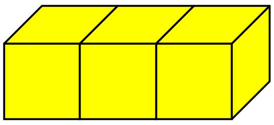
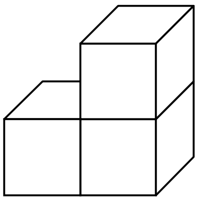
1 Les cubes dits « de Franck Rehm »

Il existe deux « tricubes » nommés ici B1 et B2.

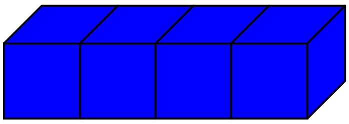


B1

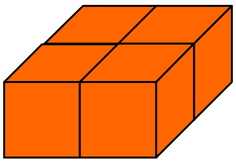


B2

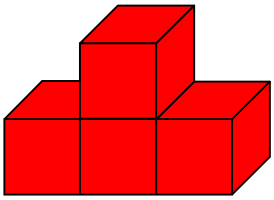
Il existe sept « tétracubes » nommés ici C1, C2, C3, C4, C5, C6 et C7.



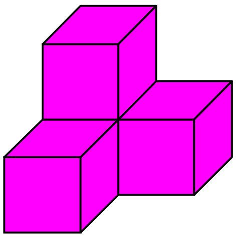
C1



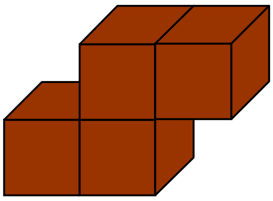
C2



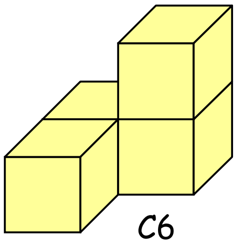
C3



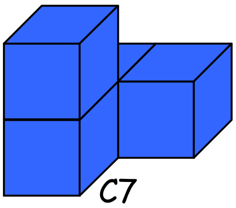
C4



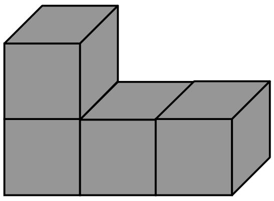
C5



C6



C7



C8

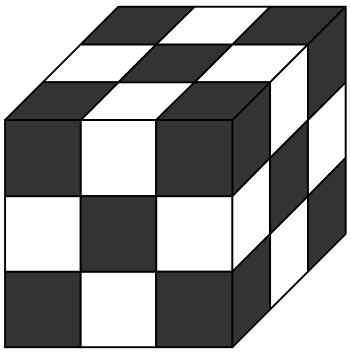
La construction d'un cube 3×3×3 est envisageable, mais la pièce C1 ne pourra être utilisée.
Il nous faut choisir un « tricube » parmi B1 et B2 et six « tétracubes » parmi C2, C3, C4, C5, C6, C7 et C8 ($27 = 1\times3 + 6\times4$).
Quatorze regroupements de pièces sont possibles, mais seuls treize permettent la réalisation d'un cube 3×3×3.

Le livre « Der verzauberte Raum-Spiele in drei Dimensionen (R.Thiele K.Haase) URANIA 1991 » évoque le nom de Franck Rehm comme initiateur de cette recherche et indique une preuve utilisant un coloriage des pièces pour montrer l'impossibilité dans le cas de l'utilisation des pièces B1, C2, C4, C5, C6, C7 et C8.

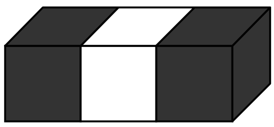
Imaginons les pièces formées alternativement de cubes blancs et noirs.

Lors de la réalisation du cube 3×3×3, les pièces B1 et C8 peuvent apporter au maximum chacune deux coins. Cependant, les pièces C2, C4, C5, C6 et C7 ne peuvent en apporter au maximum chacune qu'un seul. Ceci fait un maximum de neuf coins possibles, mais seuls huit seront utilisés.
La pièce B1 peut ne pas fournir de coin au cube 3×3×3. Les autres pièces ne peuvent fournir qu'un maximum de sept coins, huit sont nécessaires, la construction est alors impossible. La pièce B1 doit donc fournir deux coins au cube cherché.

Imaginons le cube 3×3×3 formé de 27 cubes alternativement blancs et noirs, les huit coins étant formés de cubes noirs.



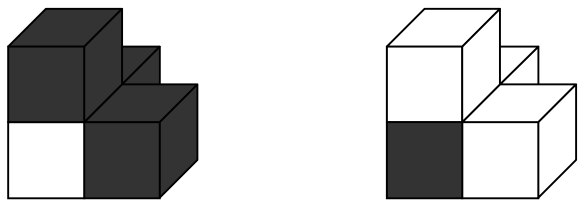
Le cube est alors formé de 14 cubes noirs et 13 cubes blancs.
La pièce B1 fournit deux coins au cube . Elle est donc formée de deux cubes noirs encadrant un cube blanc.



B1

Les pièces C2, C5, C6, C7 et C8 seront toutes formées de deux cubes noirs et de deux cubes blancs et vont fournir douze cubes noirs et douze cubes blancs. En rajoutant la pièce B1, nous obtenons douze cubes noirs et onze cubes blancs.

La pièce C4 ne peut être formée que de trois cubes noirs et un cube blanc ou de trois cubes blancs et un cube noir.
Douze cubes noirs et onze cubes blancs sont déjà utilisés, il est donc impossible d'obtenir quatorze cubes noirs et treize cubes blancs pour réaliser le grand cube.



La construction du cube avec les pièces B1, C2, C4, C5, C6, C7 et C8 est donc impossible.