

Remue-ménages

14 apr. J.-C.

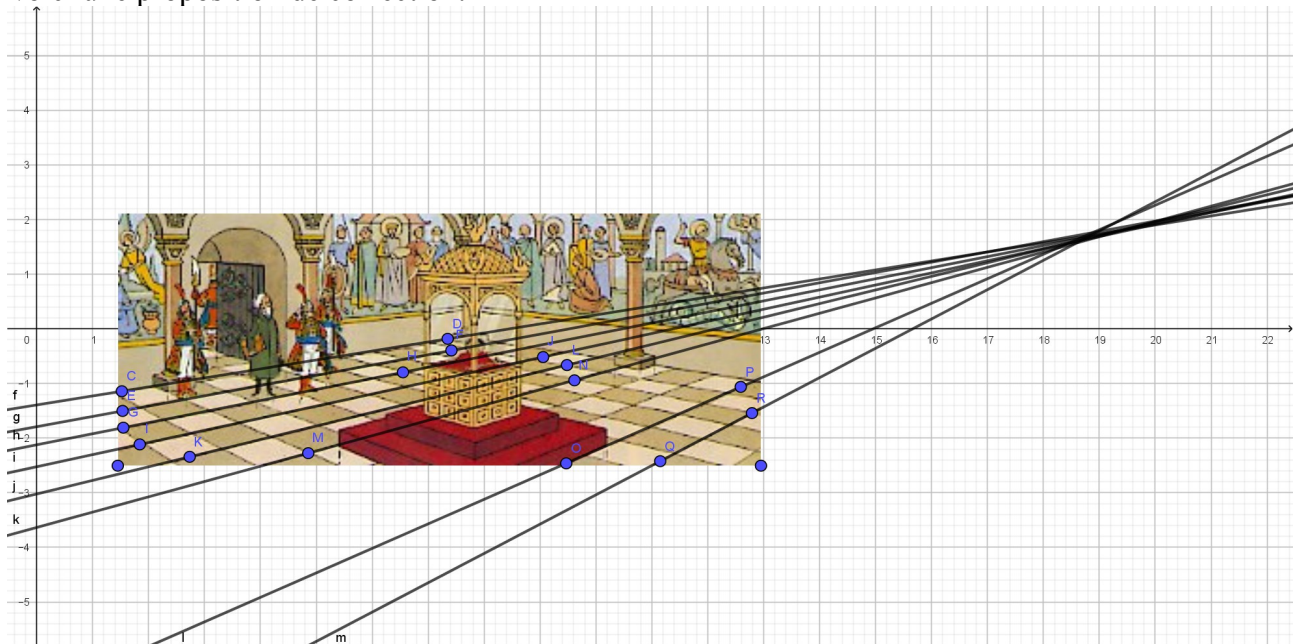
Des défis, des énigmes, des problèmes pour exercer votre observation, votre déduction, voire vos habilités en mathématiques en ce Jour de Confinement, d'où le titre.

Pour tous les niveaux et j'espère pour tous les goûts.

Lycée.

J'ai proposé dernièrement de vérifier le point de fuite d'un dessin d'Hergé dans le « Le Sceptre d'Ottokar ».

Voici une proposition de correction.



On « insère » une image dans la feuille, on dépose les points et les droites tracées montrent le travail préparatoire qu'Hergé a effectué.

Nous allons aujourd'hui évoquer le calcul, plus précisément le calcul mental.

Pour faire simple, le calcul est mental lorsque l'enfant n'a aucun support où il peut déposer une trace écrite qui peut orienter le calcul.

La richesse du calcul mental est dans la diversité des méthodes pour obtenir le résultat.

Le calcul mental s'oppose en cela au calcul posé (les opérations posées en colonnes) qui lui se fait en utilisant un algorithme unique pour chaque opération. De plus, en général, l'algorithme fait perdre le sens des nombres car l'enfant ne calcule que sur des chiffres pas sur des nombres.

