

# LE PETIT VERT

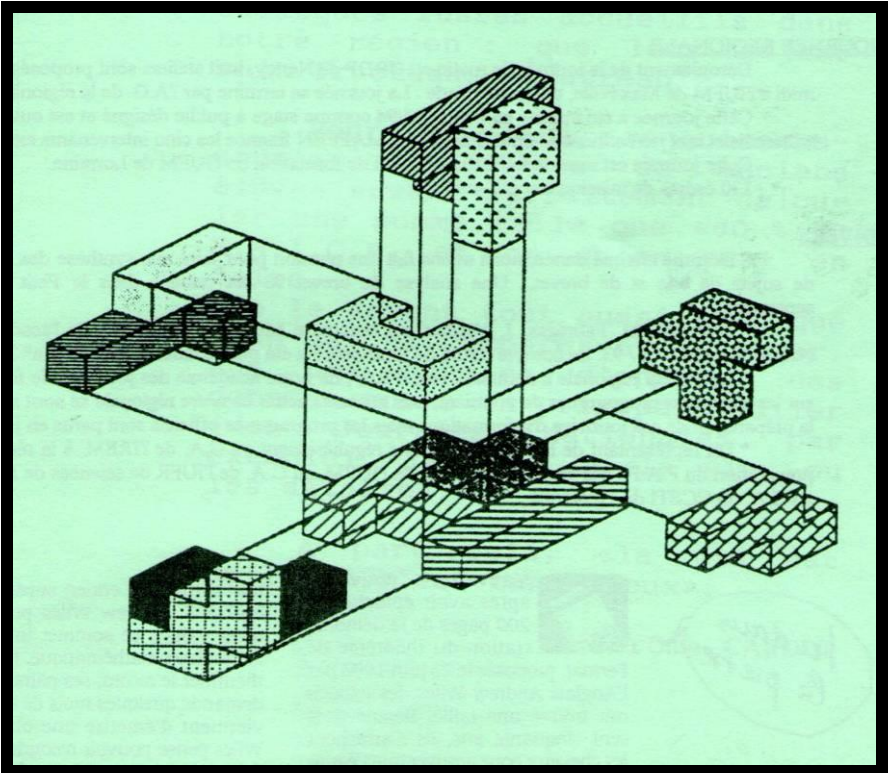
ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 37

MARS 1994

Abonnement  
4 n<sup>os</sup> par an : 30 F



## ASSEMBLÉE GÉNÉRALE ANNUELLE DU 24/11/93 A L'IUFM DE MAXÉVILLE.

### BILAN D'ACTIVITÉS 1993

La dernière Assemblée Générale a eu lieu le 02 /12 / 92 à Villers-Lès-Nancy.

#### RALLYE DE MATHÉMATIQUES DE LORRAINE

Pour la troisième année consécutive le Rallye a été organisé en collaboration avec le CCSTI de Thionville.

Le groupe "Rallye" prépare une nouvelle plaquette. Cette dernière sera envoyée à tous les participants du Rallye, à tous les collèges ainsi qu'à tous les adhérents APMEP lorrains.

#### BIBLIOTHEQUE DE PRET PAR CORRESPONDANCE

Actuellement, 28 ouvrages sont disponibles. La liste est paru dans le Petit Vert n° 33. Les lecteurs les plus fidèles sont les membres du comité régional.

#### PUBLICATIONS

- ★ Le Petit Vert paraît régulièrement: 4 numéros par an. Le rédacteur en chef est Jacques Verdier. Il est imprimé à l'IREM et mis sous enveloppe par une équipe nancéienne.
- ★ Les deux brochures publiées par notre régionale continuent à se vendre.
- ★ Une plaquette a été réalisée conjointement avec l'IREM de Lorraine, contenant les montages des différents BOEN concernant les programmes de première pour 93-94.

#### JOURNEE RÉGIONALE

Déroulement de la journée : le matin au CRDP de Nancy, huit ateliers sont proposés ; l'après-midi à l'IUFM de Maxéville, une table ronde. La journée se termine par l'A G. de la régionale. Cette journée a été inscrite au P.A.F. 93/94 comme stage à public désigné et est ouverte aux adhérents et aux non adhérents de l'APMEP. La MAFPEN finance les cinq intervenants extérieurs.

Cette journée est aussi inscrite dans le plan de formation de l'IUFM de Lorraine. 130 ordres de mission ont été envoyés.

#### DIVERS

- ★ Comme chaque année, nous avons fait une réunion pour faire une synthèse des analyses de sujets de bac et de brevet. Une analyse du brevet 93 est publiée dans le Petit Vert de septembre.
- ★ J. Euriat, M. Fabrégas, J. Verdier ont rencontré Monsieur le Recteur de l'académie de Nancy-Metz le 2/2/93. Le compte rendu de l'audience a été publié dans le Petit Vert n° 33.
- ★ L'APMEP régionale a demandé aux IPR/IA de notre académie des journées de formation sur les nouveaux programmes de première. Des militants actifs de notre régionale se sont investis à la préparation de ces journées d'informations mais les programmes officiels sont parus en juin 93...
- ★ Un représentant de la régionale assiste régulièrement au C.A. de l'IREM, à la réunion de préparation du P.A.F., à la commission math de l'IUFM, au C.A. de l'IUFR de sciences de Nancy 1, au C.A. du CCSTI de Thionville.

---

#### LU DANS LA PRESSE

Mauvaise nouvelle : après avoir épluché les 200 pages de la démonstration du théorème de Fermat, proposée le 23 juin 1993 par l'Anglais Andrew Wiles, les experts ont trouvé une faille. Depuis trois cent cinquante ans, ils s'attachent les cheveux pour prouver que l'équation  $x^n + y^n = z^n$  ne marche pas pour tout n (nombre entier)

supérieur ou égal à 3. Andrew Wiles prétendait avoir vaincu ce sommet inviolé de l'Himalaya mathématique. Pour authentifier le record, ses pairs avaient demandé quelques mois de délai, ils viennent d'émettre une objection. Wiles pense pouvoir résoudre la difficulté dans un avenir proche.

## Добро пожаловать во Францию

Tout d'abord, bienvenue aux collègues russes accueillis dans notre région : que leur séjour soit fructueux et agréable...

Pour le reste, réjouissons-nous : nos élèves et anciens élèves savent parfaitement calculer une somme telle que « 80% du S.M.I.C. », et ce qu'on peut en faire.

Ils le savent tout aussi bien que nous savons comparer et intégrer, sur une dizaine d'années, des données comme un prix particulier (des Journées Nationales par exemple), le coût de la vie, ou les salaires...

A part cela, « la vie est belle et c'est tant mieux ».

