Parcours d'Étude et de Recherche : Racine de deux

Gilles Waehren

Le programme de Seconde de la rentrée 2019 a décontenancé plus d'un professeur de mathématiques. Après l'avoir relu plusieurs fois, il m'a semblé que certaines notions, certaines compétences, devaient être abordées de façon conjointe. J'ai eu le sentiment qu'une lecture linéaire de nombreuses parties de ce programme pouvait conduire à un contenu de cours très déconstruit, vide de sens. Puis est apparu « Démonstration de l'irrationalité de racine de deux » ! Nous avions travaillé, dans le groupe « Histoire des mathématiques » de l'APMEP de Lorraine, sur la construction des nombres (fractions, irrationnels) au travers de textes et documents historiques, notamment racine de deux. Le fruit de nos recherches avait pris forme dans un atelier lors de la Journée Régionale 2009 puis dans un article publié dans les Petit Vert 102 et 103.

Les nombreux travaux (voir bibliographie en annexe) autour de ce nombre montrent qu'il est possible de l'aborder par de multiples points de vue : géométrique, arithmétique, algébrique, algorithmique… Il s'agissait donc, pour moi, d'organiser cet ensemble de manière cohérente et pédagogique et de leur proposer à des élèves qui vivaient les dernières heures du programme 2009 en étant supposés maîtriser celui de 2019. Nous verrons que ce ne fut pas chose aisée et qu'il sera nécessaire d'améliorer les activités proposées aux élèves.

L'accroche de ce travail résidait dans la tablette YBC 7289 (Yale Babylonian Collection), surnommée la pierre de Rosette des mathématiques, qui donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ au millionième. Quel est le contenu de cette tablette ? Que signifie-t-il ? Quelle est la qualité de l'information ? Comment les Babyloniens (les Sumériens pour être précis) sont-ils parvenus à un tel résultat ? Ces questions pouvaient faire l'objet d'un Parcours d'Étude et de Recherche ; en deux mots, un travail sur un sujet donné qui permet d'aborder un grand nombre de notions du programme appartenant à des domaines variés.

Le découpage que je me donnai fut le suivant :

Étape 1 : Présentation de la tablette (histoire des mathématiques)
Étape 2 : Lecture des valeurs de la tablette et déchiffrage (codage de l'information)
Étape 3 : Méthode par les rectangles (géométrie et construction), dite de Héron
Étape 4 : Augmentation du nombre d'étapes (calcul automatisé)
Étape 5 : Valeurs successives de L et l (calcul et encadrements)
Étape 6 : Programmation Python (algorithmique)
Étape 7 : Irrationalité de $\sqrt{2}$ (démonstration)

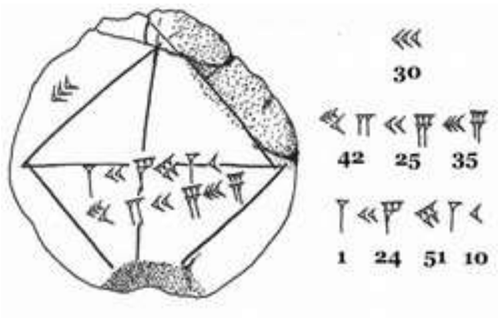
Ces sept étapes furent regroupées sur quatre séquences de durée variable. Le travail fut proposé au troisième trimestre dans une classe de Seconde, la plus faible du lycée, mais avec des éléments moteurs et une certaine appétence pour les mathématiques. Toutefois, les capacités d'approfondissement de certains élèves freinèrent quelque peu mes ambitions. L'objectif était de travailler, avec un sujet commun, la plupart des compétences :

- Chercher : toutes les étapes
- Modéliser : étapes 4 et 6
- Représenter : étapes 2 à 6
- Raisonner : étapes 2, 3 et 7
- Calculer : toutes les étapes
- Communiquer (à l'oral ou à l'écrit) : toutes les étapes.

Bien sûr, j'espérais aussi augmenter la culture personnelle des élèves et leur faire comprendre que les mathématiques se sont construites dans la durée (plus de 4000 ans) sur des idées parfois élémentaires mais riches en développement.

Chaque séquence permettait de faire le bilan de la précédente, mais, pressé par le temps, nous n'eûmes guère le temps de faire une synthèse globale de tout le travail. Les difficultés rencontrées dans les étapes 3 et 7 me font penser qu'un travail préalable sur le raisonnement et le besoin de démonstration s'impose avant de les aborder. J'avais en partie anticipé ce genre de problème en supprimant l'étape 5 que je développerai en annexe. Les liens sur les séquences permettent d'accéder au document-élève.

Séquence 1 : Lecture et déchiffrage de la tablette. Étapes 1 et 2. En classe.



