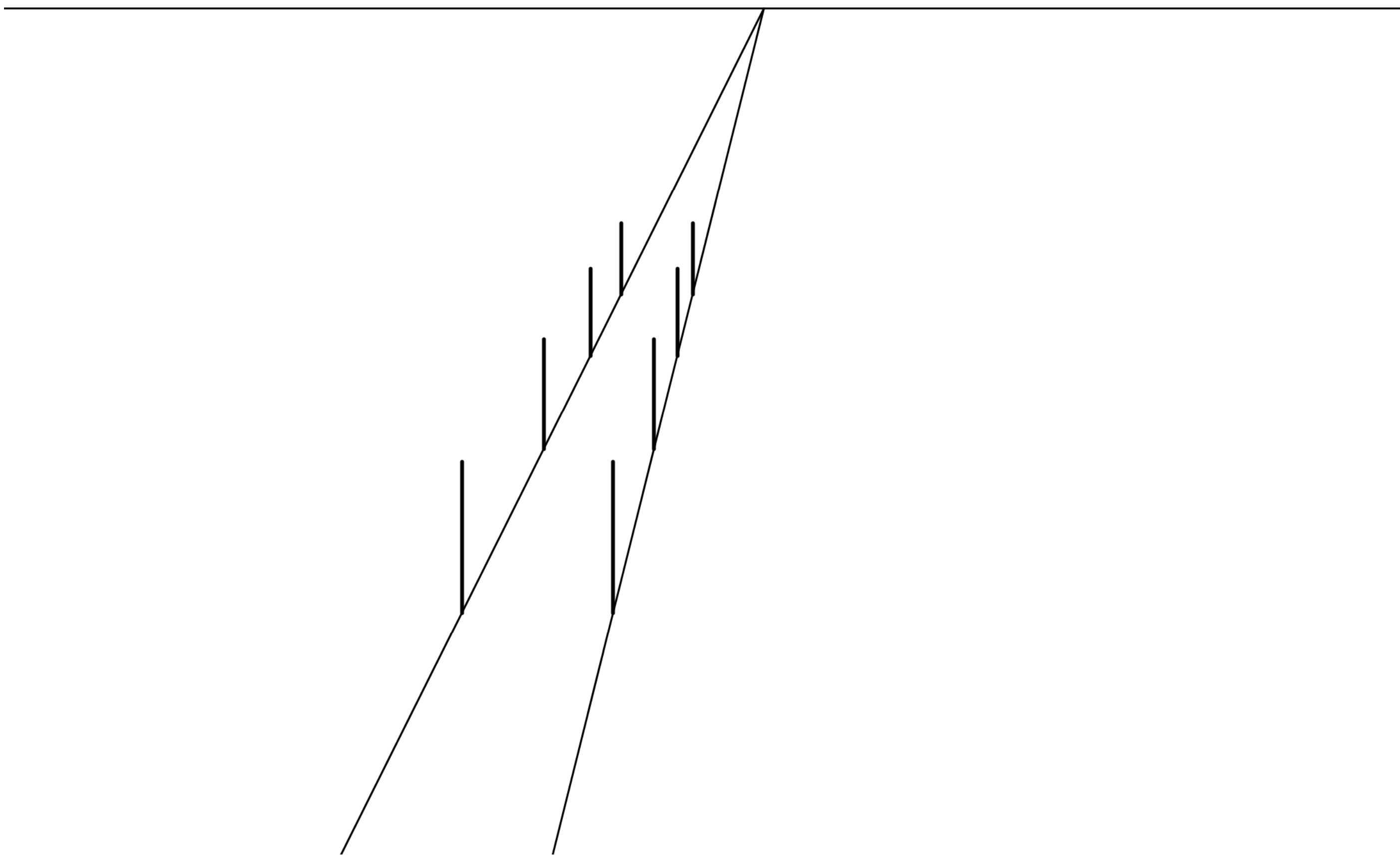
Rallye Mathématique de Lorraine 2009 – Feuille réponse

