Les problèmes de contact vus par Viète

(sans inversion ni puissance d'un point par rapport à un cercle)

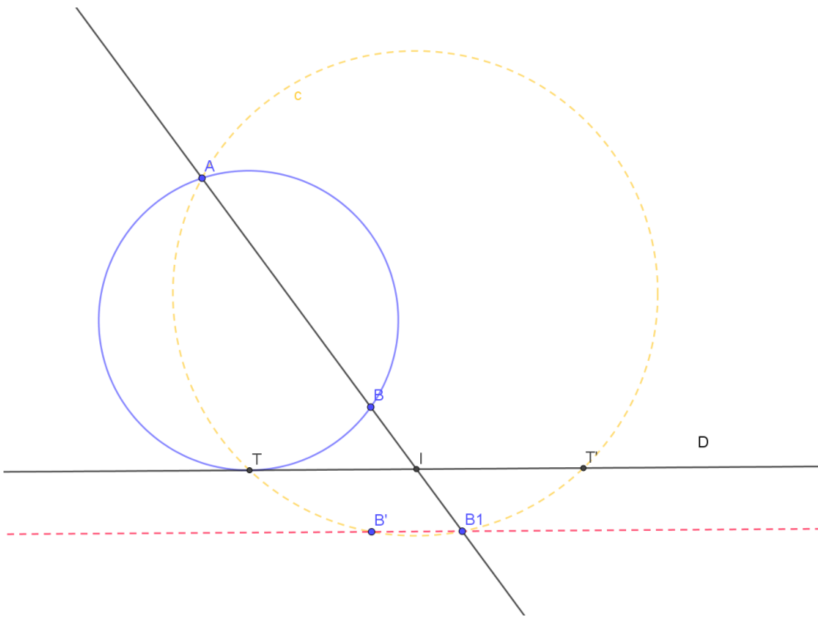
https://debart.pagesperso-orange.fr/seconde/contruc_cercle.html

Le problème 3 :

Tracer un cercle passant par un deux points A et B donnés et tangent à une droite donnée D.

La proposition de Viète :

« Si I est l'intersection des droites (AB) et D, tracer B' le symétrique de B par rapport à D et $B1$ le symétrique de B par rapport à I. Le cercle circonscrit (C) à $A, B', B1$ coupe la droite D en T et T' qui sont les points de tangence de D avec les cercles cherchés. Il suffit de tracer les cercle (ABT) et (ABT') »



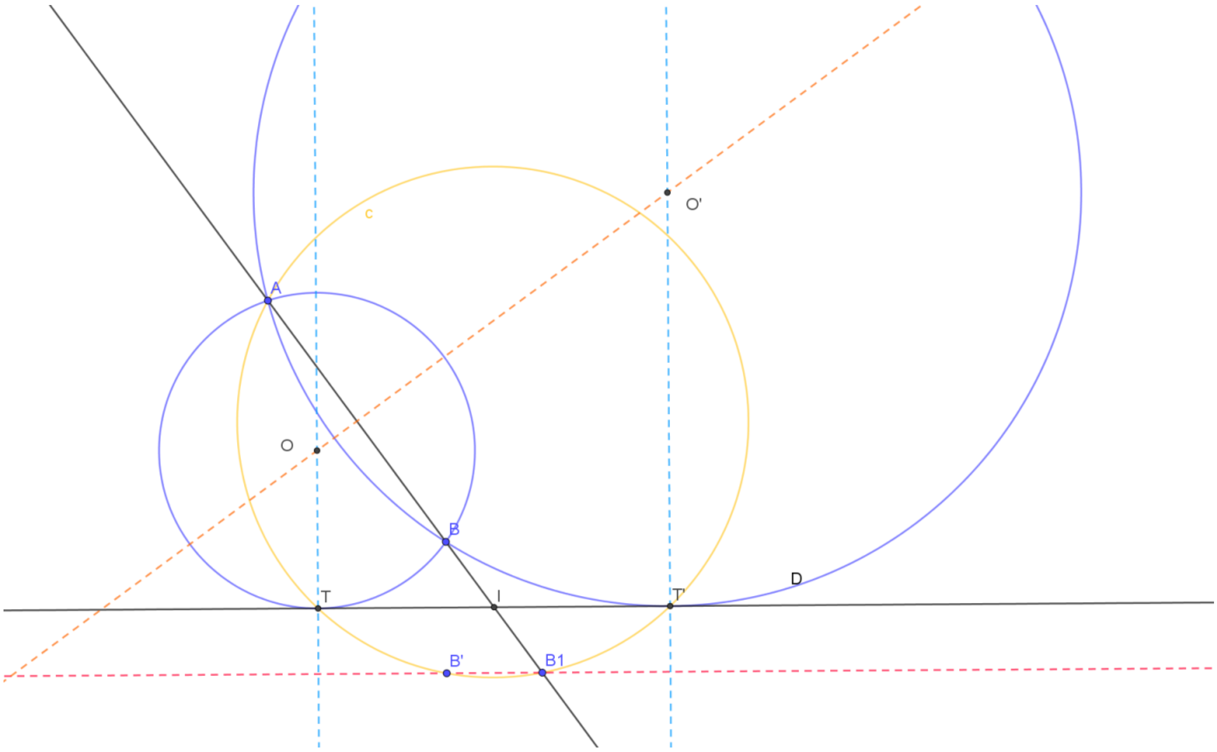
Démonstration :