On distingue chiffre et nombre non pas par la position de l'objet dans la comptine numérique. En langage courant on dit que 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9 sont des chiffres et 10-11-12-...sont des nombres. Il est vrai que 10-11-12-...sont des nombres mais à cet instant 0-1-2-...9 n'ont pas de statut particulier. Ils sont des chiffres lorsque j'écris que 2 est le chiffre des unités de 12. Mais lorsque j'écris le mot « deux » et que je dis qu'il comporte 4 lettres alors ce 4, qui désigne une quantité, est un nombre.

Il est important de se mettre en harmonie avec le vocabulaire car si je vous dis :

« Je pense à un nombre. Le chiffre des unités est 1 et le nombre de dizaines est 210.

Quel est ce nombre ? ». On espère que les élèves vont répondre : 2101 et non pas 211.

Cependant, même lorsque le calcul n'est que mental, il se peut que l'enfant pose dans sa tête l'opération. On peut penser que le plus important est qu'il obtienne le « bon » résultat. Cela n'est pas faux mais, d'une part, poser les opérations dans sa tête devient vite impossible et d'autre part utiliser la même méthode pour tout calcul ne permet pas à l'enfant d'exercer son esprit à la nécessaire

gymnastique intellectuelle de jouer avec les nombres et leurs propriétés.

Un exemple va illustrer les possibles.

12×35 en opération qui posée dans sa tête est quasiment impossible.

$12 \times 35 = (10+2) \times 35 = 350 + 70 = 420$ est par contre possible.

C'est un entraînement pour des factorisations et des développements dans les classes qui vont suivre.

$12 \times 35 = (3 \times 4) \times (5 \times 7) = (3 \times 7) \times (4 \times 5) = 21 \times 20 = 420$.

Ces jeux numériques demandent, certes de l'entraînement, mais également de l'intuition et de l'imagination. Des qualités que l'on retrouve dans la recherche des problèmes mathématiques.

Nous allons explorer certaines pistes pour chacun des cycles.

Cycle 1.

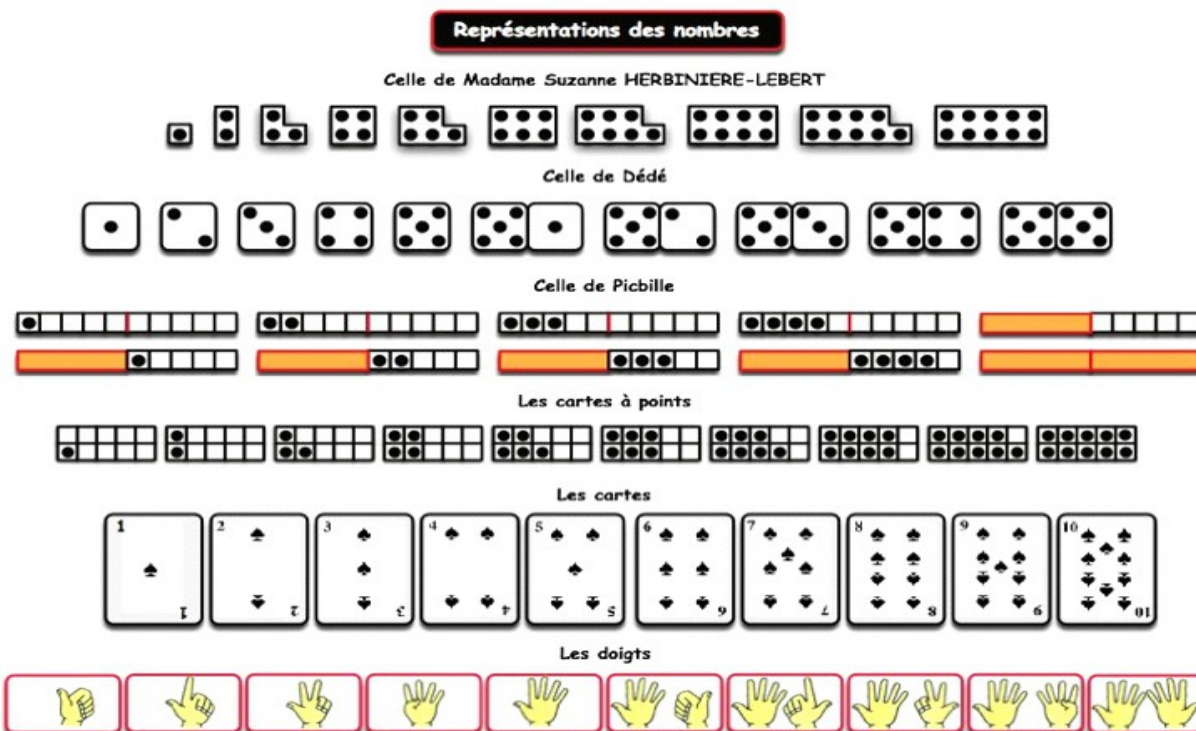
C'est un cycle qui ne fait que du calcul mental. On ne pose pas les opérations au cycle 1 comme on l'entend habituellement.

