LE PETIT VERT

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N°5	MARS 1986	Abonnement 4 n^{os} par an : 20 F

SOMMAIRE

Didactique

LES ERREURS EN MATHÉMATIQUES ET LA CONCEPTION DE L'APPRENTISSAGE

Par Jacques VERDIER

Toute situation scolaire d'apprentissage met en relation 3 éléments :

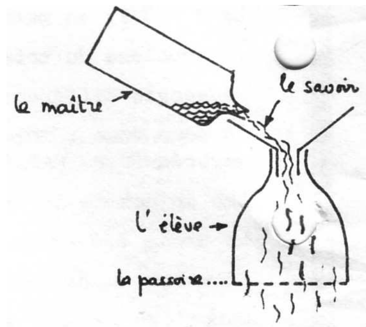
Je vais essayer de décrire trois conceptions de la relation maître/ élève/savoir, en m'appuyant sur deux articles, l'un de Michel MANTE [1], l'autre d'Alain BOUVIER [2].

1. LA CONCEPTION "CLASSIQUE"

Le maître dispense un savoir nouveau (en souhaitant, le plus souvent, que les élèves soient "vierges" dans le domaine abordé ; les redoublants étant priés de faire comme si !!!). Le <u>professeur enseigne</u>, au sens où il apporte les connaissances, que <u>l'élève reçoit</u>.
Le "fonctionnement" de l'élève peut être décrit par ce schéma

○ Avant : L'élève ne sait pas (tête vide) —$\boxed{\text{leçon}}$→ Après : L'élève sait (tête pleine) ●

G. GLAESER donne une version pessimiste de cette conception [3] :



Conséquences :

1. L'élève ne sait pas du tout où le professeur veut en venir.

2. L'élève fonctionne comme un "automath" [2], et produit un grand nombre d'erreurs, telles que :

$$(x - 1)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \text{ ou } x - 2 > 0$$

$$\text{ou } \frac{5}{4}+\frac{7}{5}=\frac{12}{9}$$

3. L'élève applique des règles implicites, par exemple

- tout problème a une solution ;
- toutes les données de l'énoncé doivent être utilisées (et tout ce qui doit être utilisé est dans l'énoncé) ;
- l'élève repère des "mots-clés" dans l'énoncé pour connaître l'outil à utiliser (ex : le mot triangle rectangle induira l'utilisation du th. de Pythagore, etc.).

Ces règles sont révélées lorsque l'on place l'élève en situation inhabituelle (ex. : recherche sur problème ouvert).

4. Les erreurs des élèves sont synonymes d'échec

- échec de l'élève qui n'arrive pas à "faire juste"
- échec du professeur qui n'arrive pas à communiquer, à "faire passer" son savoir : "[*considérer l'erreur*] *comme un parasite, un raté, un "malentendu qui ne vaut pas la peine qu'on s'y arrête, mais qui doit "être éliminé, et d'ailleurs disparaîtra de soi-même quand l'élève "aura compris.*" [4].

2. LA PÉDAGOGIE PAR OBJECTIFS

Le maître organise et planifie l'accès à un savoir clairement repéré et déterminé.
Le plus souvent, le savoir général est "découpé" en objectifs de savoir-faire, eux-mêmes redécoupés en sous-objectifs, qui sont <u>opérationnalisés</u> ; le schéma est une arborescence.
Exemple [5] TC 2 :

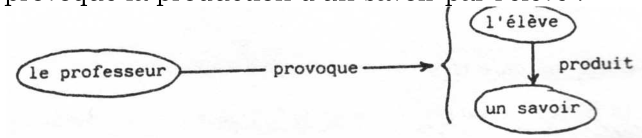
> Le candidat doit être capable d'exécuter un calcul dans lequel les opérations sont données, ou la chaîne d'opérations programmée.
> 1. Calculer :
> 1.1. Écrire un nombre décimal positif (<u>conditions</u> : le nombre a au plus 8 chiffres, la partie décimale a au plus 3 chiffres ; il s'agit des passages lettres ↔ chiffres, l'une des deux écritures étant fournie).
> 1.2. Ordonner une liste de nombre décimaux positifs (<u>conditions</u> : …)
> 1.3. Effectuer, sur des nombres décimaux positifs, une addition.
> etc ...

