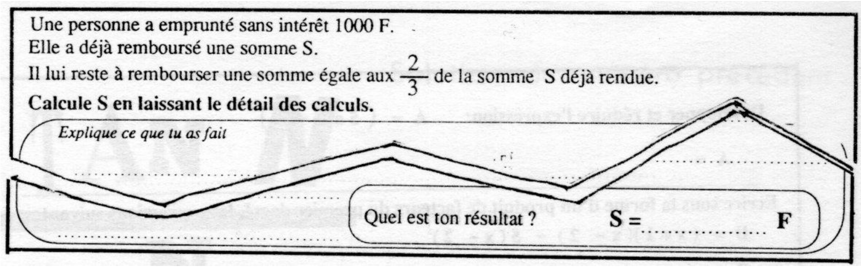
Evaluation SPRESE du Ministère, fin de 3^e, 1984
Taux de réussite : 36%

Factoriser $(4x - 1)(2x + 5) + (4x - 1)^2$

Evaluation IREM de Besançon, fin de 3^e, 1982
Taux de réussite : 36% également

Mais quelles sont les erreurs commises par les élèves aux questions posées plus haut ?
Pour 10%, dans B et C, ils ont développé au lieu de factoriser.
Pour un bon nombre d'autres, les parenthèses ont été oubliées : on trouve ainsi des écritures telles que :
(x – 2)(x + 1) - 5 ou encore x – 2((x + 1) – 5)

Donnons un autre exemple dans le domaine de la résolution de problèmes à mettre en équation :


Une personne a emprunté sans intérêt 1000 F.
Elle a déjà remboursé une somme S.
Il lui reste à rembourser une somme égale aux $\frac{2}{3}$ de la somme S déjà rendue.
Calcule S en laissant le détail des calculs.
Explique ce que tu as fait
Quel est ton résultat ? **S =** .... **F**

Le pourcentage de démarches correctes est de 47%. Et le pourcentage d'élèves ayant une réponse correcte est de 31%.
Cette question est particulièrement intéressante parce qu'elle a déjà été utilisée dans un certain nombre d'évaluations antérieures :

Evaluation SPRESE fin de 3e, 1984 :	26% de démarches correctes 23% de réponses correctes
Evaluation APMEP fin de 5e, 1988 :	4% de réponses correctes
Evaluation APMEP fin de 4e, 1989 :	25% de démarches correctes, 12% de réponses correctes
Evaluation ministérielle DEP fin de 3e, 1990 :	chiffres actuellement inconnus.

Un des atouts des quatre évaluations successives menées par l'APMEP en sixième, cinquième, quatrième puis troisième est d'avoir bien montré que des capacités exigibles mais non maîtrisées au niveau *n* se trouvaient bien mieux maîtrisées au niveau *n+2* : il faut laisser le temps de la maturation. En voici deux autres exemples :

Factoriser $a^2 + a$:

Taux de réussite : 31% en fin de quatrième
62% en fin de troisième

Factoriser $3x^2 - 8x$

Taux de réussite : 31% en fin de quatrième
62% en fin de troisième

Dans l'état actuel des observations, rien ne permet donc de faire état d'une baisse de niveau en mathématiques, bien au contraire : n'oublions pas que les élèves de troisième constituent actuellement une très forte proportion de leur classe d'âge, ce qui n'était pas le cas il y a 8 ans. Les capacités "disparues" ont fait place à de nouvelles capacités (géométrie dans l'espace par exemple), et les capacités peu entraînées sont remplacées par une meilleure maîtrise du sens.

Toutes les données que vous avez trouvées dans cet article ont été extraites de la brochure EVALUATION DU PROGRAMME DE TROISIEME éditée par l'APMEP, et que vous pouvez vous procurer auprès de la régionale Lorraine. Cette brochure contient d'une part une analyse de 160 pages, d'autre part 24 questionnaires format A3 recto-verso. Voir en page 2 les modalités de commande. ■