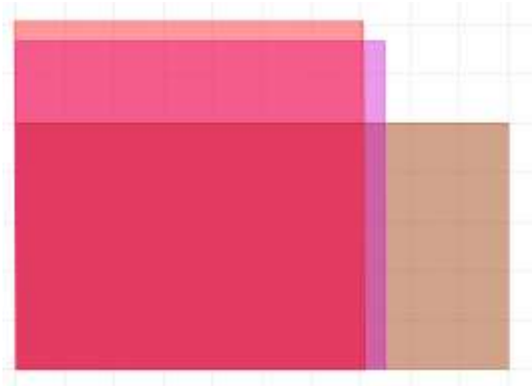
La première partie du travail a consisté en la découverte de la tablette : son contexte, son contenu. Les tablettes babyloniennes ont permis d'identifier cette civilisation, dont les cités (Sumer, Uruk, Babylone…) étaient implantées dans l'actuelle Irak, entre le Tigre et l'Euphrate, comme celle qui aurait inventé l'écriture. Beaucoup de recherches font penser que ce progrès humain prendrait ses racines dans les mathématiques. Un grand nombre des tablettes exhumées des champs de fouilles proviendraient du sous-sol des habitations, qui était souvent remblayé avec des gravats de moindre importance : les tablettes des élèves scribes (Christine Proust). Le fond documentaire est donc très disparate ; on y trouve beaucoup de tables de calculs, mais aussi la tablette Plimpton 322 qui contient des triplets pythagoriciens, plusieurs siècles avant Pythagore ou la corde à 13 nœuds, ou la tablette YBC 7289 ici étudiée. Les élèves avaient, comme travail personnel à la maison, à chercher quelques repères historiques de cette période.

Cette séquence, ainsi que la plupart de celles de ce parcours, de découverte s'est faite un lundi après-midi en deuxième partie de séance. Le document élève expliquait comment lire les nombres en écriture cunéiforme, comment les écrire en base 10 puis comment les convertir de la base 60 à la base 10. Tout seuls, les élèves ont eu à convertir les deuxième et troisième nombres ; ce qui a nécessité quelques ajustements, étant donné la difficulté induite par la virgule. Puis, ensemble, nous nous sommes efforcés de prouver que la diagonale d'un carré de côté 30 avait bien pour valeur le deuxième nombre. Il est parfois difficile de s'impliquer dans un calcul dont on connaît le résultat : la vérification, tâche mathématique relativement aisée pour l'habitué, n'est pas forcément naturelle pour l'élève. Enfin, le rapport entre les deux longueurs a permis d'interpréter le troisième nombre et d'apprécier la qualité de la précision obtenue par les Babyloniens. Cette idée de former le rapport de deux longueur pour quantifier l'une relativement à l'autre ne va pas de soi. Là encore, les élèves se sont demandés pourquoi les mathématiciens babyloniens avaient ajouté cette indication.

Le temps que je me suis accordé pour ce travail ne laissait guère de place à l'autonomie de l'élève, sur une activité dans laquelle il peut, tout de même, répondre à plusieurs questions par lui-même. Pour la semaine suivante, les devoirs se limitaient à deux tâches simples : situer la période de Babylone et traduire un nombre en écriture cunéiforme. La correction de ces questions a permis de faire, le lundi suivant, un petit rappel sur ce qui avait été vu.

Séquence 2 : Méthode par les rectangles. Étape 3. À la maison.

Il fallait maintenant comprendre comment les Babyloniens étaient parvenus à cette valeur. L'une des hypothèses formulées (Wikipédia) est la construction d'une suite de rectangles d'aire égale à 2, qui converge vers un carré de côté $\sqrt{2}$; ce que l'on appelle méthode de Héron.