L'acquisition des chiffres/nombres écrits se construit peu à peu tout au long du cycle.

Néanmoins on ne doit pas s'interdire de travailler le calcul même si l'enfant ne sait pas reconnaître 4.

Pour qu'un enfant puisse acquérir la notion de nombre il est primordial qu'il puisse avoir une représentation des nombres pour « manipuler » les nombres, pour s'en faire une image mentale. Les représentations sont diverses et nombreuses.

L'essentiel est d'en avoir une qui autorise la manipulation et qui soit riche mathématiquement.



Je vous propose la carte à points.

Lors de votre prochaine sortie « alimentaire » vous achetez une boîte à œufs de 10 œufs.

Il suffira ensuite de disposer des cubes ou d'autres objets en suivant bien l'ordre indiqué.

Cette disposition permet de bien voir que 6 c'est 3 et 3 mais également 10 moins 4.

Que 5 est impair, que c'est 2 et 3 ou 3 et 2 et qu'il manque 5 pour atteindre 10.

Voici un exemple dans une classe. On peut ainsi « compter » les présents et absents.



2 boîtes complètes et 2 autres enfants et 3 absents. Un jour on écrira 22 et 3.
On comprend bien en regardant les boîtes à œufs qu'il sera plus facile d'expliquer que le premier 2 (à gauche) c'est 2 dizaines et que le deuxième 2 c'est 2 unités et pas deux chiffres 2 accolés.

Vous allez trouver des activités sur [le site de Jean-Luc Bregeon](#) .

Si maintenant vous faites du calcul mental avec des enfants de cycle 1 il faut s'assurer en premier que si vous demandez 3 il vous montre bien 3 doigts. Vous pouvez proposer d'obtenir 3 mais en utilisant des doigts dans chaque main (2 doigts dans une main et 1 dans l'autre et inversement). Demandez alors à l'enfant de représenter 3 façon carte à points et maintenant vous prenez deux cubes que vous cachez dans votre main et vous demandez :

« Si j'ajoute deux à 3 combien de cubes vais-je avoir ? »

Attendez la réponse, elle doit se construire dans la tête de l'enfant.

Il vérifie en déposant correctement les cubes dans la carte à points. Avec de l'entraînement, la vue suffira pour valider que cela donne 5 sinon l'enfant reprend la comptine en pointant le doigt sur chacun des cubes. Vous l'aidez en prenant bien soin de pointer en suivant la disposition de la carte à points (Haut , bas ...).

Cycle 2.

Il faut que les enfants connaissent les tables d'addition et de multiplication. C'est indispensable pour qu'il ait une familiarité avec les nombres. Le calcul mental sera le seul calcul qu'il effectuera tout au long de sa vie.

J'ai déjà évoqué l'apprentissage des tables de multiplication. Elles ne se font pas dans l'ordre. C'est un apprentissage qui se construit essentiellement par la répétition. Certes, on explique la

signification de 7 fois 8 qui est $8+8+8+8+8+8+8$ et qui est égal à 8 fois 7, ce qui n'est pas évident, que $7 \times 8 = 7 \times (4 \times 2) = (7 \times 4) \times 2$ néanmoins la reconstruction du résultat est toujours plus coûteuse en mémoire que le « par cœur ». Contrairement aux tables d'addition où le résultat est souvent reconstruit. C'est paradoxal mais en général les tables d'addition se reconstruisent alors que les tables de multiplication s'apprennent par cœur.