JOURNÉES NATIONALES DE LYON

I. Ces Journées sont inscrites au PAF de l'académie, sans remboursement de frais. Voici ce que cela signifie en clair :

1. Vous vous inscrivez aux Journées Nationales "normalement", par la procédure indiquée par la Régionale de Lyon (cf. Bulletin vert).
2. La Régionale Lorraine va "récupérer", début septembre, la liste des inscrits lorrains et elle va les inscrire, comme "public désigné", au stage MAFPEN codé RCAV75012.
   Pour cela il faut que vous fassiez parvenir à Jacques VERDIER (par courrier ou téléphone) votre n° d'INSEE et le nom de votre établissement d'exercice, renseignements indispensables pour vous rentrer dans l'ordinateur du Rectorat.
3. Vous recevrez alors - mi octobre - un ordre de mission sans frais pour vous rendre à Lyon (c'est à dire que ni le voyage ni l'hébergement ne vous seront remboursés).

Pourquoi cette procédure :
C'est d'abord une reconnaissance des Journées de Lyon comme formation continue pour les enseignants de mathématiques.
D'autre part, l'ordre de mission vous permet d'être absent de votre établissement le vendredi 18 et le samedi 19 octobre, et vous couvre en cas d'éventuel accident.
Le fait d'avoir choisi la procédure "public désigné" ne vous empêche donc pas de vous inscrire (éventuellement) à 3 autres stages.

II. Pour l'hébergement à LYON, il est possible que tous les "Lorrains" qui le désirent se retrouvent dans le même centre d'hébergement ("SANTOS-DUMONT", Lyon-8). Pour cela, renvoyer la fiche hébergement du Bulletin vert à J. Verdier, qui centralisera. Indiquez avec qui vous voulez partager votre chambre (si chambre à 2).

III. Pour le voyage à LYON, la Régionale se propose de mettre en relation ceux qui s'y rendent en voiture et qui ont des places, et ceux qui cherchent des places dans des voitures (avec partage des frais) :
renvoyez le bulletin ci-dessous à Roger CARDOT
5 rue de Saffais, 54360 BARBONVILLE
Téléphone 83.75.54.53

--- ✂ -- ✂ ------

Si vous désirez qu'on vous mette en contact avec
quelqu'un qui se rend en voiture à LYON, cochez ici : ☐
Si vous avez de la place et acceptez des passagers, cochez ici : ☐
Nombre de places : ☐

Indiquez vos coordonnées : NOM
Adresse

Téléphone

T-SHIRTS LORRAINE

A l'occasion du Rallye Mathématique, la Régionale a fait imprimer des T-shirts dont le logo est représenté ci-contre.
Ces T-shirts sont mis en vente au prix unitaire de 50 Francs.
Il y a cinq tailles (deux pour les enfants : 12 et 14 ans, et trois pour les adultes : petit, moyen, grand).
Passer commande à

Marie-José BALIVIERA
2 rue Harga, 88110-ALLARMONT
Tél. 29.41.16.07

Chèque à l'ordre de APMEP-LORRAINE ; ajouter 10 F au total pour frais d'envoi.

LES LIVREE DE PREMIÈRE ARRIVENT AU COMPTE GOUTTE !

LEQUEL CHOISIR ?
FAUT-IL EN CHOISIR UN TOUT DE SUITE ?
ET COMMENT ?

Les nouveaux programmes sont tout juste parus : **BO n° spécial 2 du 2 mai 91** (on peut aussi se les procurer au CRDP).

L'APMEP se propose de vous aider ! Vous avez lu le dernier B.G.V. ! C'est un gros travail !
De plus tous les collègues n'auront pas tous les manuels des diverses séries.
Il serait sympa de votre part de me renvoyer vos appréciations, vos critiques **avant le 6 juillet 91**, pas plus tard !

Michèle FABRÉGAS
4 rue Foës
57070 METZ

Car ensuite un petit groupe va en faire une synthèse que vous trouverez dans le B.G.V. du 15 septembre 1991.

Une piste de travail : une grille que le groupe INTER-IREM-APMEP a établie : *voir 4 pages suivantes*.

INTER-IREM **APMEP**

COMMISSION
MANUELS SCOLAIRES

Editeur, collection, auteurs :

Réponses et commentaires

I - VUE D'ENSEMBLE

1 - La typographie et la présentation sont-elles agréables ?
2 - Y-a-t-il une table des matières (ou sommaire) suffisamment détaillée ?
Commentaire : une table des matières détaillée permet d'avoir une vue d'ensemble de l'organisation du livre.
Trouve-t-on une référence au programme officiel ?
sous quelle forme ?
Y-a-t-il un guide pédagogique ? *(inséré dans le manuel, ou joint dans un livret séparé, ou une édition spéciale prof).*
Y a-t-il une référence au programme des classes précédentes ?