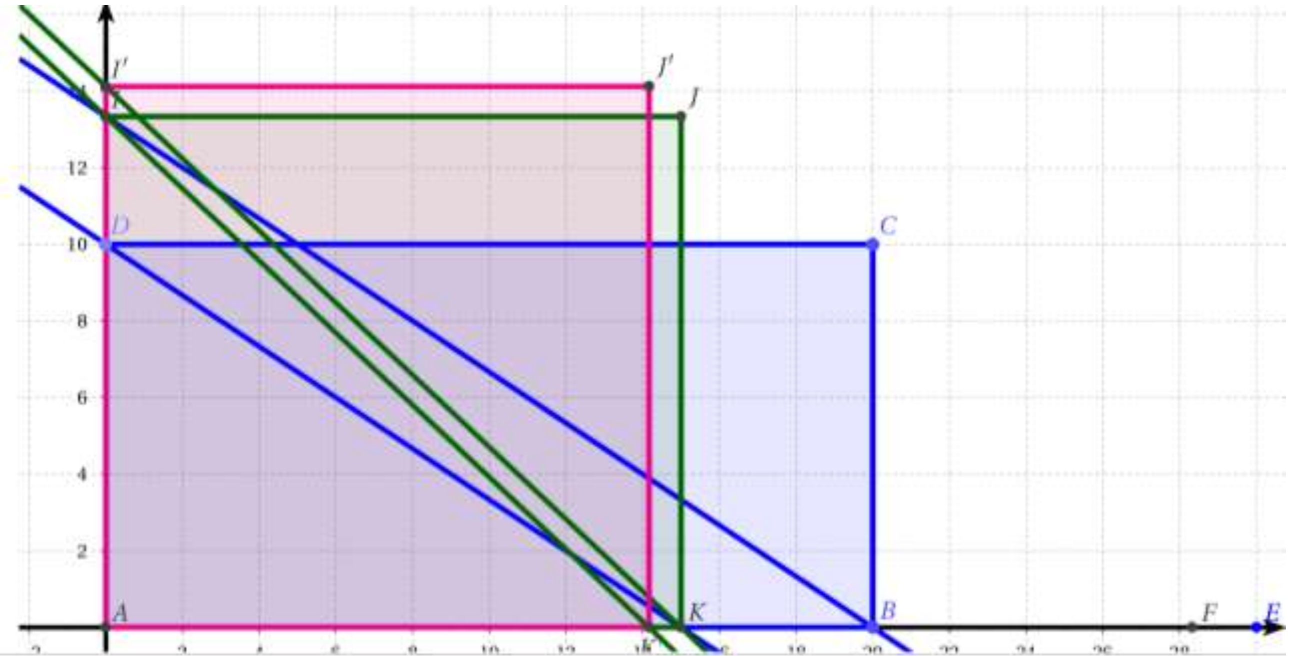


On approche le carré limite avec une grande précision en trois étapes. J'ai proposé ce travail en Devoir Maison. Cependant, un temps de découverte en classe aurait été nécessaire. Il a fallu procéder, la veille du rendu, à des explications, à l'aide de GéoGebra, pour comprendre l'algorithme de construction suivant :

On considère le programme de construction suivant

1. Construire un rectangle ABCD avec AB = 2 dm et CB = 1 dm.
2. Placer E sur la demi-droite [AB), hors du segment [AB], tel que : BE = CB.
3. Placer K, le milieu de [AE].
4. Construire I, l'intersection de la droite (AD) et de la parallèle à (KD) passant par B.
5. Construire le rectangle AIJK.
6. Répéter deux fois les étapes 2 à 5, en nommant progressivement les nouveaux points.

On obtient alors le résultat :

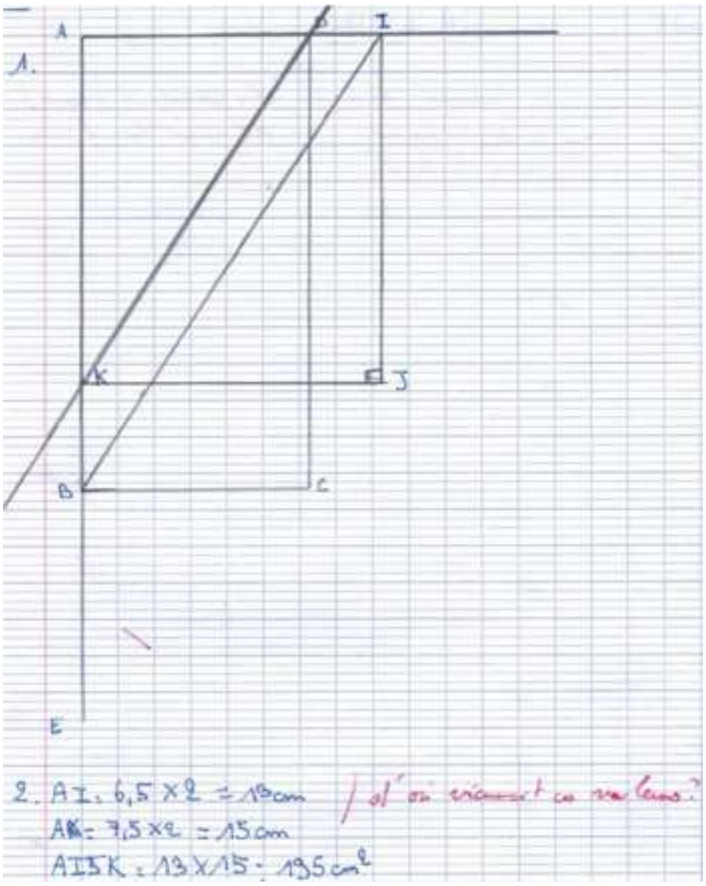


Dans l’instruction 6, la deuxième répétition est très délicate à réaliser, y compris en géométrie dynamique. Pourtant, il est nécessaire de prendre conscience de cette difficulté pour comprendre l’efficacité de la méthode.
Le travail ne se résumait pas à la construction. Il fallait aussi répondre aux questions :

Questions :

1. Effectuer le programme de construction jusqu’à l’étape 5 sur feuille, jusqu’à l’étape 6 sur GeoGebra.
2. Calculer les longueurs AI et AK. Quelle est l’aire du rectangle AIJK ?
3. Quelles sont les dimensions et les aires des deux autres rectangles construits ?
4. Comment obtenir la longueur AI par une autre méthode ?

Hormis les répétitions inhérentes à ce genre d’exercice, les devoirs ont donné des productions assez variables. Dans plusieurs cas, la question 2 s’est limitée à la mesure à la règle des dimensions et à l’utilisation de la formule de l’aire du rectangle. Bien sûr, l’énoncé aurait pu les inciter davantage à expliquer leur démarche, mais on peut être en droit d’attendre d’un élève de Lycée, en fin de Seconde et en devoir maison, de prendre le temps de rédiger :