« *Formuler des objectifs pédagogiques consistera alors à repérer les capacités qu'est sensée promouvoir la formation, et sélectionner dans le corps des savoirs les contenus susceptibles d'assurer cette promotion.* (…)
Reformuler l'activité de l'enseignant en termes d'objectifs pédagogiques opératoires, ce n'est pas jeter a priori l'anathème sur les méthodes expositives. Mais c'est réexaminer leur bien fondé en fonction des résultats que l'on escompte chez les apprenants, et non plus an fonction des impressions qu'en tire celui qui est chargé de l'exposé. »
(D. Hameline [6]).

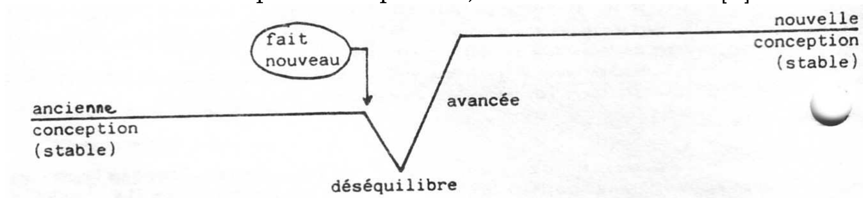
Conséquences :
1. On rencontre rarement, dans les référentiels, d'objectifs de haut niveau taxonomique, par exemple du niveau généralisation ou transfert (comme "réinvestir ses connaissances dans un domaine a priori éloigné" [7]).
2. Dans le cas où les objectifs sont communiqués à l'élève, celui-ci sait où il va. Il sait donc quand il est arrivé (même s'il n'est pas passé par le chemin prévu par le professeur). Y. Tourneur a bien montré en quoi cette communication des objectifs était un facteur positif de l'apprentissage [8].
3. Malheureusement, le plus souvent, l'élève n'est pas associé à la définition des objectifs, ni à l'élaboration des critères de réussite (on n'a donc pas une évaluation formative) ; on a affaire à une "P.P.O. de modèle impositif".

3. PÉDAGOGIE CENTRÉE SUR L'ÉLÈVE ET SUR L'ACTE D'APPRENTISSAGE :

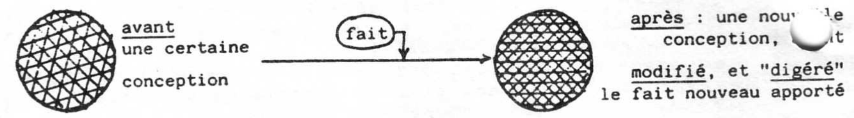
Le maître provoque la production d'un savoir par l'élève :



Cette conception s'est développée à partir des travaux des didacticiens (G. VERGNAUD, R. NEYRET à Grenoble, G. BROUSSEAU à Bordeaux), et s'appuie sur les travaux de PIAGET, de BACHELARD, etc.
On part d'une tête déjà pleine, avec une conception initiale "stable". L'apport d'un élément nouveau va provoquer un conflit, une rupture, une régression, voire une "catastrophe"... puis il y aura une avancée, suivie d'une nouvelle phase d'équilibre, suivant ce schéma [9] :



Le "fonctionnement" de l'élève peut se décrire ainsi :



Quel est alors le statut de l'erreur dans cette conception de l'apprentissage ? « *L'erreur significative devient l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse et inadaptée. Ces erreurs résistent, survivent, et même parfois après que le sujet a rejeté le modèle défectueux de son système cognitif conscient.* » (G. Brousseau [10]).

Par exemple $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, qui montre la prégnance du modèle distributif $(a + b)c = ac + bc$.

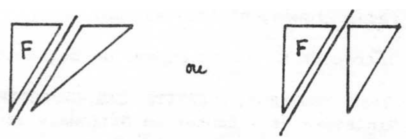
Quelles situations devons-nous mettre en place pour que l'élève puisse ainsi acquérir des connaissances ?

D'abord, nous ne pouvons pas attendre que les "didacticiens professionnels" aient mis au point des séquences d'apprentissage pour modifier notre enseignement.
Ce qu'il faut, c'est partir des erreurs des élèves, et travailler en équipe (on pourrait, là-dessus, donner un rôle qui ne soit pas simplement formel au conseil d'enseignement) en essayant de répondre à ces quelques questions :

*** quelle conception finale souhaitons nous que l'élève acquière ?**
Exemples :
- pour la symétrie orthogonale, on peut souhaiter que l'élève de sixième en garde l'idée de pliage ;
- pour les décimaux, qu'il ait l'idée que c'est un ensemble dense dans ***Q*** ou dans ***R*** (il y a des décimaux partout).