3 - Y-a-t-il un "mode d'emploi" du livre, rédigé à l'intention des élèves?
Un élève peut-il retrouver facilement un mot, un résultat ?
Y a-t-il un index de vocabulaire
un lexique, un mini-dictionnaire
un formulaire
un index de méthodes *(renvoyant par exemple à des fiches-méthodes. Voir ce que contiennent les fiches ou index de méthodes*).
4 - Dans chaque chapitre, présente-t-on clairement
la structure
les objectifs
les contenus mathématiques
(par exemple en début ou en fin de chapitre une rubrique courte : mots-clés, objectifs...).

II - ACTIVITES PREPARATOIRES

Y a-t-il des activités préparatoires à une notion ?
Sont-elles opportunes ?
Commentaires: les activités préparatoires sont conçues comme une approche à l'étude qui va suivre d'une notion mathématique :
- *elles peuvent inclure des prérequis, des révisions :*
- *elles peuvent poser des problèmes montrant l'intérêt de l'outil qu'est la notion qui va suivre ;*
-*elles peuvent faire référence au concret, comporter une approche historique...*

III - ACTIVITES DE "COURS"

L'importance relative des différentes définitions et théorèmes est-elle soulignée? (encadrés, couleurs

Les démonstrations des théorèmes figurent-elles :
- dans la partie "cours" (en totalité ou en partie)
- ailleurs (en totalité ou en partie)
- quels sont les critères de choix ?

Le paragraphe "cours" contient-il des exercices d'application immédiate ?

Le cours figurant dans le livre est-il conçu comme :
- une activité spécifique de l'élève?
- un ensemble d'informations servant de référence?

IV - ACTIVITES DE REINVESTISSEMENT (*TP d'application, résolution de problèmes, utiliser...)* **et EXERCICES**

Y a-t-il deux rubriques séparées ?
Y a-t-il classement des exercices :

- suivant la notion qu'on fait fonctionner ?
- suivant la difficulté de l'exercice ?
- le double classement?

Il y a plusieurs niveaux d'activités :
- *comment fonctionne la notion qui a été mise en place (exercices techniques, application, entraînement) ;*
- *comment ce fonctionnement sera intégré dans la résolution de problèmes.*

Ces différents niveaux sont-ils explicités pour l'élève ?

La formulation des exercices est-elle suffisamment variée ?

Y a-t-il des commentaires visant à faire acquérir des méthodes de recherche ou de résolution ? *(qui peuvent être sous forme d'exercices résolus ou d'un questionnement, ou de "clés" ou de "coups de pouce"...).*

En vue d'un travail personnel, le livre permet-il à l'élève de contrôler ses acquis ?
Quel type d'acquis?

- acquis technique (savoir-faire)
- acquis de compréhension?

Sous quelle forme ?

- autocontrôle (réponse sans explication)
- auto-évaluation" (réponse avec explication de la démarche)

Y a-t-il des exercices plus complexes faisant appel à différentes notions, ou différentes méthodes pour un problème donné ?

Y a-t-il des problèmes ouverts (énoncé d'un problème un peu complexe dans lequel l'élève n'est pas guidé par une liste de questions) ?

Y a-t-il des problèmes de synthèse (faisant appel à plusieurs chapitres) ?

Il reste maintenant à étudier le contenu même du livre :

- respecte-t-il le programme ?
- la rédaction et les formulations prennent-elles en compte le niveau des élèves ?
- favorise-t-il la démarche scientifique ?
- s'attache-t-il à poser les problèmes dans différents cadres (numérique, graphique, figuratif, algébrique) ?

Cela nécessite une bonne connaissance du programme considéré, puis une analyse approfondie de l'ouvrage...

Pour une étude plus approfondie, on peut se reporter aux travaux antérieurs de la Commission Manuels Scolaires, en particulier à la brochure APMEP consacrée à ce sujet, rédigée il y a quelques années, mais dont l'analyse, très détaillée, convient parfaitement aux manuels scolaires d'aujourd'hui.