Dans le cercle (C) , $\widehat{TAB}$ =$\widehat{TAB1}$ = $\widehat{TT'B1}$

Et par deux symétries , on a $\widehat{TT'B1}$= $\widehat{T'TB'}$ = $\widehat{T'TB}$

Donc $\widehat{TAB}$=$\widehat{T'TB}$, ce qui signifie que les deux angles du cercle (ABT) qui interceptent la même corde TB sont égaux . Donc la droite TT' est tangente au cercle (ABT).

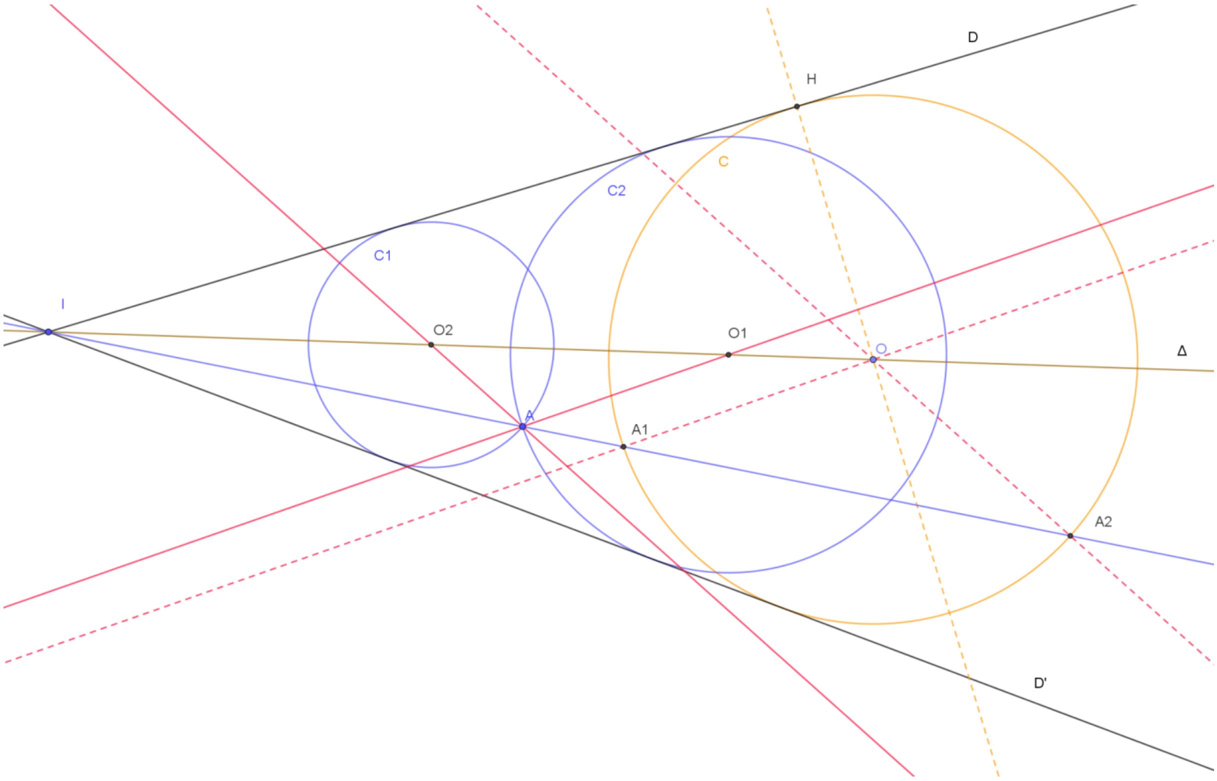
Construction des deux cercles solution :



Le problème 5 (PDD):

Tracer un cercle passant par un point A donné tangent à deux droites D et D'.

Cette question peut se traiter directement par homothétie



On choisit un point O quelconque sur la bissectrice Δ de (D, D') situé dans le même secteur angulaire que le point A, et on trace le point H pied de la perpendiculaire à D passant par O le cercle (C) de centre O et passant par H est tangent aux deux droites D et D'.

La droite (OA) coupe le cercle (C) en deux points $A1$ et $A2$.

