Remue-méninges
43 apr. J.-C.

Une composition de Christelle un jour de confinement.
4 boules de cuir: Nougaro.

Des défis, des énigmes, des problèmes pour exercer votre observation, votre déduction, voire vos habilités en mathématiques en ce Jour de Confinement, d'où le titre.
Pour tous les niveaux et j'espère pour tous les goûts.

Défi 1.
Une boule plongée dans un bécher est tout juste recouverte d'eau. Le diamètre de la boule et celui du bécher mesurent 8cm. A quelle hauteur était le niveau de l'eau dans le bécher avant d'y plonger la boule?

Thème : Des paradoxes.
Musique: LV. Paroles: AS. "Plus je m'éloigne et plus je t'aime".

Défi de la pomme de terre.
En allant trop vite, en voulant utiliser systématiquement une règle bien apprise, on risque de commettre des erreurs.
Personnellement je ne le classe pas dans les paradoxes (définition du Larousse : Opinion contraire aux vues communément admises) mais on le trouve sous ce terme dans la littérature.
Un agriculteur a 100 kg de pommes de terre. Au début elles se composent de 99% d'eau du poids total et donc de 1% de matière sèche toujours du poids total.
Plus tard, au cours du stockage, leur teneur en eau descend à 98%.
Quel est alors le poids total des pommes de terre ?
Réponse :
50 kg.
La matière sèche est toujours de 1 kg. Après le stockage cette matière sèche représente 2% du total. Donc le total est 50 fois plus. Ainsi on trouve les 50 kg.

Défi de l'infini.
Combien vaut : S=1-1+1-1+1-1...
On continue cette liste infiniment.

Premier résultat :
S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+...=0

Deuxième résultat:
S=1-(1-1)-(1-1)-...=1

Troisième résultat :
On remarque que : S=1-S.
Ainsi : 2S=1
d'où : $S=\frac{1}{2}$
Le troisième résultat est celui proposé par Euler.
Qui a raison ?
Nous sommes là devant un vrai paradoxe. Il est communément admis qu'un calcul donne un seul résultat et me voici avec 3 résultats différents.
La première conclusion est qu'il faut se méfier des calculs impliquant une infinité de termes.
La seconde est qu'il faut éclaircir cela. Les mathématiciens sont là pour le faire. Enfin ...eux ils se comprennent....

Défi de l'amitié.
Découvert en 1991 par Scott L. Feld c'est un phénomène qui indique que « la plupart des gens ont moins d' amis que leurs amis ont, en moyenne ».
Vous allez trouver un début d'explication ici.
Il est à noter que le paradoxe permet de mieux circonscrire une épidémie (voir le centre de l'article). Il faudra poser la question à nos dirigeants.

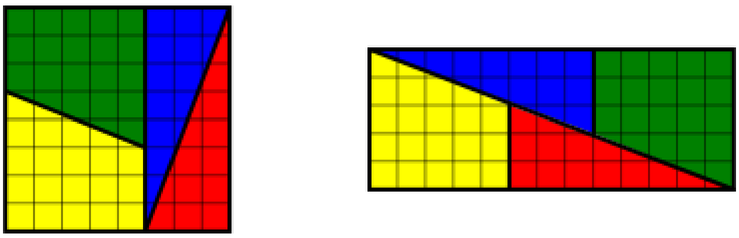
Défi du carré manquant.
Désormais vous n'avez plus à acheter du chocolat.

Le carré en trop.

Encore mieux : 3 carrés en trop !

Enfin sur une scène :Le puzzle d'une vie !

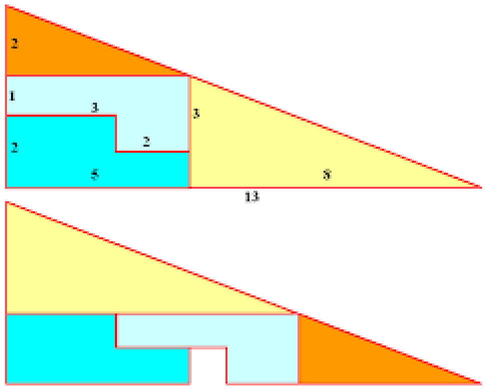
Défi de Lewis Carroll.