V. AUTRES REMARQUES

A retourner avant le 6 juillet à
Michèle FABRÉGAS
4 rue Foës
57070 METZ

ANALYSE DES SUJETS DE BACCALAUREAT

Vous pouvez nous aider à faire l'analyse des sujets de baccalauréat grâce à la grille ci-dessous (qui a d'ailleurs été envoyée dans tous les Lycées).
La Régionale organisera le Jeudi 4 juillet à 16 h 30, à l'IREM, une réunion pour élaborer une synthèse, qui sera publiée dans les bulletins APMEP.

Série :

Sujet proposé par l'académie de :

I. Quelles sont vos impressions globales sur ce sujet ? (Pour les séries technologiques, lien avec la spécificité de la série).
Si vous les connaissez, moyenne de votre jury et moyenne académique.

II. Pour chacun des exercices ou problèmes, mettez en évidence - dans la mesure du possible - les réponses aux rubriques suivantes :

a) Conformité au programme (dans 1'esprit et dans le texte), aux instructions et aux commentaires officiels. Adaptation au niveau des élèves.

b) Clarté de l'énoncé (présentation, niveau de vocabulaire, ambiguïtés, etc.).

c) Difficultés rencontrées par les élèves, principales erreurs.

d) Si possible donnez, même approximativement, le pourcentage de réussite par question et la moyenne de vos copies.

e) Autres remarques.

III. Si vous avez participé à la réunion d'harmonisation des correcteurs, quels ont été les principaux points de consensus ou de désaccord ?

ANALYSE DES SUJETS DE BREVET

Nous proposons aux professeurs de Collège de faire également l'analyse du sujet du Brevet, soit à l'aide de la grille ci-dessus, soit à l'aide de celle parue dans le BGV de Juin 1990.

Ensuite vous pourrez :

- ou bien venir à la réunion de synthèse que nous organisons le jeudi 4 juillet à 17 h à l'IREM (Faculté des Sciences de Vandœuvre, bâtiment 1er Cycle) ;

- ou bien envoyer votre contribution écrite à François DROUIN, 18 Lotissement "Le Cerisier", 55300 CHAUVONCOURT.

Merci d'avance.

RALLYE MATHÉMATIQUE DE LORRAINE

Nous vous faisions savoir, dans un dernier "PETIT VERT", que nous manquions de subsides pour "faire tourner" le Rallye.
Voici la liste des personnes morales qui nous ont financés, soit en espèces, soit en nature :

S.T.S.I. (SOCIETE DE TRANSPORTS SPECIAUX ET INDUSTRIELS : manutention, levage, transports par route et par rail de tout lot, colis et masse indivisible jusqu'à 650 tonnes).	Sponsorisation de 6 000 F.
C.C.S.T.I. THIONVILLE	Achat de lots, entrées gratuites à l'inventorium, réception (estimation environ 10 000 F).
I.R.E.M. LORRAINE	Impression des documents et des sujets.
RECTORAT	Envoi dans les établissements.
Conseil Général 88	Achat de lots (livres, découpages).

Nous sommes encore loin de couvrir les besoins, puisque l'achat des T-shirts pour les 24 classes gagnantes, ainsi que l'achat des premiers prix (bandes dessinées) a été entièrement financé par les fonds propres de la Régionale.
Il est évident que nous ne pourrons poursuivre cette manifestation, qui commence à prendre de l'ampleur (6 000 participants cette année) que si nous trouvons des financements propres (sponsors, etc.). Nous faisons d'ores et déjà appel à vous pour toute suggestion utile.

VERS LA FIN DE LA CRISE DE RECRUTEMENT DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES ?

Nos camarades qui sont allés aux Journées de la Guadeloupe ont trouvé là-bas la solution de la crise de recrutement des professeurs de mathématiques : CAPES, en vente livre dans toutes les épiceries et supermarchés…. Quelques francs suffisent (en plus du billet d'avion).
Il parait que même certains se seraient baignés dans l'eau du CAPES...quelle chance !