Jérôme CARDOT

# MANIPULER EN MATHEMATIQUES

Compte-rendu de l'atelier  
proposé à la journée régionale  
de 24/11/93, par F. DROUIN.

La plupart du temps, dans nos classes, l'activité mathématique se fait mentalement, oralement ou par écrit. Cet atelier voulait montrer que le toucher pouvait également intervenir dans la compréhension de certaines notions.

Le programme de collège nous parle d'images mentales : des petits carrés, des cubes, ainsi que des "Rep-figures" (1) permettent de visualiser des notions d'aires et de volumes. Il est difficile de parler d'arête et de sommet d'un cube sans avoir entre les mains un tel solide.

A propos des transformations géométriques, le programme parle de travail expérimental. La manipulation de pièces de puzzle comme l'excellent puzzle à trois pièces cité dans (2) permet de réellement déplacer triangles et autres polygones. L'aspect "corporel" présent dans ce type de travail étonne beaucoup d'élèves.

Un puzzle ne démontre pas toujours mais permet de vérifier une propriété (les puzzles de Pythagore, par exemple, bien que la plupart puissent effectivement être justifiés par des propriétés géométriques simples).

Des casse-tête comme le cube SOMA (1), les COMBIS (3) ou les carrés de Mac-Mahon (2) sont le départ de nombreuses activités mathématiques. Les "règles du jeu", faciles à assimiler, permettent un démarrage rapide du processus de recherche.

Un pied à coulisse en bois, une balance, divers instruments de mesure permettent d'établir un lien avec les sciences physiques si cruellement absentes en sixième et cinquième. L'aspect "sciences expérimentales" de certaines manipulations permet de rendre concrètes certaines notions : hauteurs, aires, volumes, médianes des triangles...).

Un dernière remarque concernant mon expérience personnelle : tous mes élèves, à un moment ou à un autre, ont besoin de toucher et de manipuler. Alors pourquoi les en priver ?

(1) JEUX III. Publication A.P.M.E.P.

(2) JEUX I. Publication A.P.M.E.P.

(3) LUDI-MATH 1. Publication de la régionale de Poitiers

# COÛT DES JOURNEES

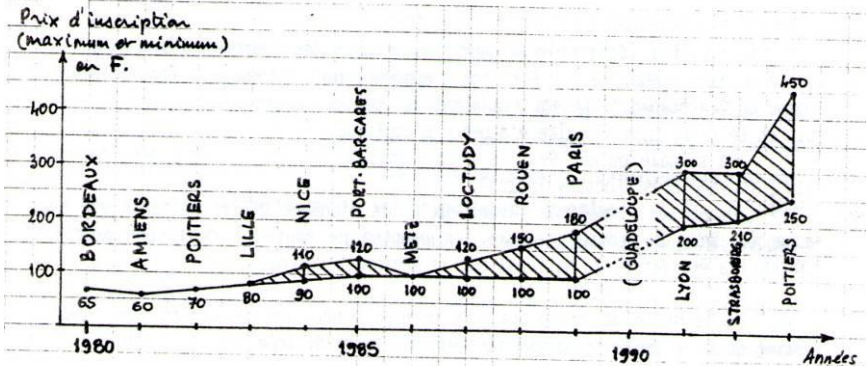
Le Comité de la Régionale a écrit au Comité National du 29/01/94 le texte suivant :

Pendant 10 années consécutives, le "prix de base" de l'inscription aux Journées Nationales n'a pas dépassé 100 F (jusqu'en 1989 inclus).

La Régionale de Lyon a "inauguré" le taux d'inflation à 100% : le prix minimum d'inscription est passé à 200 F en 1991 (et encore, à condition de s'inscrire par Minitel, qui ne fonctionnait pas, et avant une certaine date).

La Régionale de Lorraine a alors voté et diffusé une motion de protestation ... qui est restée lettre morte : les organisateurs des Journées suivantes, au lieu de revenir à des pratiques plus raisonnables, n'ont cessé d'augmenter les prix, le record pour 1993 étant : minimum 250 F, maximum 450 F (suivant la date).

Le graphique ci-dessous illustre la variation du coût d'inscription aux Journées :



Les Lorrains sont traditionnellement nombreux à participer aux Journées Nationales : 42 inscrits à Lyon, 45 à Strasbourg, 46 à Poitiers, et une quarantaine à Loctudy-1987 (à 1000 km de chez eux !) ... Toutes les Régionales ne sont pas aussi "présentes".

N'oublions pas que ces adhérents paient intégralement leurs frais d'inscription, leurs frais de déplacement (1300 km A-R pour Poitiers) et leurs frais d'hébergement, sur leurs propres deniers.

Lorsque nous organisons, à Nancy, des Journées Régionales pour nos militants, il y a plus de 140 participants (pas de droits d'inscription, repas à 25 F...).

Nous ne voudrions pas que, pour des raisons financières, les Lorrains "boycottent" les Journées Nationales organisées par les autres Régionales au profit de journées organisées sur place.

C'est pourquoi nous demandons instamment au Comité National de faire en sorte que les coûts demandés aux participants des Journées Nationales ne soient pas exorbitants, et que cesse cette course inflationniste ... d'autant plus qu'elle n'est pas justifiée : nous trouvons inadmissible que les Régionales profitent des Journées pour empocher des bénéfices faramineux au détriment des militants.

Nous avons également demandé que ce texte paraisse dans le prochain B.G.V.

Le Comité National a décidé que cela n'était pas opportun. Voici quelques extraits de la réponse du président Jean-François NOEL :

(...) il fallait remarquer que le prix des Journées n'avait pas augmenté pendant 6 ans, ce qui fait que l'augmentation de Lyon peut être considérée comme un "rattrapage". Le tarif maximum de Poitiers était volontairement dissuasif et le tarif intermédiaire n'a pas été appliqué.

On signale qu'en 1994, le prix d'inscription des Journées sera ramené à 210 F (voyage Brest-Loctudy inclus).

Quant aux "bénéfices faramineux", ils risquent d'être moindres que ceux annoncés dans un premier temps : les comptes ne sont pas clos. Une somme de 20 000 F a été versée au National par la Régionale de Poitiers.

A la suite de ces différents points énoncés par le Comité, le Bureau a estimé qu'il ne pouvait pas publier tel quel votre article.

---

#### LU DANS LA PRESSE

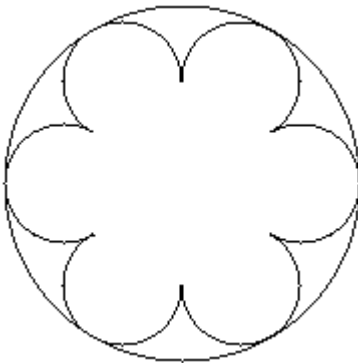
Record : David Slowinski et Paul Gage ont découvert, à l'aide d'un superordinateur Cray, un nouveau nombre premier, le plus grand connu à ce jour. En bon premier, ses 25S716 chiffres ne sont divisibles que par 1 et par lui-même. Pour connaître sa tête, il faut être patient et multiplier le chiffre 2 par lui-même 859 433 fois, puis retrancher 1. Les deux chercheurs ont fait tourner leur programme pendant sept heures et testé des millions de combinaisons avant de tomber dessus.