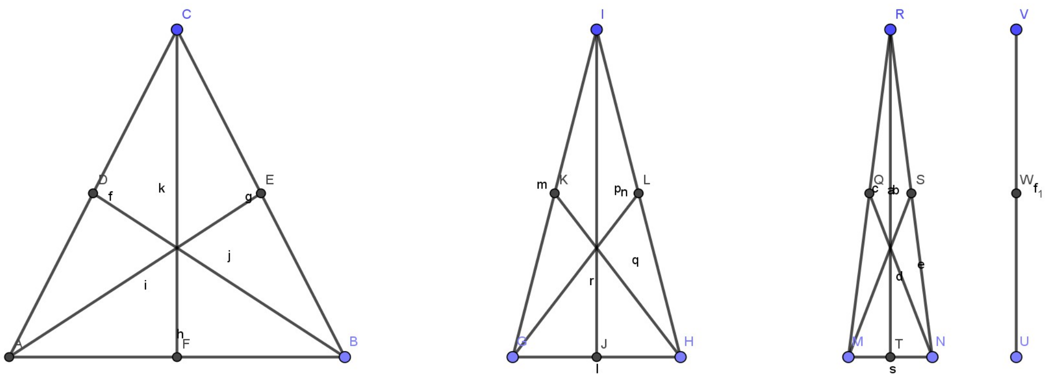
Lewis Carroll était tout à la fois écrivain et professeur de mathématiques plus précisément de logique.
Le paradoxe de Lewis Carroll peut être donné dans différentes classes.
J'ai pu proposer le puzzle à des étudiants préparant le CAPES de mathématiques. Les questions et réponses ne s'éloignaient parfois guère de celles données par des élèves plus jeunes. En fait, lorsqu'on propose un problème non conventionnel à un public quelconque on reçoit un questionnement et des réponses souvent identiques. L'âge et la formation interviennent peu.
J'ai, il y a peu de temps, fait de même. Voulant découper et coudre un masque, avec recto/verso, j'ai oublié qu'une pièce de tissu n'ayant pas d'axe de symétrie ne pouvait s'ajuster si on découpait les pièces en les gardant d'un même côté. Pourtant je l'avais écrit le matin même dans un des

remue-méninges.
Voici un compte rendu pour [une classe de seconde.]
On peut le proposer en primaire. Ils vont manipuler, construire les puzzles, s'apercevoir que 64=65.
Le constat ne suffit pas. Pour beaucoup il y a un puzzle qui fait 64, l'autre qui fait 65 et …
La conservation de l'aire n'est pas évidente.
En primaire, on peut augmenter les dimensions du puzzle et on constate le non alignement.

Défi lycée.
Voici une autre version. Expérimentez et expliquez ?



Défi du barycentre.



On prend un triangle isocèle et on détermine son centre de gravité. Il est situé au tiers de la hauteur de la base.
On divise par N (un entier ici 2) la mesure de la longueur de la base.
On maintient la hauteur.
Ainsi le centre de gravité ne bouge pas. Il est toujours situé au tiers de la base.
On poursuit l'opération (division pas N) jusqu'au bout.
Le triangle semble devenir un segment.
Au final le centre de gravité qui est situé au tiers se déplace brutalement et magiquement au milieu du segment.