Problème n°26 (PETIT VERT n° 26 de juin 1991)

Les collègues qui sont allés aux Journées nationales dans les Antilles ont rapporté, outre quelques coups de soleil et quelques bouteilles de « CAPES » (eau de source gazéifiée), le problème suivant, paru dans la presse locale.

LE PLANTEUR

Monsieur RHUMIER peut donner la composition d'un punch planteur rien qu'en le goûtant.
Marie-Titine lui a proposé un planteur qui, habituellement, est composé d'une mesure de sirop de canne, de deux mesures de rhum et de trois mesures de jus. Mais elle s'est trompée dans ses proportions.
Après avoir bu un verre plein, il déclare que le mélange n'est pas assez sucré : il rajoute un verre plein de sirop. Il boit un verre plein du nouveau mélange et, trouvant qu'il n'est pas assez alcoolisé, rajoute un verre plein de rhum. Il boit à nouveau un verre plein de mélange et, pour augmenter le fruité, rajoute un verre plein de jus. Le nouveau mélange est alors parfait.

Sachant que Marie-Titine avait préparé 60 cl de mélange, donnez (au dixième de cl près) la capacité du verre qui a servi à verser et à déguster.

Nota bene : pour ce problème, nous déconseillons vivement la méthode expérimentale.

Solution du problème précédent (n°25)

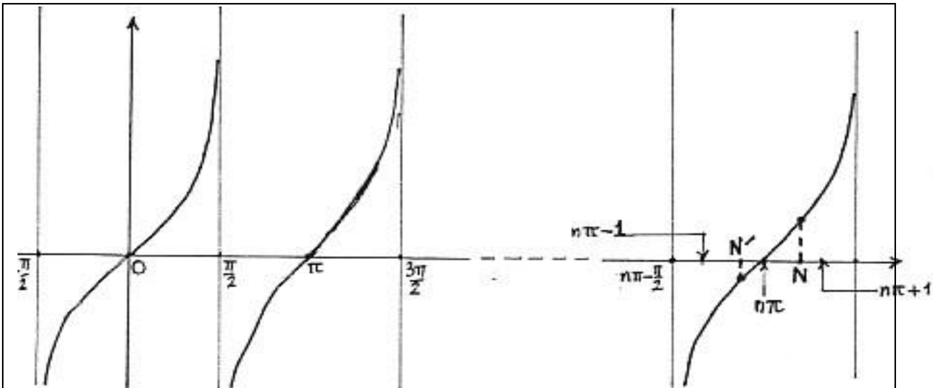
Le problème de la limite de $u_n = \dfrac{\tan n}{n}$, s'il ne remonte pas à la nuit des temps, n'en a pas moins suscité un certain nombre d'articles dans la presse mathématique de la fin du XX^e siècle.

Il nous avait paru « évident » que $\tan n / n$ ne se comportait pas comme $\tan x / x$, et n'avait pas de limite : puisque **N** est dense sur la circonférence du cercle, on peut approcher les points correspondant à 0 et à π aussi près que l'on veut, et donc rendre tan n aussi proche de zéro ou de l'infini que l'on veut. Mais de là à étendre le résultat à tan n / n, il y a un pas que la rédaction du bulletin a franchi un peu trop vite !

Le tout est de savoir qui de tan n ou de n, l'emporte sur l'autre...

Quelques calculs faits à la machine (dans la limite où l'on suppose qu'elle est capable de calculer à peu près correctement tan n quand n est grand) semblaient bien montrer que la limite de tan n / n était 0 : sa valeur était généralement de l'ordre de grandeur de $1/n$, c'est à dire – en langage vulgaire – que c'est n qui l'emportait.

Nous avons reçu au sujet de ce problème une proposition de M. **BOLZAN** (lycée Charlemagne, THIONVILLE) qui démontre que **SI** $\dfrac{\tan n}{n}$ admet une limite, alors cette limite ne peut être que 0. Voici sa proposition :



Soit N l'unique entier de $[n\pi ; n\pi + 1[$, et N' l'unique entier de $]n\pi - 1 ; n\pi]$:

★ $\dfrac{\tan n}{n}$ ne tend pas vers $+\infty$ ni vers une limite L strictement positive, car $\dfrac{\tan N'}{N'}$ est strictement négatif ; or si $\dfrac{\tan n}{n}$ tendait vers une limite positive, on aurait $\dfrac{\tan n}{n} > 0$ à partir d'un certain rang ;

★ $\dfrac{\tan n}{n}$ ne tend pas vers $-\infty$ ni vers une limite L strictement négative, car $\dfrac{\tan N}{N}$ est strictement positif ; or si $\dfrac{\tan n}{n}$ tendait vers une limite négative, on aurait $\dfrac{\tan n}{n} < 0$ à partir d'un certain rang.