# Rosaces

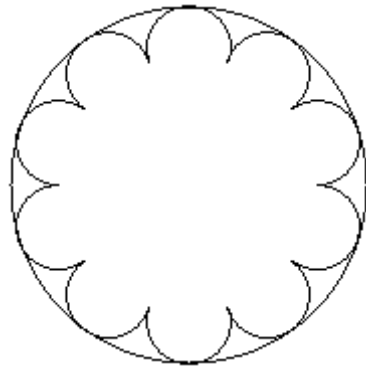
Bernard Parzysz, janvier 1994

Et de leurs yeux ouverts ils regardent sans voir  
La rose du vitrail toujours épanouie.  
J.M. de Hérédia

Un motif très fréquent dans la partie supérieure des verrières de la cathédrale Saint-Étienne de Metz –comme d’ailleurs de beaucoup d’édifices religieux gothiques– consiste en un type de rosace que l’on peut décrire ainsi : à l’intérieur d’un grand cercle se trouvent un certain nombre de petits cercles, tangents au grand cercle et tangents « successivement » entre eux. Ces petits cercles sont interrompus par un autre cercle, concentrique au grand (*fig. 1*), mais cette dernière caractéristique n’offre qu’un intérêt géométrique anecdotique, le véritable problème étant bien entendu le suivant : comment construire, à l’intérieur d’un cercle donné (à la règle et au compas, pour rester dans l’esprit du Moyen-Âge)  $n$  cercles ( $n \geq 2$ ) répondant aux conditions ci-dessus (*fig. 2*) ?



*fig. 1*



*fig. 2*

La première question qui se pose est celle de la construction des rayons du grand cercle (appelons-le  $\Gamma$ ) aboutissant aux points de contact successifs  $A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) avec les petits cercles  $\gamma_i$ . Construction qui est possible si – et seulement si – le polygone régulier  $A_1A_2\dots A_n$  est constructible à la règle et au compas. Cette condition équivaut à dire que  $\sin(\pi/n)$  est un nombre constructible, puisque en effet le côté du polygone régulier convexe à  $n$  côtés inscrit dans un cercle de rayon unité a pour longueur  $2 \cdot \sin(\pi/n)$ . Rappelons qu’un nombre réel  $x$  (strictement positif) est dit constructible si, étant donné les points A et B,

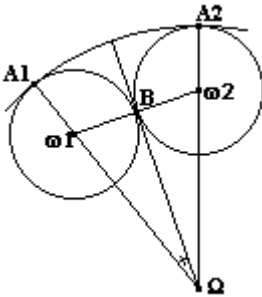
on peut construire à la règle et au compas le point M de (AB) d'abscisse x dans le repère (A ;  $\overrightarrow{AB}$ )<sup>1</sup>.

Ce point étant réglé, le problème devient maintenant : les  $n$  sommets du polygone régulier convexe  $A_1A_2\dots A_n$  étant placés sur le cercle  $\Gamma$  de centre  $\Omega$ , peut-on construire à la règle et au compas les petits cercles  $\gamma_i$  ?

Appelons respectivement  $R$  et  $r$  les rayons des cercles  $\Gamma$  et  $\gamma_i$ , et considérons la *fig. 3*. Le centre  $\omega_i$  du cercle  $\gamma_i$  est situé :

- d'une part sur le rayon  $[\Omega A_i]$  ;
- et d'autre part sur le cercle  $\Gamma'$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R' = R - r$ .

Le problème se ramène donc à la construction du cercle  $\Gamma'$ . Pour ce faire, calculons  $R'$  en fonction de  $R$  et de  $n$ .



*fig. 3*

Soit B le point de contact des cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . On a  $\sin(\pi/n) = \frac{\omega_1 B}{\omega_1 \Omega} = \frac{r}{R - r}$ .

$$\text{D'où } r = R \frac{\sin(\pi/n)}{1 + \sin(\pi/n)}.$$

$$\text{On en déduit } R' = R - r = \frac{R}{1 + \sin(\pi/n)}.$$

Or, le réel  $\frac{1}{1+x}$  est constructible si – et seulement si – le réel  $x$  l'est. En effet :

a) si  $x$  est constructible, on peut construire un segment de longueur  $\frac{1}{1+x}$  de la

façon suivante (*fig. 4*) : soit le point M d'abscisse  $x$  de la droite (AB) repérée par (B ;  $\overrightarrow{AB}$ ). On construit sur [AB] un carré ABCD, puis on mène par B la parallèle à (MD), qui coupe (AD) en I. Le segment [AI] a la longueur cherchée.

<sup>1</sup> Cf. par exemple Carrega, J.-C. (1981) : *Théorie des corps. La règle et le compas*. Éd. Hermann.



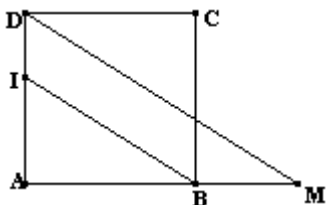


fig. 4

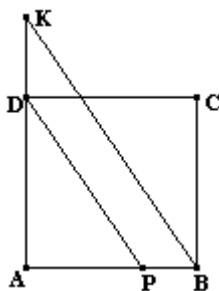


fig. 5

b) réciproquement, si  $y = \frac{1}{1+x}$  ( $y < 1$ ) est constructible,  $x = \frac{y}{1-y}$  l'est aussi,

par une construction analogue à la précédente (fig. 5) : soit le point P d'abscisse  $y$  de la droite (AB) repérée par (A ;  $\overrightarrow{AB}$ ). On construit sur [AB] un carré ABCD, puis on mène par B la parallèle à (DP), qui coupe (AD) en K. Le segment [DK] a la longueur cherchée.

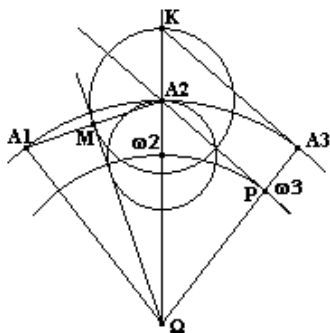
**Il résulte de ceci que  $R'$  – c'est-à-dire  $\Gamma'$  – est constructible dès lors que  $\sin(\pi/n)$  – c'est-à-dire  $A_1A_2\dots A_n$  – l'est.**

Voici une construction possible de  $\Gamma'$ .