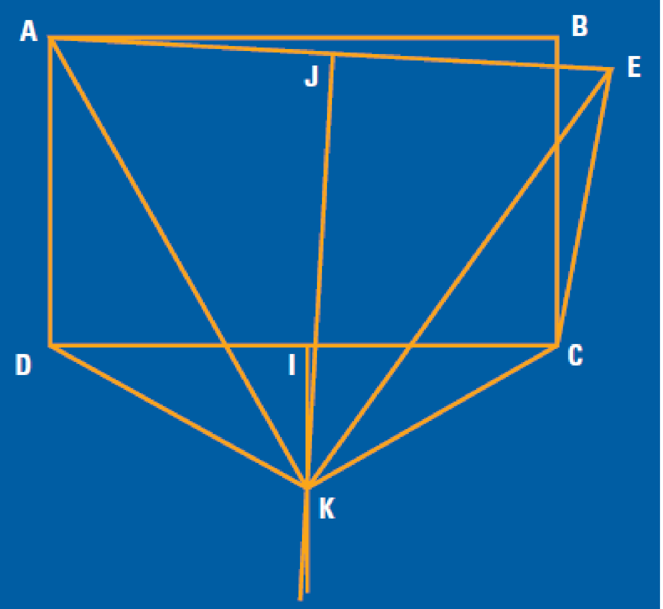
Pourquoi ?

<u>Défi Palais de la Découverte.</u>

Un angle droit obtus

ABCD est un rectangle. De C, on construit à l'extérieur du rectangle ABCD un segment CE égal à la largeur (AD ou BC) du rectangle. I est le milieu de la longueur CD, J est le milieu du segment AE. Les médiatrices JK et IK des segments AE et CD se coupent en K.

Les triangles ADK et ECK ont leurs côtés respectivement égaux, donc leurs angles aussi. En particulier, l'angle ADK et l'angle ECK sont égaux. Mais comme CDK est un triangle isocèle, ses angles à la base, l'angle CDK et l'angle DCK, sont égaux. Il reste donc que les angles ADC et ECD sont égaux, c'est-à-dire que l'angle droit ADC est égal à l'angle ECD, qui est obtus puisque E est extérieur au rectangle...

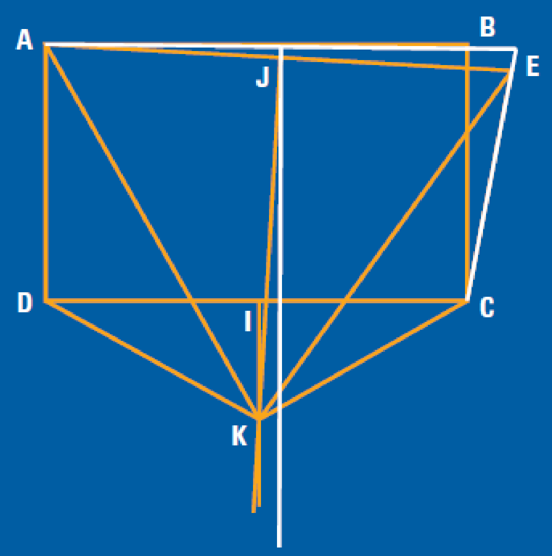


Alors ?

En réalité, le dessin était faux... Le segment CE n'avait pas la bonne longueur, et le point K se situe beaucoup plus loin qu'il n'y paraît sur le dessin.

Si l'on augmente l'angle BCE, le point K se rapproche (figure 3) et la situation devient plus claire. Les triangles ADK et ECK n'apparaissent plus comme soi-disant symétriques. Ils sont bien superposables, mais on s'aperçoit que l'angle ECK ne contient pas l'angle DCK !

Voilà un exemple de la différence entre la géométrie et le dessin : un dessin permet de visualiser des propriétés géométriques mais peut aussi induire en erreur à cause des évidences qu'il est censé receler. Ici, on croit que tel angle contient tel autre, on ne se posera pas la question de le vérifier, ça saute aux yeux. Mais ce qui saute aux yeux est malheureusement faux.



<u>Figure 2</u>
En blanc, le dessin rectifié, sans le point K qui serait beaucoup plus bas.

Il est souvent difficile de rédiger une démonstration parfaite, mais chaque fois que dans une démonstration il apparaît une formulation comme « il est clair que… » ou « c'est trivial » ou « on vérifiera aisément que... » il est en fait nécessaire de chercher à contrôler ces évidences.

Page précédente, c'est pire : on sous-entend qu'un angle en contient un autre au seul vu du dessin. Comme quoi la boutade célèbre « la géométrie est l'art de faire des raisonnements justes sur des figures fausses » est une formulation un peu rapide.