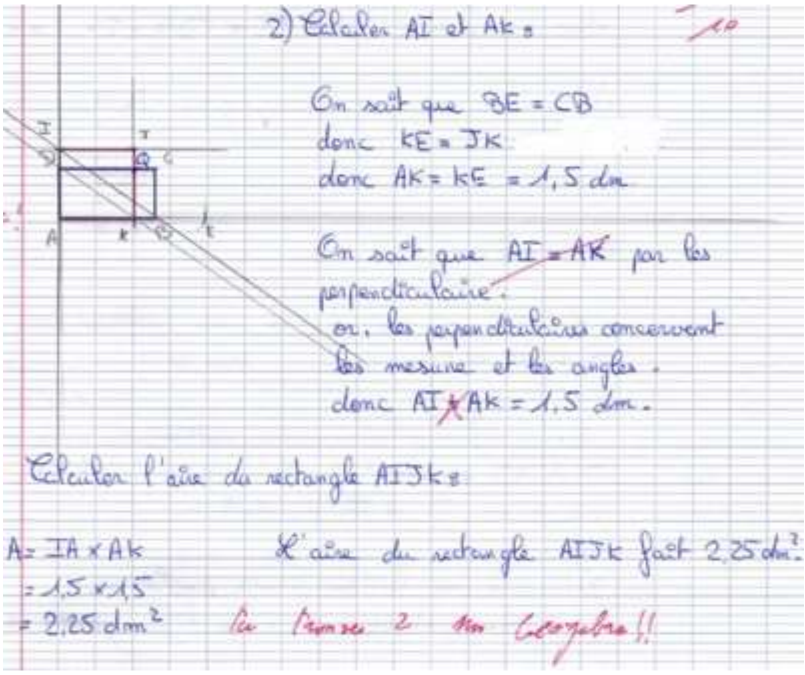
L’élève n’a ici même pas entamé de démarche de recherche. C’est décevant pour quelqu’un qui réussit d’habitude plutôt bien.

D’autres ont amorcé un début d’explication très décousu :

AB = 2 dm
CB = 1 dm
CB = BE
KD // BI
AB = DC
AD = BC
AK = KE
K est le milieu de [AE]
AK = IJ
AI = KJ

Tu ne réponds pas aux question !

Il arrive régulièrement que nos élèves oublient la question posée et terminent leur travail sans y répondre. L’énoncé demandait des valeurs qui n’apparaissent nulle part : l’aspect communication fait défaut dans ce travail.
Chez d’autres, on trouve des problèmes de cohérence :



2) Calculer AI et AK.

On sait que BE = CB
donc KE = JK
donc AK = KE = 1,5 dm

On sait que AI = AK par les perpendiculaire.
or, les perpendiculaires conservent les mesure et les angles.
donc AI = AK = 1,5 dm.

Calculer l'aire du rectangle AIJK.

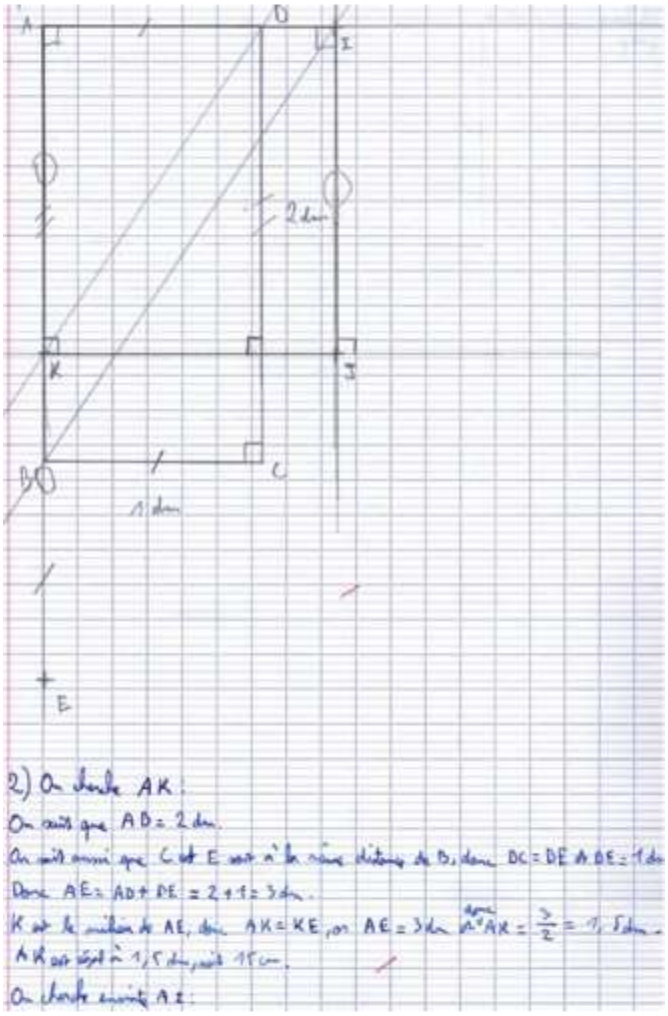
A = IA × AK
= 1,5 × 1,5
= 2,25 dm²

L'aire du rectangle AIJK fait 2,25 dm².