1° Les points  $A_i$  étant placés sur le cercle  $\Gamma$ , on construit le milieu M de  $[A_1A_2]$  grâce à la bissectrice de  $\angle A_1\Omega A_2$ .

2° On trace le cercle de centre  $A_2$  passant par M, et donc tangent à  $(\Omega M)$ . La droite  $(\Omega A_2)$  coupe ce cercle en un point K extérieur au cercle  $\Gamma$ .

3° On mène par  $A_2$  la parallèle à  $(KA_3)$ , qui coupe  $[\Omega A_3]$  en un point P, lequel n'est autre que le point  $\omega_3$ . Le cercle  $\Gamma'$  est donc le cercle de centre  $\Omega$  passant par P (fig. 6).



*Justification.*

On a  $\angle A_1\Omega A_2 = 2\pi/n$ , d'où  $A_2K = MA_2 = R \cdot \sin(\pi/n)$ . On en déduit  $\Omega K = \Omega A_2 + A_2K = R(1 + \sin(\pi/n))$ .

Par Thalès,  $\frac{\Omega P}{\Omega A_3} = \frac{\Omega A_2}{\Omega K}$ , soit

$$\frac{\Omega P}{R} = \frac{R}{R(1 + \sin(\pi/n))}$$

D'où finalement  $\Omega P = \frac{R}{1 + \sin(\pi/n)} = R'$ .

fig. 6

À la cathédrale de Metz, on trouve des rosaces comportant 3, 4, 5, 6 et 8 cercles intérieurs (fig. 7). J'ignore par quel procédé précis elles ont été construites, mais ce qui précède montre que la construction d'une telle rosace à la règle et au compas est possible pour tout entier  $n$  tel que l'on puisse construire, avec ces mêmes instruments, le polygone régulier à  $n$  côtés.

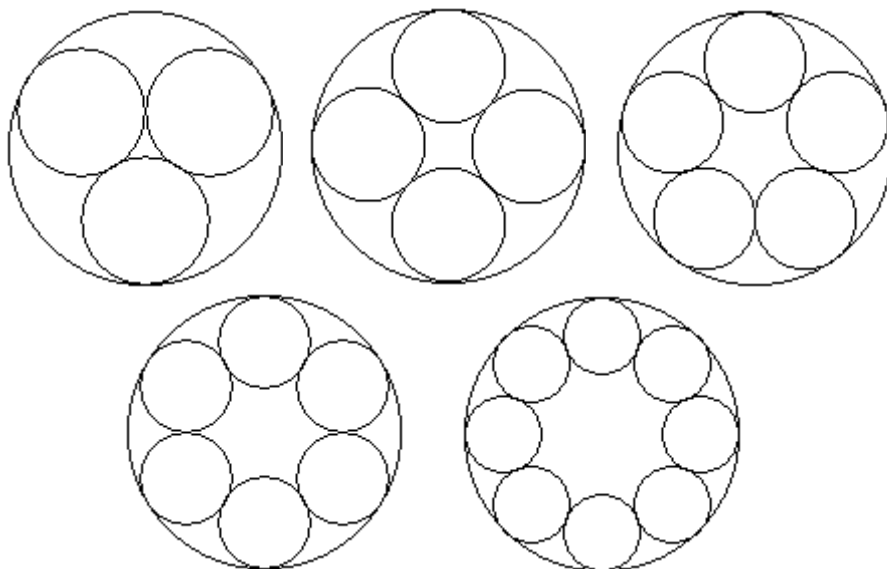


fig. 7

à suivre...

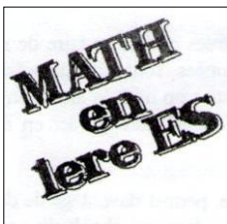


CE N'EST PAS LE CNP...  
CE N'EST PAS L'INSPECTION GÉNÉRALE ...  
ALORS ...  
**QUI A ÉCRIT LES PROGRAMMES?**



**N.D.L.R. (2010)**

**Le Petit Vert n°37 contenait 3 pages destinée à la commande de brochures. Nous ne les avons pas reproduites ici.**



## **AU PIED DU MUR... DONT ON A POSÉ QUELQUES PIERRES.**

Par Sylviane GASQUET

Fin novembre 93, me voici à la veille de rencontrer des enseignants qui, comme moi, mettent en œuvre le nouveau programme de mathématiques de la section Économique et Sociale. Bien sûr, il y a eu des "journées académiques", des rencontres "avant", mais voici les rencontres au vif du sujet ! Cette fois-ci, nous y sommes : ce mur que d'aucuns ont construit dans un lointain bureau de la rue du Bac (oui, oui... une telle adresse ne s'invente pas !), voilà qu'il nous faut l'escalader avec nos 35, voire 38 élèves, inquiets ou rieurs, intéressés ou plus souvent rebutés par leurs souvenirs mathématiques. Me voici donc professeur de première ES en train de "découvrir" les nouveaux programmes ! Car oui, travailler un programme avec des élèves, c'est vraiment le découvrir, même si on a - je dirai activement - contribué à son élaboration, et en particulier à la décision de proposer pour la première fois une formation du consommateur de chiffres..

### **UNE TENTATIVE DE BILAN**

#### **1. Une double conviction...**

- Il est utile, pour ne pas dire indispensable, de travailler la lecture de chiffres avec les élèves.
- L'image des mathématiques change pour les élèves : elles apparaissent comme une discipline qui aide à penser.

#### **...et des constats:**

a) Il y a des apprentissages de deux ordres : certains peuvent se traduire en *contenus*, d'autres sont en quelque sorte une *prise de recul sur ces contenus*. Et l'un ne devrait pas aller sans l'autre sous peine de perdre l'esprit du programme : former à la réception critique d'informations contenant des chiffres.

b) Il y a des contenus transversaux (les pourcentages) et des changements de cadres féconds (avec le calcul algébrique, avec le domaine des fonctions). La rédaction linéaire d'un texte de programme voile cela...

c) Enseigner cela n'est à coup sûr pas simple. Un travail d'observation et de recherche est nécessaire.

d) Une double formation des enseignants semble utile :

- ils doivent se constituer une culture personnelle (le document d'accompagnement du CRDP est une première approche que l'on peut compléter avec la bibliographie proposée),
  - et une formation pédagogique, car "faire cours" semble hors de propos ici.
- e) Le problème de l'évaluation de tels savoirs reste posé.

Nous allons détailler quelques points sur des exemples.