Faites l'expérience de demander à des adultes combien font : $8+9$ et d'expliquer la méthode employée.

On vous donnera des explications diverses et moins rarement un apprentissage par cœur.

Puis tentez la même expérience avec : 8×7

Vous comprenez mieux l'importance d'avoir au cycle 1 une représentation privilégiée des nombres pour construire les images mentales qui vont faciliter cette reconstruction.

Vous pouvez également donner des « petits » problèmes

Dans une pâtisserie, monsieur Mangetot achète 5 éclairs, 4 flans et 6 tartelettes. Combien de gâteaux monsieur Mangetot achète-t-il ?

Madame Toussaint achète 3 boîtes de 6 œufs. Combien d'œufs achète-t-elle ?

Éric a 10 cartes Komepon. Il en a 2 de plus que Vincent. Combien de cartes a Vincent ?

Dans sa tirelire, Marie n'a que des billets de 5 €. En tout, elle a 20 €. Combien a-t-elle de billets ?

Dans un parking, il y a 6 rangées de 10 places. Combien y a-t-il de places dans ce parking ?

Cycle 3 et 4.

Les apprentissages en calcul mental se doivent, comme tous les autres, d'être planifiés.

Pour illustrer cet aspect, les « petits » problèmes précédents sont à étudier au niveau du vocabulaire, de la structure des phrases et à les classer mathématiquement dans les catégories créées par Vergnaud. L'ordre de proposition des problèmes, des connaissances, devient alors un choix pédagogique qui parfois s'impose par la structure des connaissances (on apprend la multiplication après l'addition puisque la multiplication est actuellement définie comme une addition itérée) ou d'autres options mais dans tous les cas se construit.

Nous ne sommes pas dans ce cas de figure d'une construction complète d'une notion, mais simplement d'une structuration de connaissances déjà acquises. Vous adaptez les exercices aux réponses et aux non réponses de vos enfants.

Des activités.

Il existe de nombreux jeux qui exercent les enfants au calcul mental : Le compte est bon, Mathador, Educabul ...

Ils sont nombreux à être en ligne .

[Le compte est bon](#)

[Mathador](#)

[Calcul mental en ligne](#)

Il faut varier les présentations et les types d'exercices.

Voici des procédures que l'on peut mettre en place pour améliorer les compétences en calcul mental.

$$84+53=84+50+3=134+3=137$$

$$682+277=682+200+70+7=882+70+7=952+7=959$$

On ajoute au 1^{er} nombre les unités des divers ordres du second en commençant par les ordres les plus élevés.

Si les chiffres des unités sont complémentaires, il vaut mieux ajouter d'abord les unités.

$$57+83=(57+3)+(83-3)=60+80=140$$

On ajoute à l'un des nombres ce que l'on retranche de l'autre.

$$825+179=825+175+4=1000+4=1004$$

$$850+168=850+150+18=1000+18=1018$$

On peut décomposer un des nombres en une somme dans le but de faire apparaître le complément de l'autre nombre.

$$2428+1261=(2400+1200)+(28+61)=3600+89=3689$$

Avec les nombres de plusieurs chiffres, on peut procéder par tranches de chiffres.

$$68-32=68-30-2=38-2=36$$

Du grand nombre on retranche successivement les unités des divers ordres du petit nombre en commençant par les ordres les plus élevés.

$$371-176=(371-171)-5=200-5=195$$

On décompose le petit nombre en une somme de manière à obtenir deux nombres terminés par les mêmes chiffres.

$$4663-556=(4600-500)+(63-56)=4100+7=4107$$

On peut aussi procéder par tranches de chiffres.

$$25468-7864=25468+(10000-7864)-10000=25468+2136-10000=35468+2136$$

Le complément d'un nombre s'obtient en retranchant de 10 le premier chiffre significatif de droite et de 9 chacun des autres chiffres.