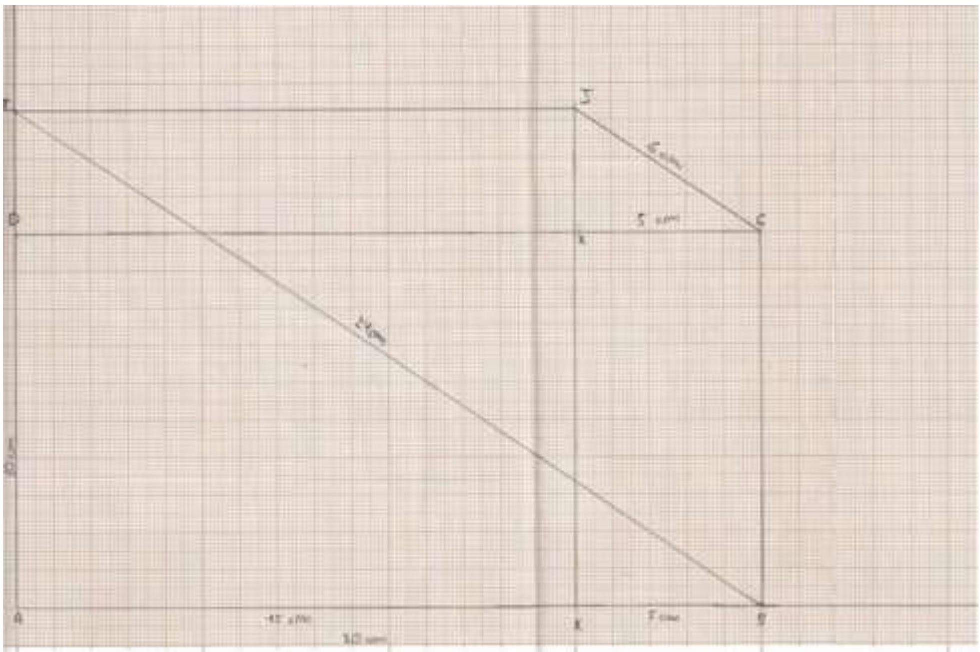
Tu trouves 2 sur Geogebra !!

Comme, précisé en rouge, la figure GeoGebra de l’élève lui montrait que l’aire du rectangle devait être 2. Il s’est fié aux longueur mesurées sur sa figure, trop petite (échelle 1:10 relativement à l’énoncé) et passe à côté du résultat. La compétence Raisonner doit encore être travaillée.

On en trouve aussi qui ont bien compris ce que le professeur attendait :



Enfin, cet élève a développé beaucoup de compétences mathématiques dans son travail, mais s'est complètement fourvoyé en misant tout sur le théorème de Pythagore, qui a une très forte cote chez nos élèves, alors que j'avais en évidence l'intérêt de travailler avec Thalès :



②. La longueur de AK est de 15 cm. Car AB = 20, BC = 10 et BC = BE donc le segment AE vaut 30 cm. Comme le point K est le milieu de AE, la longueur de AK est de 15 cm. 30 ÷ 2 = 15 cm.
Pour calculer la longueur de AI, il faut appliquer le théorème de Pythagore :
AIB est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore : $AI^2 = IB^2 - AB^2$.
On connaît la longueur de BI, après l'avoir mesurer, 24 cm.

Comment ?

$AI^2 = BI^2 - AB^2$

$AI^2 = 24^2 - 20^2$

$AI^2 = 176$

$AI^2 = \sqrt{176}$

$AI^2 \approx 13,3$ cm

La longueur de AI est de 13,3 cm.

Il reste beaucoup de choses à dire sur le travail de ces élèves. Les professeurs de Lycée, dont moi, ont encore à l'idée que les collégiens arrivent en Seconde avec une certaine habitude de la démonstration au sens classique du terme. Si la compétence « raisonner » est bien dans les attendus de la fin du cycle 4, il faut continuer de la faire grandir par la suite. Elle est, avec la compétence « chercher », au cœur de l'activité mathématique, lui donnant sens et richesse. En tout cas, il était important de la réactiver pour passer à la démonstration de l'irrationalité. Mais avant cela, un petit intermède de calcul s'imposait pour replacer ce travail de géométrie dans son contexte.

Séquence 3 : Calcul des valeurs successives des dimensions. Etapes 4 et 6. En salle info.

La méthode vue précédemment permet effectivement d'aboutir à la valeur de $\sqrt{2}$ indiquée sur la tablette.

Rectangle n°	Longueur	Largeur
1	2	1
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
3	$\frac{17}{12} \approx 1{,}417$	$\frac{24}{17} \approx 1{,}412$
4	$\frac{577}{408} \approx 1{,}414$	$\frac{816}{577} \approx 1{,}414$

Et $\frac{577}{408} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \frac{35}{60^4}$ soit 1,24.51.10.35 en écriture pointée.

Après avoir rappelé ensemble le contexte de l'étude (le devoir maison avait été rendu et corrigé la semaine précédente), nous avons modélisé les opérations successives sur les dimensions du rectangle : à chaque étape, la longueur est la moyenne des dimensions du rectangle précédent et la largeur est telle que l'aire du nouveau rectangle vaut 2. Le rectangle n°2 a été calculé à la main. Pour les rectangles 3 et 4, l'usage de la calculatrice s'est rapidement imposé. L'objectif était alors de savoir si l'on pouvait obtenir une meilleure précision.