## **2. Redécouverte du calcul algébrique... et méthode des "exercices presque jumeaux !"**

Exercer l'élève à une réception critique des informations chiffrées peut-il se faire de manière méthodique ? Travailler sur des articles de presse dont les données sont insuffisantes (ou incohérentes) pour conclure, ne m'a pas semblé assez efficace, cela reste trop lié à la situation décrite dans chaque exemple. Les élèves ne peuvent pas déposer seuls le "décor" pour garder en eux une façon d'être, de réagir, dans un nouveau contexte.

La présentation d'exercices voisins, dont une seule donnée varie, permet davantage de dégager une méthode. D'autre part, les élèves préférant nettement travailler sur les données absolues, on peut les habituer à "nommer par une lettre" la ou les données souhaitées. Le calcul algébrique prend alors un autre visage... Il ne s'agit plus de modifier des écritures "pour rien" (factoriser, simplifier ...) mais de voir si la donnée, introduite en lettre pour le confort de la pensée, va s'éliminer ou pas des calculs. Si elle s'élimine, c'est donc qu'elle n'était pas nécessaire pour conclure, si au contraire elle demeure, c'est que les données du texte étaient insuffisantes... Par ailleurs, alors que le calcul numérique sur les données absolues ne laisse aucune trace de son passage puisqu'on effectue au fur et à mesure toutes les opérations, le calcul algébrique met en évidence la démarche de calcul...

### **Exemple :**

*Trois entreprises doivent acheter chaque mois des emballages de deux qualités différentes. Le prix des emballages ordinaires augmente de 10 % et celui des emballages luxe de 15 % Dans chaque cas, peut on trouver le pourcentage d'augmentation des frais d'emballage?*

*L'entreprise A achète des emballages ordinaires, et des emballages luxes coûtant 1 F de plus la pièce. Elle achète 100 emballages ordinaires et 200 emballages de luxe chaque jour.*

*L'entreprise B achète des emballages de luxe coûtant 30 % plus chers que les emballages ordinaires. Elle achète chaque jour 100 emballages de luxe de plus que des ordinaires.*

*L'entreprise C achète des emballages de luxe coûtant 30 % plus chers que les emballages ordinaires. Elle achète 2 fois plus d'emballages de luxe que d'emballages ordinaires.*

Notons  $e$  le prix de l'emballage ordinaire... et regardons le rapport  $\frac{\text{prix nouveau}}{\text{prix initial}}$  :

$$A) \frac{(100 \times 1,10e) + (200 \times 1,15(e+1))}{100e + 200(e+1)} = \frac{4,40e + 3,30}{3e+1} \dots \text{qui ne se simplifie pas.}$$

On ne peut pas conclure.

B) Pour B, on ne connaît pas la quantité d'emballages ordinaires : notons la  $q$

$$\frac{(e \times q \times 1,10) + (1,30e \times (q+100) \times 1,15)}{100e + 1,3(q+100)} = \dots \text{qui se simplifie par } e \text{ mais pas par } q$$

! On ne peut toujours pas conclure.

C) Ici cela va se simplifier par  $e$  et  $q$  : on peut conclure....

**d'où l'intérêt d'une donnée sous forme de rapport lorsque l'on travaille sur les pourcentages...**

Arriver à écrire le calcul de A) sous la forme  $1 + \frac{0,10 \times e + 0,15 \times 2(e+1)}{e + 2(e+1)}$  pour

voir que l'on pondère les augmentations d'après la part de chaque emballage dans la dépense totale (et que l'on peut prendre d'autres coefficients proportionnels) est un travail de longue haleine...

### **3. Exemple d'une difficulté à enseigner : la moyenne pondérée**

Si enseigner la pondération consiste à donner valeurs, coefficients et formule, alors il y a peu de problème. Les élèves savent en effet calculer une moyenne de notes à un examen. Mais il s'agit alors de coefficients décidés arbitrairement, donc d'une règle du jeu.

### a. Reconnaître le modèle.

Autre chose est de percevoir que dans certaines situations le modèle "moyenne sans coefficients" donne un nombre qui n'a pas d'interprétation légitime.

Dans une ville imaginaire, il y a les lycées suivants :

Nom du lycée	Nombre de candidats	Nombre de reçus	Taux de réussite
Dupont	50	40	80 %
Duparc	90	55	92 %
Duval	75	62	83 %
Dubois	75	65	87 %
Dutour	80	70	87 %
Dubuisson	400	180	45 %

Au vu de ces chiffres, un journaliste fait la moyenne des pourcentages et titre :

**Presque 80% de réussite au bac dans notre ville**

Qu'en pensez-vous? Rédiger sous forme d'article

Émilie, qui par ailleurs se révèle intéressée, curieuse, et souvent très subtile dit ne pas sentir pourquoi il faut pondérer pour faire la moyenne des pourcentages... Elle constate bien que le pourcentage obtenu par le rapport direct des données absolues total des reçus / total des candidats, soit 64 %, n'est pas la somme des pourcentages divisée par 6. Mais malgré cette discordance des résultats, elle ne voit pas pourquoi on ne peut pas faire ce calcul... L'incohérence des résultats ne la mène pas à rejeter l'un des modes de calcul.

Être bon consommateur de moyenne, c'est justement percevoir la nécessité de pondérer pour pouvoir dire si la moyenne que l'on reçoit dans une information est légitime ou non... C'est le problème de reconnaissance du modèle mathématique lié à la situation...

Et bien... je ne sais pas comment on fait percevoir cette nécessité de pondérer. Pour le moment, j'espère seulement qu'en rencontrant plusieurs situations, l'élève finira par "sentir" la chose... Je me retrouve comme à mes débuts de l'enseignement de la géométrie. Comment aider un élève à "trouver" alors même qu'il connaît ses théorèmes et les propriétés des figures. Mais ne pas encore savoir enseigner cela ne me semble pas disqualifier la conception du programme, au contraire ! Cela prouve seulement que c'est réellement difficile, et qu'étaient bien ridicules les premières réactions au projet de programme : "mais les pourcentages sont déjà faits au collège!"

## b. Mais avec quels coefficients?

On aurait tort de penser que comprendre qu'il faut pondérer implique nécessairement le choix de coefficients légitimes. Exemple :

*Le Ricoré est composé de 50 % de café et 50 % de chicorée. Si le prix du café augmente de 12 % et celui de la chicorée de 6%, de combien augmente le prix du mélange ?*

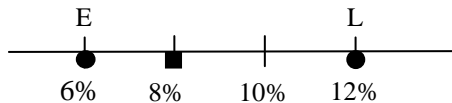
Qui n'a pas envie de répondre 9 %, utilisant ainsi les coefficients issus de la répartition en *volume* pour faire une moyenne de *prix* ? Dans l'exemple ci-dessus, les données sont insuffisantes pour conclure...