L'emploi des compléments permet de remplacer une soustraction par une addition.

$$13 \times 18 = (13+8) \times 10 + 3 \times 8 = 210 + 24 = 234$$

Pour trouver le produit de deux nombres compris entre 10 et 20, on ajoute les unités du deuxième nombre au premier nombre, on multiplie par 10 ce résultat, et on ajoute à ce nombre le produit des unités des nombres proposés.

$$78 \times 101 = 78 \times (100+1) = 7800 + 78$$

$$85 \times 1002 = 85 \times (1000+2) = 85000 + 170 = 85170$$

Multiplication par 11, 101, 1001... 12, 102, 1002...

On multiplie par 10, 100, 1000 et l'on ajoute au résultat le nombre lui-même ou son double.

$$45 \times 21 = 45 \times (20+1) = 900 + 45 = 945$$

$$35 \times 32 = 35 \times (30+2) = 1050 + 70 = 1120$$

Multiplication par 21, 31, 41, ... 91 et 22, 32, 42, ... 92

On multiplie par 20, 30, 40, ... 90 et l'on ajoute au résultat le nombre lui-même ou son double.

$$35 \times 4,1 = 35 \times 4 + 3,5 = 140 + 3,5 = 143,5$$

$$165 \times 2,1 = 165 \times 2 + 16,5 = 330 + 16,5$$

Multiplication par 2,1 ; 3,1 ; 4,1... 9,1

On multiplie par 2, 3, 4, ... 9 et l'on ajoute au résultat le dixième du nombre.

$$94 \times 99 = 94 \times (100-1) = 9400 - 94 = 9306$$

$$125 \times 998 = 125 \times (1000-2) = 125000 - 250 = 124750$$

Multiplication par 9, 99, 999... 8, 98, 998.

On multiplie le nombre par 10, 100, 1000 et l'on retranche du résultat le nombre lui-même ou son double.

$$14 \times 1,95 = 14 \times 2 - 0,14 \times 5 = 28 - 0,70 = 27,3$$

$$24 \times 3,95 = 24 \times 4 - 2,4 : 2 = 96 - 1,2 = 94,8$$

Multiplication par 0,95 ; 1,95 ; 2,95 ; 3,95. ; ...

On multiplie le nombre par 1, 2, 3, 4... c'est-à-dire par le nombre entier immédiatement supérieur, et l'on retranche du résultat 5 fois le 100° du nombre, ou bien la moitié du dixième.

$$52 \times 11 = 5(5+2)2 = 572$$

$$48 \times 11 = 528$$

$$4836 \times 11 = 53196$$

Si elle dépasse 9, on intercale le chiffre des unités de cette somme et on augmente de 1 le chiffre de gauche du résultat.

Si la somme des 2 chiffres ne dépasse pas 9, on la place entre les 2 chiffres.

N pose d'abord le chiffre des unités, puis à sa gauche successivement la somme des deux premiers chiffres, la somme du 2° et du 3°, la somme du 3° et du 4°... etc. et enfin le dernier chiffre. On tient compte des retenues s'il y a lieu.

$$35 \times 44 = 35 \times 40 + 35 \times 4 = 1400 + 140 = 1540$$

$$24 \times 55 = 24 \times 50 + 24 \times 5 = 1200 + 120 = 1320$$

Multiplication par 22, 33, 44, 55...

On multiplie par 20, 30, 40, 50... et on augmente le résultat de son dixième.

$$59 \times 39 = (60-1)(40-1) = 60 \times 40 - 60 - 40 + 1$$

On fait la différence entre le produit et la somme des nombres ronds voisins et on ajoute 1 au résultat.

$$65^2 = (60+5)(60+5) = 60^2 + 2 \times 5 \times 60 + 5^2 = 60^2 + 600 + 25 = 3600 + 600 + 25 = 4225$$

On multiplie le nombre de dizaines par le nombre entier immédiatement supérieur (6x7) et l'on écrit 25 à droite de ce produit.

$$728 : 7 = (700 + 28) : 7 = 100 + 4 = 104$$

$$594 : 6 = (600 - 6) : 6 = 100 - 1 = 99$$

On décompose le dividende en une somme ou en une différence.