Les dessins sont faits de points et de droites qui ont une épaisseur, les longueurs et les angles ont des valeurs approximatives. Une démonstration géométrique devrait s'appuyer systématiquement sur les axiomes et les théorèmes déjà démontrés et utilisables dans la situation envisagée. L'art de la rédaction consiste à dire l'essentiel sans allonger indéfiniment la démonstration.

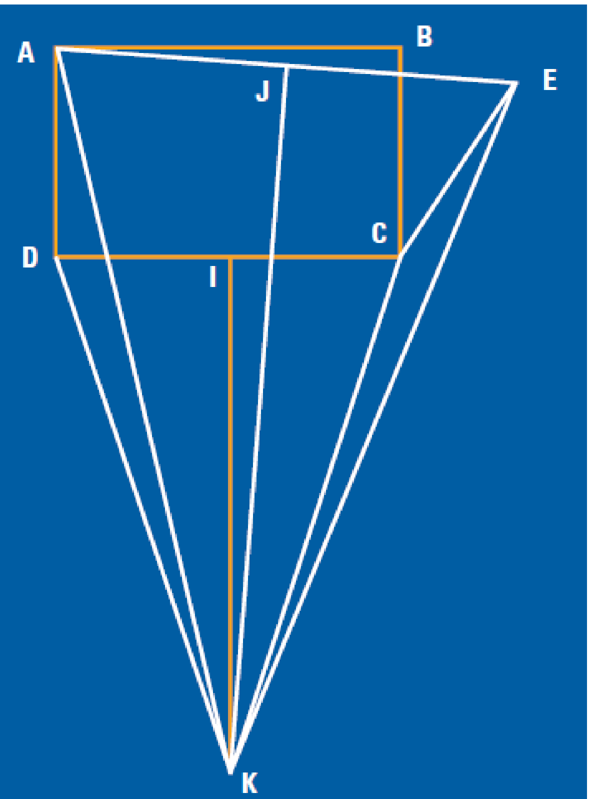


Figure 3

Défi faire confiance.

On pose x=10 864 et y=18 817.

En prenant une calculatrice calculer:

$$S = 9x^4 - y^4 + 2y^2$$

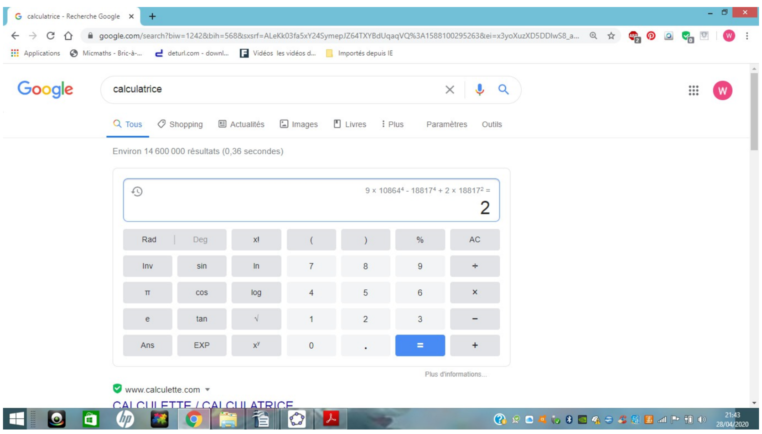
Prenez une deuxième calculatrice.

Conclusion ?

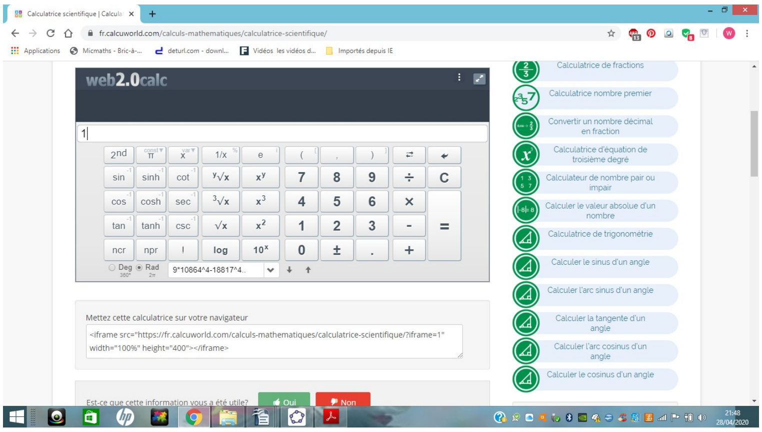
Constat.