## 4. Tiens, si on pense au barycentre....

*Lui est augmenté de 12%, Elle de 6% et le revenu total du couple se retrouve de ce fait augmenté de 8%. Qui gagne le plus?*

Surprise chez les élèves: on ne connaît aucune donnée absolue et pourtant on peut les ordonner... On peut même dire leur rapport ! Peut se faire par le calcul algébrique, les salaires féminin ( $f$ ) et masculins ( $h$ ) se simplifient...

Mais avec les élèves de l'option, si on pense barycentre.... D'après la position du barycentre, combien "pèse" le salaire féminin dans l'ensemble du revenu du couple ? (voir schéma page suivante).



## 5. Tiens une fonction !... Découverte des limites....

*Lui gagne 3 000 F de plus qu'Elle... Lui est augmenté de 5 % et Elle de 15 %. De combien augmente le revenu total du couple ?*

Divers essais numériques montrent qu'on ne peut conclure : cela dépend du salaire féminin. Notons le  $f$ . Mais curieusement, il semble que l'augmentation du couple ne puisse dépasser 10 %, même avec des salaires très élevés, complètement fictifs ...

Penser en barycentre est alors assez "lumineux" ! Puisque *Lui* gagne plus qu'*Elle* de toute façon, son salaire pèse toujours un peu plus que celui d'*Elle* dans le total et donc le barycentre est entre les graduations 5 % et 10 %. Quand les salaires deviennent "très grands", la différence devient relativement faible et



les salaires sont « presque égaux »... Le barycentre s'approche du milieu, donc de la graduation 10 %.

Si on ne connaît pas le barycentre :

L'augmentation en pourcentage s'écrit  $\frac{0,20f + 150}{2f + 3000}$ . Que se passe-t-il quand  $f$

$\rightarrow \infty$  ?

Remarque : on peut faire étudier la fonction  $x \mapsto \frac{15x + 5(x+3)}{2x+3}$ , soit

$x \mapsto \frac{20x+15}{2x+3}$  si on compte les salaire en milliers de francs (habituel en économie) et si on prend les pourcentages "tels qu'ils se disent", c'est à dire 15 pour 15 %.

## Conclusion

**Difficile tout de même de dire qu'on ne fait pas de mathématiques dans un tel programme... Certes, enseigner cela n'est pas facile. Mais qui a dit qu'éduquer l'était ? Bien sûr, dresser à reproduire des techniques dont l'élève en général ne comprend pas le sens est plus aisé.**

**Le rééquilibrage des séries passe par le respect dû à tous les élèves : le droit d'apprendre à penser plutôt qu'à appliquer.**

**A nous les enseignants d'oser cette exigence...**

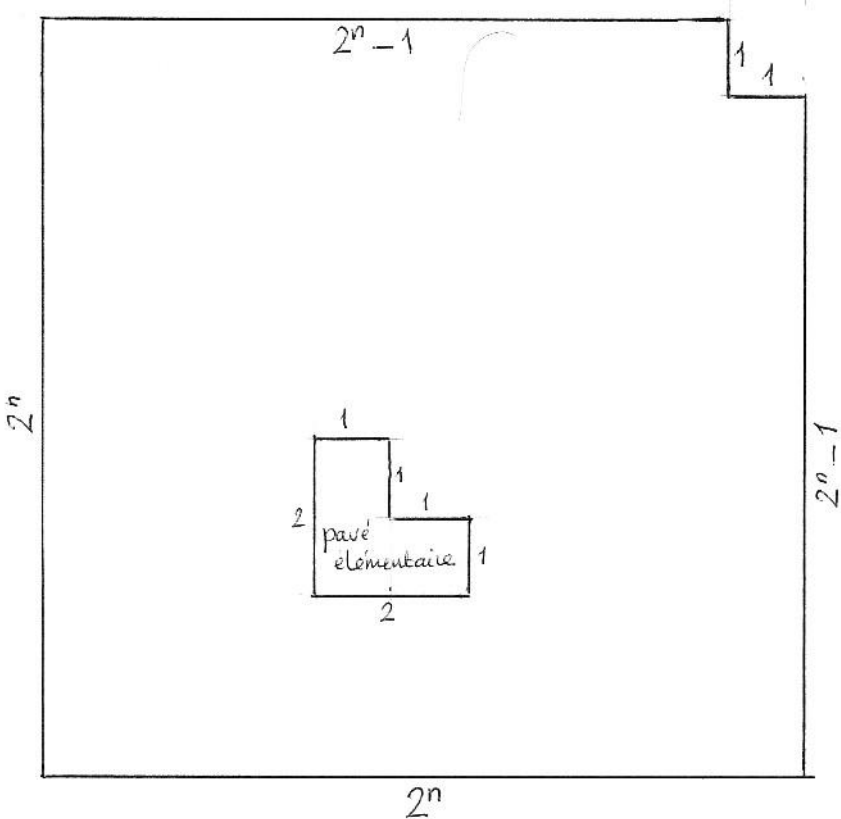
Sylviane GASQUET

Le 25 novembre 1993, en revenant de la journée régionale lorraine APMEP

## Solution du problème n°36 (PETIT VERT de décembre 1993)

proposé par Serge PETIT (SÉLESTAT)

Les pavés élémentaires sont des « carrés écornés » (ou « triminos ») représentés ci-dessous. La surface à paver est le « carré écorné » représenté ci-dessous. Est-il possible de paver exactement cette surface avec les pavés élémentaires, et ceci pour tout entier  $n$  non nul ?



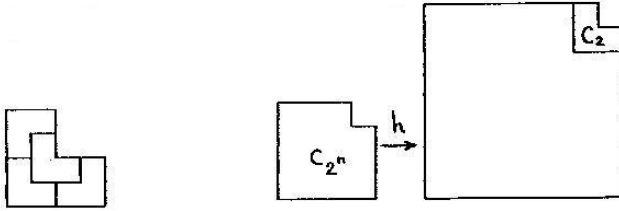
Pour ce problème, nous avons reçu des solutions de: Jérôme **CARDOT** (SAINT-MIHIEL) Jean **LAMBERT** (SAINT-MAX), Claude **PAGANO** (LA SEYNE-SUR-MER), Denis **PÉPIN** (VERDUN) et André **VIRICEL** (VILLERS-LES-NANCY).

Ces solutions, faisant appel à une récurrence, sont de deux types.

N.B. Nous noterons  $C_k$  le pavé obtenu en « écornant » d'un carré unité un carré de côté  $k$  ( $k$  entier naturel au moins égal à 2) ; le pavé élémentaire est donc  $C_2$ .