Si $\dfrac{\tan n}{n}$ converge, alors toute suite extraite converge aussi, et vers la même limite.

Soit $V_n = \dfrac{\tan N}{N}$; alors $V_n = \dfrac{\tan(N - \pi n)}{N}$ pour n entier positif ;

or $0 < N - n\pi < 1 < \dfrac{\pi}{2}$. Donc $0 < V_n < \dfrac{\tan 1}{n} < \dfrac{\tan 1}{n\pi}$, et $\dfrac{\tan 1}{n\pi}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc $\lim(V_n) = 0$. **Conclusion** : si $\dfrac{\tan n}{n}$ a une limite, cette limite est nulle.

Une autre démonstration de ce fait nous a été proposée par Bruno **LOVAT** (lycée Varoquaux, TOMBLAINE) :

Soit L la limite, si elle existe, de tan n / n. Supposons L $\neq$ 0.
Calculons tan(n+1)/(n+1) et passons à la limite quand n $\to \infty$:

$$\frac{\tan(n+1)}{n+1} = \underset{\searrow 0}{\frac{1}{n+1}} \times \frac{\underset{}{\frac{\tan n}{n}} \nearrow L + \frac{\tan 1}{n} \nearrow 0}{\underset{\searrow 0}{\frac{1}{n}} - \underset{\searrow L}{\frac{\tan n}{n}} \times \tan 1}$$

d'où $\lim \dfrac{\tan(n+1)}{n+1} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, si $\dfrac{\tan n}{n}$ a une limite, cette limite ne peut être que 0.

Cependant, pour quelques valeurs de n encore accessibles au domaine de validité de la calculatrice, on trouve quelques résultats pas très proches de zéro :

n	tan n	tan n/ n	
11	- 225,95	- 20,54	
33	- 75,31	- 2,282	
52 174	- 176 602	- 2,96	Suivant le type de calculatrice utilisée
	- 176 267	- 3,38	
	- 181 570	- 3,48	
	- 181 603	- 3,48	

Se pourrait-il que $\dfrac{\tan n}{n}$ ne convergeât pas vers 0 ?

Il nous a fallu, pour en avoir la preuve, nous plonger dans quelques revues dont le niveau mathématique est - légèrement - supérieur à celui habituel du PETIT VERT, et qui nous ont été envoyés par Annie **BOLOTTE**, alors membre du Comité national de l'APMEP, à la suite de notre pathétique appel à solutions !

S. **KARLAMOFF**, professeur de Mathématiques Supérieures à DOUAI, résolvait ce problème en 1982 [*Revue de Mathématiques Spéciales, 93^e^ année, n° 3, novembre 1982*].

Il y démontre que, pour une infinité de valeurs de n, $\dfrac{\tan n}{n} > \dfrac{\pi}{2}$. Ce qui invalide l'hypothèse que nous avions faite au départ, et prouve définitivement la non-existence d'une limite pour $u_n = \dfrac{\tan n}{n}$.

La démonstration de S. Karlamoff s'appuie sur les propriétés des fractions continues qui approchent un irrationnel χ :

On va montrer qu'il existe $D < 0$ tel que, pour une infinité de valeurs de $n \in \mathbf{N}^*$ on ait $|\tan n| > Dn$. On utilisera pour cela l'approximation de $\dfrac{\pi}{2}$ par fractions continues :

1°. Rappelons les résultats concernant l'approche par fractions continues d'un irrationnel ; soit $\chi \in \mathbf{R}$, $\chi \notin \mathbf{Q}$; il existe une suite $(p_k)_{k\in N}$ d'entiers relatifs et une suite $(q_k)_{k\in N}$ d'entiers naturels non nuls telles que :

(1) $(q_k)_{k\in N}$ diverge vers $+\infty$ en croissant strictement ;

(2) $\left|\chi - \dfrac{p_k}{q_k}\right| < \dfrac{1}{q_k^2}$

(3) $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$.