Collège – Lycée : ……………………………..…………Classe de ………

1– Le 2009è coup de l'année a résonné le 13 janvier à 22 heures

2–



3– Plusieurs parcours possibles, par exemple :

1	2	3	4	5
14	15	16	17	6
13	20	19	18	7
12	11	10	9	8

Parcours n°1 : 1 14 13 12 11 20 15 16 17 6 7 8 9 10
Parcours n°2 : 1 14 15 2 3 16 17 6 7 18 19 20 11 10
Parcours n°3 : 1 2 15 14 13 20 19 18 17 6 7 8 9 10
Parcours n°4 : 1 14 15 20 19 16 3 4 17 6 7 18 9 10
et il en existe encore d'autres !!!

4– L'aire de la pièce n°1 est : $\frac{1}{12}$

L'aire de la pièce n°2 est : $\frac{1}{24}$

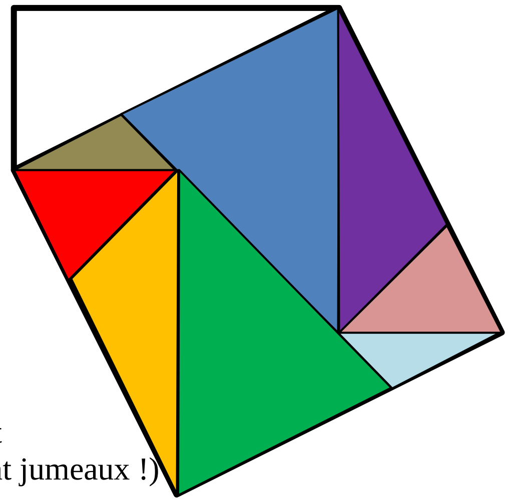
L'aire de la pièce n°3 est : $\frac{1}{12}$

5– Collez au dos de cette fiche-réponse votre rectangle.

	(	7	x	+	4	$)^2$		=		4	9	x^2	+	5	6	x	+	1	6
	4	9	x^2	-	5	6	x	+	1	6		=		(	7	x	-	4	$)^2$
4	9	x^2	-	1	6	=	(	7	x	+	4	)	$\times$	(	7	x	-	4	)

6– L'aire a été divisée par : $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \approx 1{,}587$

7– Reconstituez le puzzle dans le carré ci-contre.



8– Le père avait 34 ans à la naissance de son premier enfant
et 34 ans à la naissance du second. (Les deux enfants sont jumeaux !)

9– Complétez les phrases par : dans les buts – en défense – au milieu de terrain – en attaque.

Olga joue : en attaque
Laurence joue : dans les buts
Stéphanie joue : au milieu de terrain
Anaïs joue : en défense

10– On peut écrire 44 nombres différents. (48 accepté en raison de l'expression « mille millions ») (Pour les détails, voir fichier exercice 10 en annexe)

Question subsidiaire :

Rédaction de la classe de seconde gagnante :

« Les probabilités que l'agneau rencontre le loup sont de 6 chances sur 16, alors que celles de l'agneau sont de 10 sur 16. Sachant que les possibilités de rencontre sont de 6 et de s'échapper de 10, alors l'agneau est avantagé. Mais le loup gagne 2 € s'il gagne tandis que si l'agneau gagne, il reçoit 1 €.

Or $6 \times 2 = 12$ et $10 \times 1 = 10$.

Alors le loup est avantagé, non pas par ses chances d'attraper l'agneau, mais par la somme encourue s'il gagne. »

Voici une solution plus détaillée :

On remarquera au préalable qu'avec un dé, il y exactement une chance sur deux d'avoir un nombre pair, et une chance sur deux d'avoir un nombre impair (c'est comme si on tirait à pile ou face).

Tout d'abord, proposition d'un codage des 9 cases du quadrillage (qui sera utilisé dans toute la suite) :

	X	Y	Z
1			
2			
3			

L'agneau est au départ sur la case X3, et le loup sur la case Z1 ; c'est l'agneau qui joue en premier.

