1) Pour $p \in \mathbf{N}^*$, soit $u_p(n)$ le nombre de suites de n entiers pris dans $[[1,p]]$ telles que deux entiers consécutifs diffèrent de 1.

Soit $u_{p,k}(n)$ le nombre de ces suites débutant par k, $X_p(n) = \begin{pmatrix} u_{p,1}(n) \\ \vdots \\ u_{p,p}(n) \end{pmatrix}$, $X_p(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a : $X_p(n) = A_p X_p(n-1)$ avec $A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ (matrice tridiagonale)

$u_p(n) = {}^t X_p(1) A_p^{n-1} X_p(1)$ est la somme des coefficients de A_p^{n-1}.

2) Le polynôme caractéristique P_p de la matrice A_p vérifie $P_p = XP_{p-1} - P_{p-2}$ avec $P_0 = 1$ et $P_1 = X$.

Ensuite $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = X^3 - 2X$, $P_4 = X^4 - 3X^2 + 1$, $P_5 = X^5 - 4X^3 + 3X$, ...

$P_p(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(p+1)\theta}{\sin\theta}$ et $P_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} (-1)^k \binom{p-k}{k} X^{p-2k} = \prod_{k=1}^{p} \left(X - 2\cos\frac{k\pi}{p+1} \right)$ (ce sont les polynômes de Tchebychev normalisés de seconde espèce).

La suite $(u_p(n))_n$ vérifie donc une récurrence linéaire d'ordre p mais aussi d'ordre inférieur comme on va le démontrer dans la suite.

Le tableau des $u_p(n)$ figure dans l'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers (OEIS) sous le numéro A220062.

3) La réduction de la matrice A_p est connue : $A_p = PD_pP$ avec $D_p = \mathrm{diag}(2\cos\dfrac{k\pi}{p+1}, 1 \leqslant k \leqslant p)$

et $P = \left(\sqrt{\dfrac{2}{p+1}} \sin\left(\dfrac{ij\pi}{p+1}\right) \right) \in \mathcal{O}_p(\mathbf{R}) \cap \mathcal{S}_p(\mathbf{R})$ (donc $P^{-1} = {}^tP = P$).

Définissons $Q_p = \displaystyle\prod_{k=1}^{\lfloor (p+1)/2 \rfloor} \left(X - 2\cos\frac{(2k-1)\pi}{p+1} \right)$.

$Q_p(A_p) = P\mathrm{diag}(0, Q_p(2\cos\dfrac{2\pi}{p+1}), 0, Q_p(2\cos\dfrac{4\pi}{p+1}), 0, \ldots)P$

$(PX_p(1))_k = \sqrt{\dfrac{2}{p+1}} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \sin\left(\frac{kj\pi}{p+1}\right) = \sqrt{\frac{2}{p+1}} \mathrm{Im} \sum_{j=0}^{p} \exp\left(i\frac{kj\pi}{p+1}\right) = \sqrt{\frac{2}{p+1}} \mathrm{Im}\left(\frac{1-(-1)^k}{1-\exp(ik\pi/(p+1))}\right)$

Les coordonnées d'indices pairs de $PX_p(1)$ sont donc nulles et par suite $Q_p(A_p)X_p(1) = 0$.

On en déduit que pour $n \geqslant \dfrac{p+3}{2}$ la suite $(u_p(n))_n$ vérifie une récurrence d'ordre $2q$ si $p \in \{4q-1, 4q, 4q+1\}$ et d'ordre $2q+1$ si $p = 4q+2$ (si $p = 4q+1$, 0 est racine de Q_p donc la récurrence est seulement d'ordre $2q$).

Les polynômes Q_p se calculent à partir des polynômes P_p avec $Q_{2p} = P_p - P_{p-1}$ et $Q_{2p-1} = P_p - P_{p-2}$.

On a par exemple :

$Q_4 = X^2 - X - 1$ donc $u_4(n) = u_4(n-1) + u_4(n-2)$ si $n \geqslant 3$.

$Q_5 = X^3 - 3X$ donc $u_5(n) = 3u_5(n-2)$ si $n \geqslant 4$.

$Q_7 = X^4 - 4X^2 + 2$ donc $u_7(n) = 4u_7(n-2) - 2u_7(n-4)$ si $n \geqslant 5$.

$Q_9 = X^5 - 5X^3 + 5X$ donc $u_9(n) = 5u_9(n-2) - 5u_9(n-4)$ si $n \geqslant 6$.

4) Si on fixe n et si on fait varier p, on peut démontrer la relation $u_p(n) = u_{p-1}(n) + 2^{n-1}$ pour $p \geqslant n$:

la suite $(u_p(n))_p$ est une suite arithmétique pour $p \geqslant n$.