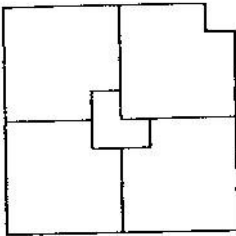
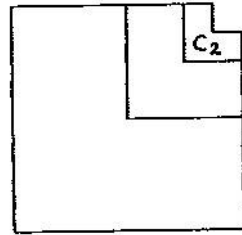
**Premier type** : il consiste à considérer que  $C_2^{n+1}$  est obtenu en adjoignant  $C_2$  à un homothétique de  $C_2^n$  dans le rapport 2 (voir ci-dessous).

Par ailleurs, l'homothétique de  $C_2$  est pavable à l'aide de quatre  $C_2$  :



Ceci prouve que, si  $C_{2^n}$  est pavable par  $C_2$ , il en est de même de  $C_{2^{n+1}}$ . Dans une variante de ce type, on considère  $C_{2^n}$  comme une juxtaposition de  $C_2$  et de ses homothétiques dans des homothéties de rapport  $2^k$ , pour  $k$  compris

**Second type** : on considère cette fois que  $C_{2^{n+1}}$  résulte de l'assemblage de quatre  $C_{2^n}$  auxquels on a adjoint  $C_2$  « central », ce qui prouve également que, si  $C_{2^n}$  est pavable par  $C_2$ , il en est de même de  $C_{2^{n+1}}$  :



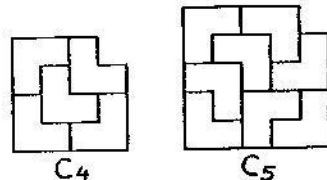
La plupart des correspondants ont proposé des **prolongements** à ce problème :

1) Extension à  $C_k$ , où  $k$  est un entier naturel quelconque ( $k \geq 2$ ), et non plus nécessairement une puissance de 2 (J. CARDOT, C. PAGANO). En voici une démonstration :

Une condition nécessaire est que l'aire de  $C_k$  (soit  $k^2-1$ ) soit un multiple de celle de  $C_2$  (soit 3). C'est-à-dire  $k^2 = 1 \pmod{3}$ , ou encore  $k = \pm 1 \pmod{3}$ . Mais cette condition est-elle suffisante ?

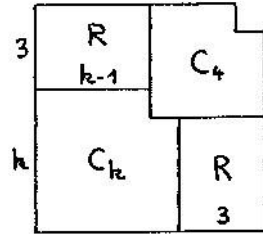
On vérifie sans peine que, d'après le célèbre théorème de La Palice,  $C_2$  est pavable à l'aide de  $C_2$ ; il en est de même de  $C_4$  et  $C_5$  :

Il suffit donc de montrer que, si  $C_k$  est pavable à l'aide de  $C_2$ , il en est de même de  $C_{k+3}$ .

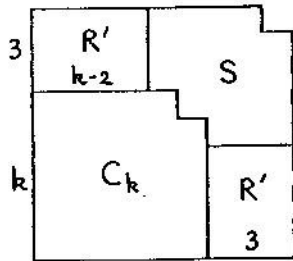


Distinguons deux cas, selon la parité de  $k$  :

a) si  $k$  est impair : décomposons  $C_{k+3}$ , comme indiqué sur la figure ci-dessous, en quatre surfaces :  $C_k$ ,  $C_4$ , et deux rectangles  $R$  de  $3 \times (k-1)$ . L'entier  $k-1$  étant pair, chaque rectangle  $R$  se décompose en  $(k-1)/2$  rectangles de  $3 \times 2$ . Chacun de ceux-ci étant évidemment pavable par  $C_2$  (deux pavés  $C_2$  placés tête-bêche), il en est de même des rectangles  $R$ . D'autre part,  $C_4$  et  $C_5$  sont eux aussi pavables par  $C_2$  d'où il s'ensuit que  $C_{k+3}$  est pavable exactement par  $C_2$ .



b) si  $k$  est pair : décomposons  $C_{k+3}$ , comme indiqué sur la figure ci-après, en quatre surfaces:  $C_k$ , deux rectangles  $R'$  de  $3 \times (k-2)$ , et une surface  $S$ . L'entier  $k-2$  étant pair, chaque rectangle  $R'$  se décompose en  $(k-2)/2$  rectangles de  $3 \times 2$ , et est donc pavable par  $C_2$ . Enfin, on reconnaît dans la surface  $S$  le pavé  $C_5$ , amputé (en bas à gauche) d'un pavé  $C_2$ , ce qui montre qu'elle est pavable par  $C_2$  :

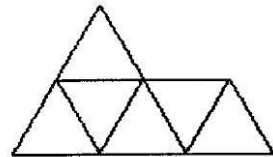


Donc, dans ce cas également  $C_{k+3}$  est pavable exactement à l'aide de  $C_2$ .

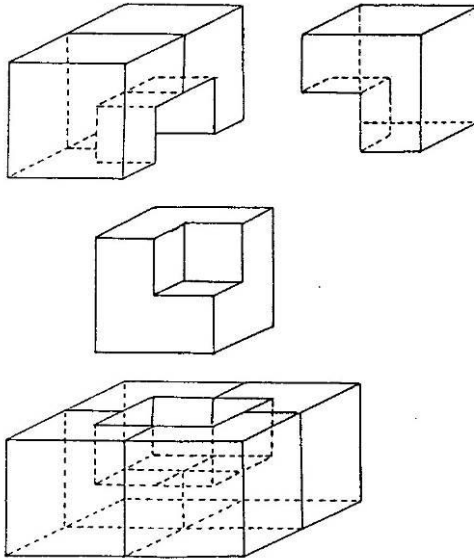
En définitive, la condition  $k \equiv \pm 1 \pmod{3}$  est nécessaire et suffisante, et l'on peut conclure :  **$C_k$  est pavable exactement à l'aide de  $C_2$  si, et seulement si,  $k$  n'est pas multiple de 3.**

2) J. CARDOT envisage également le cas où le « trou » du carré  $C_k$  ne se trouve plus forcément dans un angle, mais n'importe où dans le carré. Il démontre que le pavage par  $C_2$  est possible dès que  $k$  est différent de 5 et non multiple de 3.

3) J. LAMBERT propose un problème voisin, ayant pour figure de base un « sphinx ». Soit  $S_1$  ce sphinx et  $S_n$  le sphinx homothétique dans le rapport  $n$ . Démontrer que l'on peut paver  $S_n$  avec  $S_1$  :



4) Enfin, certains autres envisagent **l'extension à l'espace**, avec des « cubes écornés » (J. CARDOT, A. VIRICEL). La figure ci-dessous illustre l'adaptation, en dimension 3, de la seconde méthode utilisée dans le plan. Elle montre qu'avec neuf cubes écornés  $K_2^1$  on peut paver un  $K_2^2$  ; il suffit ensuite de généraliser :



*(On ajoute, pour terminer, un neuvième  $K_2$  à l'avant dans le coin supérieur droit)*

En conclusion on voit que, si les réponses ont été peu nombreuses, elles ont néanmoins permis d'élargir le problème dans des directions variées. Merci à tous !