Dans un premier temps, les élèves devaient reconstituer, dans une feuille de calcul, le tableau générant les dimensions successives des rectangles sur 20 étapes. Les formules à saisir dans les cellules ont été assez rapidement trouvées et ils ont pu constater l'invariance du résultat en quelques étapes. Toutefois, nous nous sommes mis d'accord pour dire que l'écriture des nombres dans le tableur était assez limitée dans ses décimales et qu'il fallait changer d'outil pour gagner en précision. Je leur ai donc proposé l'algorithme suivant :

Fonction racine2(p:flottant;L :flottant)
  L← ; *(à compléter)*
  l← ; *(à compléter)*
  Tant que $\mathrm{L} - l > p$, **faire :**
    L ← ;*(à compléter)*

    l ← ; *(à compléter)*
  finTantque
  Renvoyer …. *(à compléter)*

Nous avons pris le temps d'expliquer le rôle de chaque variable et la condition de boucle. Ils devaient compléter les lignes et me montrer leur algorithme avant de le programmer en Python. Il n'était pas question de corriger la justesse de ce qu'ils avaient ajouté, l'exécution du programme permettrait de valider ou non leurs instructions ; je voulais qu'ils aient réfléchi avant de taper du code. Le travail sur tableur les a bien aidés à trouver les instructions de la boucle. Les conditions initiales n'ont pas présenté de difficultés particulières non plus. Les plus rapides ont obtenu les résultats attendus et on s'est aperçu qu'il fallait modifier l'algorithme pour qu'il renvoie les deux dimensions et non la longueur comme c'était suggéré. Le manque d'aisance des élèves avec la programmation en a gêné certains pour arriver au bout de cette activité dans le temps imparti.
Ce travail n'a pas fait l'objet d'une évaluation ou d'un rendu particulier.

Séquence 4 : Démonstration de l'irrationalité. Etape 7. En classe.

La séance informatique a permis de mettre en évidence que $\sqrt{2}$ était un nombre pourvu de plusieurs décimales et qu'on pouvait en obtenir une valeur approchée de plus en plus précise à l'aide de fractions dont l'écriture comportait de plus en plus de chiffres. Cette dernière séquence avait donc pour but de prouver qu'on ne pouvait pas trouver de fraction égale à $\sqrt{2}$.
On est donc parti de l'idée de trouver une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ égale à $\sqrt{2}$, point de départ commun à beaucoup de preuves par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Assez rapidement, on s'est mis d'accord pour dire que cela revenait à écrire : $p^2 = 2q^2$. J'avais traité, avant 2009, cette démonstration de deux manières, selon les années. Soit par la réflexion sur la parité de p et q, (a priori les nouveaux programmes de collège incitent à travailler ces notions) mais elle nécessite un certain niveau d'abstraction puisqu'on parle de nombres que l'on ne voit pas. Il y a 10 ans déjà, quelques rares élèves arrivaient à percevoir le fonctionnement de ce raisonnement

ainsi que sa pertinence. Soit par une étude du chiffre des unités de p et q pour établir que l'égalité ci-avant impliquait que les deux entiers ne pouvaient pas être premiers entre eux.

C'est cette deuxième version que j'ai retenue, mais elle suscita encore de nombreuses interrogations. Je me demande si un mélange des deux approches n'aurait pas été plus fructueux : étudier les chiffres des unités pour montrer que p et q sont pairs tous les deux. On peut aussi entreprendre une méthode plus géométrique en cherchant le triangle rectangle isocèle à longueurs entières le plus petit (voir sur Wikipédia ou sur la page GeoGebra de Christian Mercat). En tout état de cause, il me semble encore difficile de faire naître chez les élèves le besoin de prouver ce résultat. Je ne sais pas s'il crée chez eux autant de problèmes existentiels qu'en a eu Pythagore.

Bilan

Il existe encore d'autres pistes d'exploitation de ce nombre riche en propriétés mathématiques. Ce parcours d'étude et de recherche m'a permis de montrer aux élèves ce que peut être une étude mathématiques qui se fait dans la durée : celle du temps scolaire, celle de l'histoire des mathématiques. J'espère avoir enrichi leur culture historique et consolidé leur compétences de raisonnement et de calcul.

Annexes

Étape 5

Il manque, à mon sens, une preuve importante qui justifie le bien-fondé de la méthode babylonienne et que l'on peut traiter en classe de Seconde, c'est l'adjacence des suites de longueurs et de largeurs des rectangles successifs. Sans parler de suite, on peut établir que, si L et l sont les dimensions d'un rectangle donné et L' et l' celles du suivant, alors

$$l < l' < \sqrt{2} < L' < L.$$

En effet, comme $l < L$, $\frac{L+l}{2} < \frac{L+L}{2}$ donc $L' < L$. (relativement simple)

Par ailleurs, on a toujours : $L' \times l' = L \times l = 2$. Comme $L' < \mathrm{L}$, $L' \times l' < \mathrm{L} \times l'$ puisque $l' > 0$, donc $\mathrm{L} \times l < \mathrm{L} \times l'$ soit $l < l'$, puisque $\mathrm{L} > 0$. (un peu plus difficile)

Enfin, prouvons que $l' < \sqrt{2} < L'$.