La TI-Primaire Plus me donne : 58978

Une calculatrice sur le net me donne ;



Une autre me donne :



Alors combien ?

Je donnais ce calcul en seconde pour montrer que l'on ne pouvait pas dire :

« Voilà le résultat car la calculatrice le dit »

dans une classe il y avait toujours des élèves qui voulaient le faire à la main.

Mais la « puissance » des mathématiques permettait d'obtenir le « vrai » résultat.

$9x^4 - y^4 + 2y^2 = (3x^2-y^2)(3x^2+y^2)+2y^2$

On prenait alors la calculatrice ou encore à la main et on calculait $3x^2-y^2$.

Tout le monde , calculatrice et à la main, trouvait : -1

$9x^4 - y^4 + 2y^2 = (-1)(3x^2+y^2)+2y^2=-3x^2-y^2+2y^2=-3x^2+y^2=-(3x^2-y^2)=-(-1)=1$

Le résultat vaut 1 : Je tendais la poubelle pour jeter les calculatrices qui ne donnaient pas le bon résultat. Des élèves étaient sur le point de le faire. Il fallait expliquer pourquoi.

Je tenais l'exercice de notre collègue Jacques Verdier, créateur du Petit Vert de l'APMEP.

Voici l'article qui explique tout .(ici)

Défi de l'alignement.

Nous allons démontrer ici que dans un plan, *n* points quelconques sont toujours alignés. Cette démonstration se fait par récurrence.

Commençons par montrer l'hérédité : supposons qu'on ait montré que n points sont toujours alignés. Soient alors $(n+1)$ points : $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Les points A_1 jusqu'à A_n sont un ensemble de *n* points donc d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont alignés. Autrement dit, le point A_1 est sur la droite formée par les points A_2 à A_n.

De même, les points A_2 jusqu'à A_{n+1} sont un ensemble de *n* points donc d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont alignés. Donc le point A_{n+1} est sur la droite formée par les points A_2 à A_n. Alors les points A_1 à A_{n+1} sont tous sur la même droite, celle formée par les points A_2 à A_n. Les $(n+1)$ points sont alignés.

Puisqu'on a l'hérédité, il ne nous manque que l'initialisation. Or elle est évidente : pour $n = 2$, 2 points sont toujours alignés ! Donc finalement, par récurrence, pour tout *n* à partir de 2, *n* points du plan sont toujours alignés.

Solution :

L'erreur n'est ni dans l'initialisation (évident), ni dans l'hérédité ! En effet, si vous placez sur une feuille des points alignés, un point supplémentaire ne peut pas être aligné avec tous les points sauf un ! Du moins presque. Car l'hérédité n'est pas fausse en elle-même, mais elle n'est valable qu'à partir d'un certain rang : En effet, pour pouvoir dire « A_1 est sur la droite formée par les points A_2 à A_n » et « A_{n+1} est sur la droite formée par les points A_2 à A_n», il faut que « les points A_2 à A_n » forment un ensemble comprenant au moins 2 points, pour définir une droite ! Il faut donc que *n* soit au moins égal à 3. En dessous, l'hérédité ne marche plus ; la preuve : deux points sont toujours alignés, trois ne le sont pas nécessairement.
Ainsi, le problème de cette démonstration vient du raccord entre hérédité et initialisation : pour que la démonstration soit juste, comme l'hérédité est vraie à partir de $n = 3$, on doit absolument initialiser la démonstration avec $n = 3$, ce qui ici est évidemment impossible !