Congélation

Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l’instant t = 0 (t en secondes), les ailerons, à une température de 35 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à −24 °C.

Étude préliminaire

On a relevé la température, notée f , à des instants t :

t (secondes)	0	300	600	1200	2400	4800	9600
Δt		300					
f (degrés)	35	30,63	26,81	20,53	12,05	4,15	0,49
Δf		$-4,37$					
$\dfrac{\Delta f}{f \times \Delta t}$							

1. À l’aide du tableur, compléter le tableau et vérifier que la dernière ligne est constante.
2. Placer les points de la courbe de f du tableau.
3. Quel semble être le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$?
4. Comment doit être la limite de f en $+\infty$?

Recherche d’une loi

Pour les premiers relevés, le rapport $\dfrac{\Delta f}{f \times \Delta t}$ semble à peu prés constant.

Cette constante est le coefficient de proportionnalité entre Δf et $f \times \Delta t$, on le note α .

On peut donc écrire : $\Delta f = \alpha f \times \Delta t$.

Objectif : trouver une fonction f qui vérifie cette loi.

Pour ce faire, on va réduire les intervalles de temps de Δt , un nombre relativement grand, à dt un temps très petit positif. On passe, de même, de Δf à df .

1. Exprimer $\dfrac{df}{dt}$ en fonction de f et α :

2. En fait, pour dt très petit positif, on peut écrire que $\frac{df}{dt}$ est la dérivée de f soit f'.

Écrire $\frac{f'}{f}$ en fonction de α :

Une égalité reliant une fonction inconnue à sa dérivée s'appelle une *équation différentielle.*

3. Recherche de primitives

a) Donner une primitive de $\frac{f'}{f}$:

b) Donner les primitives de α (rappel : c'est une constante) :

c) Montrer, à partir de l'égalité de la question 2, que l'expression de f est: $f(t)=\text{C}\times \text{e}^{\alpha t}$

On a donc trouvé la *solution* de l'équation différentielle.

Calculs de C et de α

1. a) D'après le tableau, la température au début de l'étude est : $f(0)=$

Cette égalité s'appelle la *condition initiale*

b) Le nombre C vaut donc : $\text{C}=$

2. a) Que vaut $f(300)$? $f(300)=$

b) En utilisant l'expression de f et la valeur de C trouvée dans la question 1 b), écrire l'équation qui permettra de trouver α :

c) Résoudre cette équation :

Etude de la fonction f

1. Représenter graphiquement la fonction f sur GeoGebra.

2. Calculer $\lim_{t \to +\infty} f(t)$

3. Calculer la dérivée de f et étudier son signe.

4. En déduire le tableau de variation de f .

Bilan

On a déterminé la fonction f grâce à une équation qui fait intervenir sa dérivée. On a donc résolu une *équation différentielle*.

Cette équation est de la forme : $\frac{f'}{f}=\alpha$ ou encore $f'-\alpha f=0$ où α est un réel donné.

Les *solutions* de cette équations ont toujours la même forme : $f(t)=\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$

Pour déterminer C, on a utilisé utilisé $f(0)=35$ qu'on appelle la *condition initiale* de l'équation différentielle.

Améliorations

Première amélioration

Le tunnel de congélation ne permet pas d'atteindre les -24°C. On le complète par une chambre froide de sorte que la fonction température soit : $g(t)=35\,\mathrm{e}^{-1{,}6t}-30$ avec t en **heures**.

1. Prouver que g vérifie l'équation différentielle $y'+1{,}6\,y=-48$
2. Quelle est la température des ailerons au bout d'une heure et demie ?
3. Au bout de combien de temps la température est-elle inférieure à -24°C ?
4. Calculer la dérivée de g et donner son signe.
5. Calculer $\lim_{t\to+\infty} g(t)$

Les équations différentielles de la forme $y'+ay=b$ ont pour solutions : $y(t)=\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-a\times t}+\frac{b}{a}$

Deuxième amélioration

L'entreprise investit dans un nouveau tunnel de congélation. La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y'+1{,}5\,y=-52{,}5$.

Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?