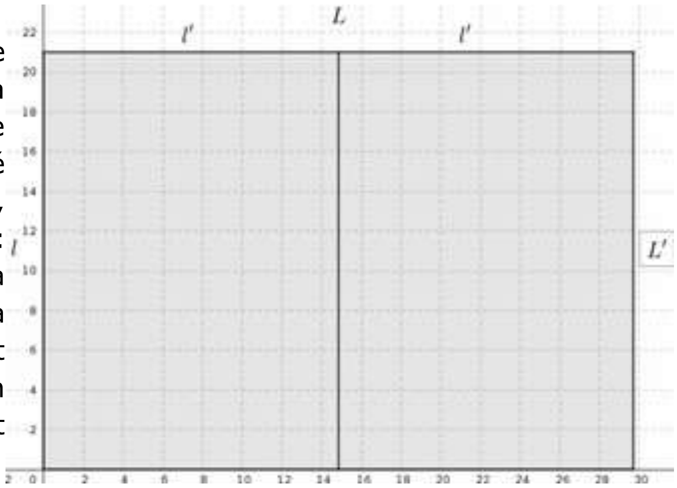
On suppose que $L > \sqrt{2}$.

Si l'on avait $L' \leqslant \sqrt{2}$, alors on aurait $\frac{L+l}{2} \leqslant \sqrt{2}$ soit $\frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) \leqslant \sqrt{2}$ soit $L^2 + 2 \leqslant 2L\sqrt{2}$ donc $\left(L - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant 0$ donc $\mathrm{L} = \sqrt{2}$ ce qui est en contradiction avec $L > \sqrt{2}$. On a donc : $L' > \sqrt{2}$ d'où $\frac{2}{L'} < \sqrt{2}$. On a ainsi prouvé que : $l' < \sqrt{2} < L'$. (à guider pour des élèves plus calés)

On ne pourra s'empêcher de déceler les récurrences implicites dans ce genre de raisonnement.

Prolongement

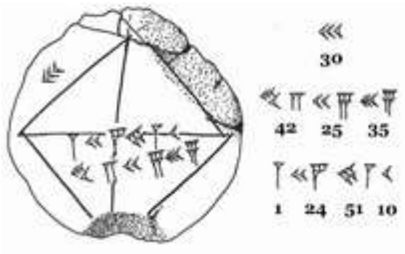
L’une des motivations pour continuer de s’intéresser à la racine carrée de 2 est sa présence dans les formats des feuilles en usage dans l’enseignement. Un standard a été donné pour le format A4 : « Les formats de papier A, B et C [...] ont été conçus pour vérifier [...] : une feuille coupée en deux parties égales par la largeur, produit deux feuilles semblables à l’original ; c’est-à-dire avec le même rapport longueur/largeur. L’aire étant diminuée d’un facteur 2, ceci n’est possible que si ce rapport vaut $\sqrt{2}$ »



On pourra prolonger le travail présenté ci-avant par l’excellente activité de François DROUIN intitulée « Une feuille A4 pleine de mathématiques », dont on peut lire le compte-rendu dans le Petit Vert 106.

Documents élève

Séquence 1



La tablette numérotée YBC 7289, dont le calque est reproduit ci-dessus, est datée sur la période -1900 à -1600 avant notre ère. Elle a été surnommée « La Pierre de Rosette des mathématiques ».

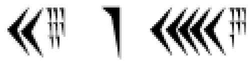
Cette tablette d’argile a été retrouvé lors de fouilles en Mésopotamie.
Les hommes utilisaient alors un système de numération en base 60 (base sexagésimale), avec les deux seuls symboles : le clou  (qui vaut 1) et le chevron  (qui vaut 10).
Par exemple, le nombre qu'ils  écrivaient : se lit 15.2.34 et signifie :

$$15 \times 60^2 + 2 \times 60 + 34 \text{ soit } 54\,154,$$

de la même façon qu'avec notre système décimal en base 10, l'écriture 379 signifie $3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 9$.

Pour les nombres décimaux, on écrivait, par exemple  pour 2,12.30 (au lecteur de savoir où placer la virgule !!) ; ce qui donne $2 + \frac{12}{60} + \frac{30}{3600}$ soit $2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{120} = \frac{265}{120}$ soit environ 2,21.

À la maison :

Quelles sont les civilisations en Mésopotamie en 2000 avant notre ère ? Quelles sont les grandes villes ?
Qui étaient les Sumériens ?
Faire une recherche sur la tablette Plympton 322.
Que vaut le  nombre ?

En classe :

Lecture des valeurs de la tablette YBC 7289 et déchiffrage.

Question :

Qu'avaient découvert les Babyloniens ?

Pistes :

1. Décrire la figure représentée sur la tablette.
2. Convertir en base 10 les trois lignes de symboles :
   - sur la deuxième ligne, il y a trois nombres (chevrons – clous) et la virgule est placée après le premier ;
   - sur la troisième ligne, il y a quatre nombres, la virgule est située après le premier clou.
3. Que vaut la diagonale d'un carré de côté 30 ? Quel est la valeur du rapport de la diagonale par le côté ?

Séquence 2

Seconde 5
Devoir Maison n°8

La figure GeoGebra et le programme Python seront envoyés sur l'ENT.