La droite parallèle à $(OA1)$ passant par A coupe Δ en un point $O1$

La droite parallèle à $(OA2)$ passant par A coupe Δ en un point $O2$

Les cercles $(C1)$ et $(C2)$ de centres $O1$ et $O2$, passant par A sont images du cercle (C) par les homothéties de centres I, intersection de D et D', et qui transforment respectivement O en $O1$ et en $O2$. Les droites D et D' étant invariantes par ces homothéties, les cercles $(C1)$ et $(C2)$ sont donc tangents aux droites D et D'

Remarque : le point A' symétrique de A par rapport à Δ appartient aux cercles solutions, on peut se ramener à une construction (PDD) étudiée dans le problème 3. Ce qui permet également de justifier qu'il y a deux solutions.

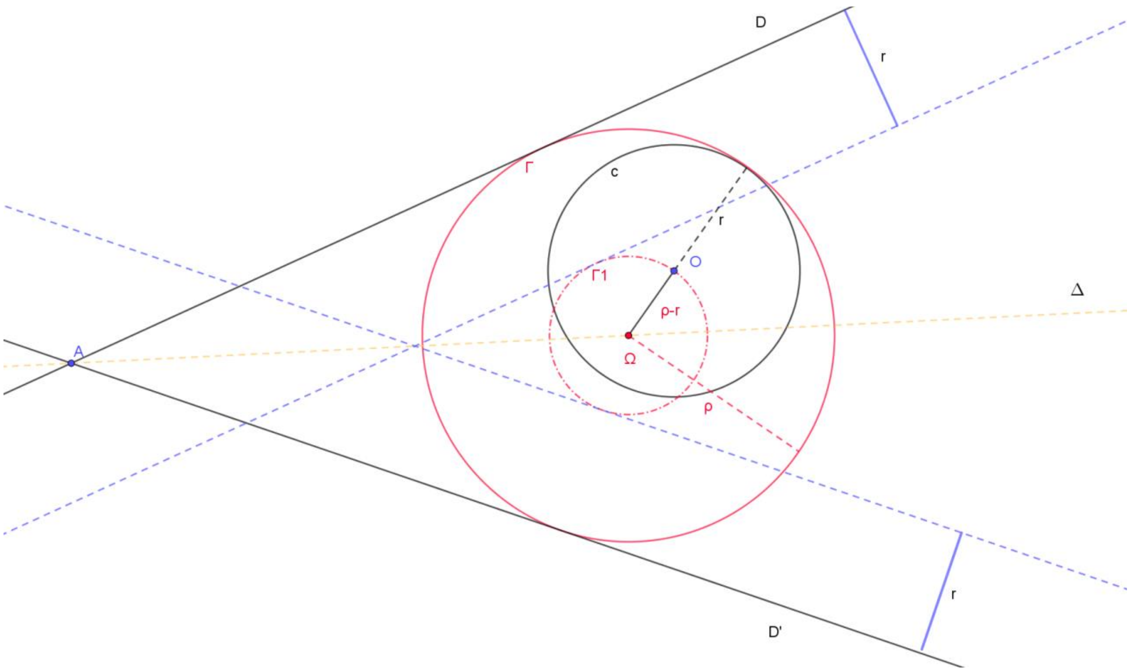
Le problème 8 (DDC):

Tracer un cercle tangent à deux droites D et D' sécantes en I et à un cercle (C) donnés.

Ce problème (DDC) se ramène au problème 5 (PDD) par une méthode astucieuse proposée par Viète : la méthode des « translations parallèles ».

La méthode des « translations parallèles »

Prenons le cas où le cercle (C) cherché, de centre O et de rayon r est tangent intérieurement au cercle cherché Γ



On remarque que si le cercle cherché Γ a pour rayon ρ et pour centre Ω alors le cercle $\Gamma 1$ de même centre Ω et de rayon $\rho - r$ passe par le point O. De plus ce cercle $\Gamma 1$ est tangent aux droites $D1$ et $D'1$ parallèles à D et D' et situées à une distance r de ces droites.

La construction de Γ en découle naturellement :

« on trace les droites $D1$ et $D'1$ parallèles à D et D' et situées à une distance r de ces droites, on trace comme proposé dans le problème 3 (PDD) le cercle $\Gamma 1$ passant par O et tangent aux droites $D1$ et $D'1$. Si on note Ω son centre et $\rho 1$ son rayon, le cercle de centre Ω et de rayon $\rho 1 + r$ est une solution du problème. »

Des remarques :

- Il y a deux cercles $\Gamma 1$ solutions, donc deux cercles Γ solutions pour lesquels (C) est tangent intérieurement.
- On a une construction analogue pour lesquels (C) est tangent extérieurement aux cercles solutions. Dans ce cas on considère les droites $D2$ et $D'2$ parallèles à D et D', toujours à une distance r de ces droites, mais extérieures au secteur angulaire contenant O ;
- On en déduit que le problème 8 (DDC) a quatre cercles solutions