2°. La relation (3) ci-dessus prouve que $\forall k \in \mathbf{N}^*$, q_{k-1} et q_k sont premiers entre eux, donc qu'il existe une infinité d'indices k pour lesquels q_k est impair car, sinon, à partir d'un certain rang tous les q_k seraient pairs, ce qui contredit le fait que deux nombres q_k consécutifs sont premiers entre eux.

3°. Soit k ($k \in \mathbf{N}$) tel que q_k est impair. On a alors $\left|\chi - \dfrac{p_k}{q_k}\right| < \dfrac{1}{q_k^2}$, soit donc $|q_k\chi - p_k| < \dfrac{1}{q_k}$.

Plaçons-nous dans le cas qui nous intéresser, soit $\chi = \frac{\pi}{2}$. On a donc $\left|\frac{\pi q_k}{2} - p_k\right| < \frac{1}{q_k}$; q_k étant impair on en déduit que $|\tan p_k| > \left|\tan\left(q_k \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{q_k}\right)\right|$ est négatif si $p_k < q_k \frac{\pi}{2}$ et positif si $p_k > q_k \frac{\pi}{2}$, soit $|\tan p_k| > \cot\frac{1}{q_k}$.

Or $\cot\left(\frac{1}{q_k}\right) \approx q_k$ quand $k \to +\infty$. Donc pour $k \in$ **N**, suffisamment grand, tel que q_k soit impair, on a $|\tan p_k| > \frac{1}{2} q_k$, d'où $\frac{|\tan p_k|}{p_k} > \frac{1}{2}\frac{q_k}{p_k}$.

Or $\frac{p_k}{q_k} \to \frac{2}{\pi}$ quand $k \to +\infty$ donc pour $k \in$ **N**, suffisamment grand, tel que q_k soit impair, on a : $\frac{|\tan p_k|}{p_k} > \frac{1}{2\pi}$.

Conclusion : en combinant les résultats de (2) et (3) on voit bien qu'il existe une infinité d'entiers tels que $\frac{|\tan n|}{n} > \frac{1}{2\pi}$

Et notre problème est résolu.

Par curiosité, nous avons cherché à l'ordinateur la liste des premières valeurs de n vérifiant cette propriété. La voici (dans la limite de la fiabilité de la machine) ; on pourra remarquer la curieuse distribution de ces nombres :

n	$\frac{\lvert\tan n\rvert}{n}$	n	$\frac{\lvert\tan n\rvert}{n}$	n	$\frac{\lvert\tan n\rvert}{n}$
1	1,5574	322	0,2344	52 884	0,2870
2	1,0925	344	0,6613	53 239	0,1958
4	0,2895	366	0,6132	156 167	0,4548
5	0,6761	388	0,1937	156 522	0,3830
8	0,8500	699	0,3277	260 515	1,0063
11	**20,5410**	721	0,3092	364 863	0,3099
14	0,5175	1 054	0,2188	468 856	0,1838
17	0,2055	1 076	0,2058	573 204	0,5281
30	0,2135	1 409	0,1649	idem	[5,936 sur HP27S]
33	2,2822	50 754	0,1712	781 545	0,1604
36	0,2153	51 109	0,2302	885 893	0,2790
55	0,8215	51 464	0,3540	1 094 234	0,1750
77	0,4191	51 819	0,7783	1 406 293	0,1863
99	0,2535	52 174	2,9632	1 719 612	0,1760
121	0,1696	52 529	0,5312	idem	[0,6596 sur HP27S]

■

SOMMAIRE

LE PETIT VERT n° 26
(BULLETIN DE LA REGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N° CPPAP 2 814 D 73 S. N° ISSN 0760-9825. Dépôt légal : 1991
Imprimé au siège de l'Association :
IREM (Faculté des Sciences), B.P. 239. 54506-VANDŒUVRE

Ce numéro a été tiré à 530 exemplaires

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 30 F

L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P. à jour de leur cotisation.

NOM :

ADRESSE :

Désire m'abonner pour 1 an (année civile) au PETIT VERT

Joindre règlement à l'ordre de APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)