Exercice 1 :

On considère le programme de construction suivant

1. Construire un rectangle ABCD avec AB = 2 dm et CB = 1 dm.
2. Placer E sur la demi-droite [AB), hors du segment [AB], tel que : BE = CB.
3. Placer K, le milieu de [AE].
4. Construire I, l'intersection de la droite (AD) et de la parallèle à (KD) passant par B.
5. Construire le rectangle AIJK.
6. Répéter deux fois les étapes 2 à 5, en nommant progressivement les nouveaux points.

Questions :

1. Effectuer le programme de construction jusqu'à l'étape 5 sur feuille, jusqu'à l'étape 6 sur GeoGebra.
2. Calculer les longueurs AI et AK. Quelle est l'aire du rectangle AIJK ?
3. Quelles sont les dimensions et les aires des deux autres rectangles construits ?
4. Comment obtenir la longueur AI par une autre méthode ?

Séquence 3

Pour obtenir la valeur de racine carrée de 2 inscrite sur la tablette, les chercheurs pensent que les Babyloniens ont construit des rectangles successifs, comme vu dans le Devoir Maison n°8 :

A chaque étape,
la longueur du nouveau rectangle est la moyenne des dimensions du précédent ;
la largeur est telle que l'aire du nouveau rectangle est 2.

À la première étape, la longueur est 2 et la largeur est 1.
À la deuxième étape, la longueur est : et la largeur est :

À une étape quelconque, la longueur est L et la largeur est l.
À l'étape suivante, la longueur est donc : et la largeur est :

On admet que les longueurs diminuent et que les largeurs augmentent.

Sur tableur

On crée la feuille de calcul suivante :

	A	B	C
1	N° Etape	longueur L	largeur l
2	1	2	1
3	2	1,5	1,3333333333
4	3		
5			

Quelles sont les formules
en B3 ?
en C3 ?

Compléter la feuille sur 20 étapes.
Qu'observe-t-on ?
De quelle valeur se rapprochent la longueur et la largeur ?

Avec un programme

On veut maintenant choisir la précision p, de sorte que $\mathrm{L} - l < p$. Par exemple, pour $p = 10^{-5}$, si la différence $\mathrm{L} - l < 10^{-5}$, alors on peut avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

Fonction racine2(p:flottant;L:flottant)
  L← ; *(à compléter)*
  l← ; *(à compléter)*
  Tant que $\mathrm{L} - l > p$, **faire :**
    L ← ;*(à compléter)*

    l ← ; *(à compléter)*
  finTantque
  Renvoyer .... *(à compléter)*

Compléter les espaces vides de la fonction.
Implémenter la fonction en Python.
La tester avec différentes valeurs de p.

Séquence 4 (non distribué)

Rappel : Pour obtenir la valeur de racine carrée de 2 inscrite sur la tablette, les chercheurs pensent que les Babyloniens ont construit des rectangles successifs :
A chaque étape, la longueur du nouveau rectangle est la moyenne des dimensions du précédent : $L' = \frac{L+l}{2}$; la largeur est telle que l'aire du nouveau rectangle est 2 : $l' = \frac{2}{L'}$.

Valeurs successives de L et l

Pour les deux premiers rectangles, on a : $L_1 = 2$ et $l_1 = 1$ et $L_2 = \frac{3}{2}$ et $l_2 = \frac{4}{3}$.
Calculer les dimensions du troisième et du quatrième rectangle.

Le troisième : à la main

$L_3 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{17}{6}}{2} = \frac{17}{12}$ et $l_3 = \frac{2}{\frac{17}{12}} = 2 \times \frac{12}{17} = \frac{24}{17}$

Le quatrième : à la calculatrice

$L_4 = \frac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{204}$ et $l_4 = \frac{2}{\frac{577}{204}} = \frac{408}{577}$

Ces valeurs sont de plus en plus proches du côté d'un carré d'aire 2 soit :
Tous les nombres obtenus sont des fractions d'entiers : on dit que ce sont des rationnels.

$\sqrt{2}$ est-il aussi un rationnel ?

Hypothèse : on suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel.
On peut alors écrire la fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels, premiers entre eux.
En déduire la relation entre p^2 et q^2
On considère le chiffre des unités de q, on veut connaître celui de $2q^2$.
Compléter le tableau :

Unité de q ou de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unité de q^2 ou de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
Unité de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

Quelles sont les chiffres des unités possibles pour p^2 ? **Conclure.**

Pour avoir $p^2 = 2q^2$, le seul chiffre des unités possible de p^2 est 0 (le seul qui soit présent dans les deux dernières lignes). On en déduit que p multiple de 10 et que q multiple de 10 ou de 5. p et q ne peuvent donc pas être premiers entre eux !
Il y a contradiction avec l'hypothèse donc elle est incorrecte donc √2 ne peut pas s'écrire comme une fraction d'entiers : on dit qu'il est irrationnel.

Bibliographie

A. GAYDON - G. WAEHREN « Racine de 2 à travers les âges » Petit Vert 102 et Petit Vert103.
APMEP brochure n°21 : « Pour une mathématique vivante en seconde » 1984
B. RITTAUD, sur racine de 2 :

- conférence Séminaire IREM de Paris 2006
- Gazette SMF 107 Janvier 2006
- « Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$ » (Le Pommier)

R. CARATINI Les mathématiciens de Babylone (Presses de la Renaissance)