*Nous avons eu connaissance en dernière minute d des projets de programme de la « spécialité » mathématique de terminale S. Nous les soumettons à discussion :*

## ANALYSE

### MATIERE

Désintégrale d'une fonction continue sur un intervalle  $(a,b)$ .  
Définition de la désintégration de fonctions.  
Propriétés immédiates : additivité et linéarité.

Théorème de Rolle et théorème de Roquette-Rolle.

Cas simples de calcul de désintégrales : recherche de désintégrales immédiates, désintégration par décomposition.  
Applications nombreuses et variées de la désintégration au calcul d'aires et de volumes désorientés.

### COMMENTAIRES

Cette partie du programme doit impérativement être exposée par un professeur DESS (désagrégé par l'enseignement secondaire du degré supérieur).

La considération des aires désorientées peut servir de support à la désintégration de la notion de désintégrale d'une fonction continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

La désintégration des fonctions est, c'est bien connu, l'opération inverse de l'intégration. Si  $f$  est une fonction, sa désintégrante, notée  $\mathcal{F}f$  est une fonction sur le même domaine.

On établira les résultats suivants :

si  $f$  est définie sur un intervalle borné fermé  $[a,b]$ , et si  $f(a) = f(b)$ , alors il existe  $c \in ]a,b[$  tel que  $\mathcal{F}f = 0$  (Théorème de Rolle); plus généralement, si  $f(a) \neq f(b)$ , alors il existe un point  $c \in ]a,b[$  tel que  $\mathcal{F}f(c) = f(a) - f(b)/(b-a)$  (théorème de Roquette-Rolle).

On fera comprendre le sens de ces théorèmes notamment à l'aide d'exercices numériques facilités par l'usage vivement conseillé du boulier compteur.

Dans le calcul des désintégrales, on veillera à être très modeste ; il est donc exclu de se livrer à une pratique intensive de ce calcul en vue de la maîtrise des techniques de désintégration.

Pour ce qui est du calcul des aires désorientées, on observera soigneusement les réactions des élèves pour se borner aux cas où leurs visages n'expriment pas un air désorienté.

## ALGORITHMIQUE NUMERIQUE

Suite aux mesures d'économies décidées au conclave de Val-Duchesse, on recommande aux professeurs de ne plus utiliser les machines à calculer programmables et les micro-ordinateurs, étant donné la dépense d'énergie que leur emploi nécessite. Le boulier compteur, à la fois d'un emploi très simple, d'un entretien des plus faciles et d'une consommation minime nous apparaît comme le calculateur du prochain millénaire. Cette petite merveille de dépouillement et d'efficacité peut résoudre des problèmes de tout ordre et enrichir considérablement les activités mathématiques de nos élèves. De plus, son emploi constitue un excellent exercice pour les articulations des doigts.

Le boulier compteur étant tombé dans l'oubli ces dernières années, nous croyons utile d'en rappeler quelques grands principes afin de ne laisser subsister dans votre esprit aucun doute sur les usages multiples (et parfois insoupçonnés) de ce remarquable petit calculateur.

### INITIALISATION

Le boulier-compteur est prêt à fonctionner lorsqu'il est initialisé. L'initialisation s'effectue en maintenant fermement le montant gauche de la main gauche (du pied droit, c'est nettement plus difficile) et en soulevant le montant droit de la main droite à une hauteur supérieure à celle de la main gauche (hauteur déterminée en fonction des capacités physiques de l'utilisateur).

### OPÉRATIONS SIMPLES

Ces opérations ne sont possibles qu'avec des nombres entiers naturels.

*Addition + :* Chaque compute-élément, encore appelé "boule" (terminologie simpliste que nous utiliserons dorénavant car elle est susceptible d'être comprise par tous) représente une unité. L'addition se fait en glissant de gauche à droite autant de boules que l'on souhaite ajouter d'unités. Chaque fois que l'on atteindra la capacité maximale d'un axe-stuppport (ici, la terminologie simpliste de "tige" sera employée), on glissera les unités de droite à gauche et on introduira une unité sur la tige immédiatement supérieure.

P.C.C. : bulletin de l'association belge  
des professeurs de mathématiques

**Problème du trimestre n°37 (mars 1994)**  
proposé par Jacques VERDIER

***Construction d'une mosquée.***

Connaissant la longitude et la latitude de NANCY (6° est et 49° nord, à 1° près) et celles de LA MECQUE (40° est et 22° nord), comment doit-on construire une mosquée de façon à bien orienter le mihrab vers La Mecque (en d'autres termes, quel angle doit-il faire avec le méridien local) ?

La figure ci-contre illustre le problème : on cherche la valeur de l'angle  $\alpha$ .



Envoyez vos solutions à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ, ainsi que toute proposition de problème pour les numéros ultérieurs.

**ANNONCE**

Je désirerais mettre en place à l'IREM, pour l'année 1994/95, un groupe de recherche sur le thème « NOUVEAUX OBJECTIFS D'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE, EN PRENANT APPUI SUR LES CALCULATRICES GRAPHIQUES ».

Il faudrait que tous ceux qui sont intéressés par ce travail de recherche (et de production de documents) me contactent, ou contactent l'IREM, et aussi qu'ils s'inscrivent au stage MAFPEN « Impact des calculatrices sur les maths au lycée » qui va paraître au prochain PAF, et qui servira de "tremplin" pour le démarrage du groupe.

Jacques VERDIER

# SOMMAIRE

Bilan d'activités 1993 .....	2
Editorial (Jérôme Cardot) .....	3
Manipuler en math (François Drouin) .....	4
Coût des Journées nationales .....	5
ROSACES (Bernard Parzysz) .....	7
Qui a écrit les programmes ? .....	11
MATHS en 1 <sup>e</sup> ES (Sylviane Gasquet) ....	12
Solution du problème n° 36 .....	18
Dernière minute : programmes de spécialité .....	22
Problème du trimestre n° 37 .....	23

## LE PETIT VERT n° 37

(BULLETIN DE LA REGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N° CPPAP 2 814 D 73 S. N° ISSN 0760-9825. Dépôt legal : 1994

Imprimé au siège de l'Association :

IREM (Faculté des Sciences), B.P. 239. 54506-VANDŒUVRE

Ce numéro a été tiré à 500 exemplaires

## ABONNEMENT (4 numéros par an) : 30 F

L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P.  
à jour de leur cotisation.

NOM :

ADRESSE :

Désire m'abonner pour 1 an (année civile) au PETIT VERT

Joindre règlement à l'ordre de APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)