$$770 : 14 = (770 : 7) : 2 = 110 : 2 = 55$$

$$540 : 45 = (540 : 9) : 5 = 60 : 5 = 12$$

On décompose le diviseur en un produit de facteurs.

$$72 : 2 = 60 : 2 + 12 : 2 = 30 + 6 = 36$$

$$89 : 2 = 80 : 2 + 9 : 2 = 40 + 4,5 = 44,5$$

On prend la moitié du plus grand nombre de dizaines pairs contenu dans le nombre et on y ajoute la moitié du reste.

$$72 : 3 = 60 : 3 + 12 : 3 = 20 + 4 = 24$$

On prend le tiers du plus grand nombre de dizaines divisibles par 3 contenu dans le nombre et on y ajoute le tiers du reste.

Multiplication par 0,5. On prend la moitié du nombre.

Multiplication par 5, 50. On prend la moitié du nombre et on multiplie le résultat par 10, 100.

Division par 0,5. On double le nombre.

Division par 5, 50. On double le nombre et on divise le résultat par 10, 100.

Multiplication par 0,05. On prend la moitié du nombre et on divise le résultat par 10.

Division par 0,05. On double le nombre et on multiplie le résultat par 10.

Multiplication par 0,25. On prend le quart du nombre.

Division par 0,25. On multiplie le nombre par 4.

Multiplication par 2,5 ;25. On prend le quart du nombre et on multiplie le résultat par 10, 100.
 Division par 2,5 ;25. On multiplie le nombre par 4 et on divise le résultat par 10, 100.
 Multiplication par 0,125. On prend le huitième du nombre.
 Division par 0,125. On multiplie le nombre par 8.
 Multiplication par 1,25 ; 12,5 ; 125. On prend le huitième du nombre et on multiplie le résultat par 10, 100, 1000.
 Division par 1,25 ; 12,5 ; 125. On multiplie le nombre par 8 et on divise le résultat par 10, 100, 1000.
 Multiplication par 1,5. On triple la moitié du nombre. Division par 1,5. On double le tiers du nombre.
 Multiplication par 0,15. On triple la moitié du nombre et on divise le résultat par 10. Division par 0,15. On double le tiers du nombre et on multiplie le résultat par 10.
 Multiplication par 15. On triple la moitié du nombre et on multiplie le résultat par 10.
 Division par 15. On double le tiers du nombre et on divise le résultat par 10.
 Multiplication par 0,75. On triple le quart du nombre.
 Division par 0,75. On quadruple le tiers du nombre.
 Multiplication par 7,5 ; 75. On triple le quart du nombre et on multiplie le résultat par 10, 100.
 Division par 7,5 ; 75. On quadruple le tiers du nombre et on divise le résultat par 10, 100.
 Multiplication par 0,1 ; 0, 01... On divise par 10, 100...
 Division par 0,1 ; 0,01... On multiplie par 10, 100...
 Calcul des carrés. $23^2 = 4 \times 100 + 2 \times 2 \times 3 \times 10 + 9 = (10d+u)^2 = 100d^2 + 10 \times 2 \times d \times u + u^2$

Il en existe encore. Cette abondance de méthodes permet de mieux comprendre pourquoi le calcul mental doit être enseigné. Les nombreuses propriétés du nombre sont utilisées. Les opérations posées n'ont pas cette richesse puisque c'est un algorithme unique où pour la plupart du temps l'enfant a oublié la signification mathématiques des « il faut faire comme ça ! ».

Lycée.

Problème légèrement adapté.

Consigne :

Calculatrice et opérations posées avec les techniques habituelles interdites.

Il pleut des carrés.

Quelle est la somme des carrés des nombres à 6 chiffres qui s'écrivent dans le système décimal avec les chiffres 1,2,3,4,5,6, chacun étant utilisé une seule fois dans chaque nombre ?

Jeux mathématiques et logiques. Volumes 7. Hatier

Solution :

On doit trouver 129 158 041 750 920. Bon courage. Remarquez, la programmation n'est pas interdite !