On peut remarquer que dès que l'un des protagonistes a dépassé la diagonale, l'agneau est « sauvé », et que le loup ne peut capturer l'agneau que sur cette diagonale, après qu'ils ont joué deux coups chacun. C'est donc à la fin du 2e coup joué par le loup (puisque c'est l'agneau qui commence) que l'on connaîtra l'issue de la partie.

Nous pouvons donc essayer de chercher tous les chemins différents possibles pour l'agneau, puis tous les chemins différents possibles pour le loup.

Au premier coup, l'agneau peut aller soit en Y3, soit en X2 (avec une chance sur deux chacun). Ensuite, d'Y3, l'agneau peut aller soit en Z3 soit en Y2 : et de X2 il peut aller soit en Y2 soit en X1.

Il y a donc quatre chemins possibles pour l'agneau (qui on la même « chance » de se produire, soir « une chance sur 4 pour chacun ») : notons-les Y3Z3, Y3Y2, X2Y2, X2X1.

Même raisonnement pour le loup, qui a quatre chemins possibles (une chance sur 4 chacun) : Y1X1, Y1Y2, Z2Y2 et Z2Z3.

Si l’on combine les quatre possibilités de l’agneau avec les quatre possibilités du loup, cela nous donne 16 déroulements possibles de la partie, que nous allons résumer dans ce tableau :

	Y3Z3	Y3Y2	X2Y2	X2X1
Y1X1				
Y1Y2				
Z2Y2				
Z2Z3				

En rouge, les parties où l’agneau capture le loup (la case d’arrivée est la même), en vert celles où l’agneau échappe au loup.
On constate que cette deuxième possibilité est beaucoup plus fréquente.
Il y a 6 chances sur 16 que le loup capture l’agneau (soit 3 chances sur 8), et 10 chances sur 16 que l’agneau en réchappe (soit 5 chances sur 8).

Il y a d’autres façons possibles pour coder le déroulement des parties (voir plus bas), mais cela ne changera rien à ce résultat.

Venons-en à la question « ***Ce jeu favorise-t-il l’un des joueurs ou pas ?*** ».
L’agneau a en effet plus de chances de gagner, mais quand il gagne il ne reçoit qu’un euro, tandis que le loup, lui, en reçoit deux s’il gagne.
Nous allons montrer que le jeu favorise le loup.

Il y a plusieurs façons de raisonner.
1°)
Le loup a 3 chances sur 8 de gagner 2 €. On pourrait dire qu’à chaque partie, il « espère » obtenir 3/8 de 2 €, soit 0,75 €.
L’agneau a 5 chances sur 8 de gagner 1 €. On pourrait dire qu’à chaque partie, il « espère » obtenir 5/8 de 1 €, soit 0,625 €.
Le loup est donc favorisé.
Ce raisonnement s’appelle le calcul de « l’espérance de gain ».

2°)
Imaginons que l’on joue un très grand nombre de parties (mettons 1000).
Grosso modo, le loup peut espérer en gagner approximativement 3 sur 8, soit environ 375 : il en tirera environ 750 €.
L’agneau peut espérer en gagner approximativement 5 sur 8, soit environ 625 : il en tirera environ 625 €.
Le loup est favorisé.
On peut remarquer que ce calcul correspond à celui du 1°) en multipliant par 1000, mais il peut être plus « parlant » à ce niveau.
Bien sûr il s’agit là d’un calcul de probabilités : il se peut que le loup gagne moins de 375 parties sur les 1000, mais pas énormément moins…

Autre façon de coder les différentes parties possibles :

On suit sur ce graphique en arbre les différentes parties possibles : 1er coup de l'agneau, 1er coup du loup, 1^{e} cou de l'agneau, 2^{e} coup du loup.
Il suffit de repérer les parties où le 2^{e} coup de l'agneau amène sur la même case que le 2^{e} coup du loup (en rouge), et les autres (en vert).