Il faudra donc s'interroger sur :
- le rôle de la notion étudiée dans la vie courante, dans les autres sciences; l'utilité de cette notion (cf. [11]) ;
- le rôle de cette notion en mathématiques (s'appuyer sur une étude épistémologique est souhaitable).

*** comment accéder aux conceptions initiales des élèves et aux représentations qu'ils se font des savoirs mathématiques ?**
C'est un des domaines qu'explorent les psycho-pédagogues. Les erreurs des élèves peuvent nous aider à les percevoir.
- Par exemple « le nombre qui suit 2,3 est 2,4 » ou encore « 2,3 + 5 = 2,8 » nous renseigne sur la conception qu'a l'élève du nombre décimal.
- Autre exemple, qui montre la conception que peut avoir l'élève de la symétrie orthogonale : Tracer le symétrique de F par rapport à la droite D donnera :



*** quel est le rôle du professeur dans l'apprentissage ?**
- il propose la situation ;
- au cours de la recherche, il ne valide ni n'infirme les hypothèses formulées : il donne cette responsabilité au petit groupe puis à la classe (cf. A.N. Perret-Clermont [12]) ; on retrouve là le rôle du professeur dans la gestion des problèmes ouverts (cf. [13]) ;
- il "officialise" certaines découvertes, ou propose des procédures que les élèves n'ont pas eu l'idée de les mettre en œuvre ;

– si la situation le permet, il peut dans certains cas apporter une aide individualisée pour répondre aux difficultés de certains élèves ;
– il donne des exercices d'application qui permetront de fixer les connaissances ;
– il organise l'évaluation et l'autocorrection (l'élève corrige son test soit seul, soit en groupe : cela aussi doit faire l'objet d'un apprentissage).

NB 1 . La régionale a invité Alain BOUVIER à nous faire travailler sur le rôle de l'erreur dans l'apprentissage en mathématiques (voir p. 16)

NB 2 . Nous proposons dans ce même numéro, page 13, un exemple de situation d'apprentissage centrée sur l'apprenant : activité liée à la proportionalité.

Citations et bibliographie :

[1] Michel MANTE (professeur au collège Jean Vilar de Villeurbanne et animateur IREM), "Des erreurs aux conceptions de l'apprentissage" in "Sans tambour ni trompette", bulletin IREM-APMEP de Lyon, n*27-37. juin 1985.

[2] Alain BOUVIER (maitre-assistant en Math. à Lyon I, animateur IREN), "Ce que nous apprennent les erreurs de nos élèves", in Bulletin APREP n° 335, septembre 1982.

[3] Georges GLAESER, Université de Strasbourg, Cours de 3ème cycle de Didactique des Mathématiques, 1975.

[4] Michel SANNER, "DU CONCEPT AU PHANTASNE", P.U.F., 1983.

[5] Ministère de l'Education, "Les unités du domine D2. Référentiel de mathématiques", 1981.

[6] Daniel HAMELINE, "Formuler des objectifs pédagogiques". in Cahiers Pédagogiques, n° 148-149, mai 1976.

[7] Introduction au programme de mathématiques de la classe de seconde (B.O.)

[8] Yvan TOURNEUR, "EFFETS DES OBJECTIFS DANS L'APPRENTISSAGE", Bruxelles, Ministère de l'Education Nationale et de la Culture, 1975.

[9] Alain BOUVIER, in "Apprentissage et didactique", document IREM de n° 51, mai 1985.

[10] Guy BROUSSEAU, "Les obstacles épistémologiques et les problème en mathématiques", in Revue de Didactique Mathématique, n° 4-2, 1983.

[11] Ghislain CREUTZ, "COMMENT DEFINIR DES OBJECTIFS VALIDES DANS L'ENSEIGNEMENT', CRDP de Liège.

[12] Anne-Nelly PERRET-CLERMONT, "LA CONSTRUCTION DE L'INTELLIGENCE DANS L'INTERACTION SOCIALE". Peter Lang, Berne, 1979.

[13] IREM de Lyon. "LA PRATIQUE DU PROBLEME OUVERT". 1985.

Les incohérences de l'administration, centrale auront eu raison des

JOURNÉES NATIONALES 86

Nous avions prévu, depuis fort longtemps, d'organiser les Journées Nationales de l'Association les 1er, 2 et 3 septembre prochains à METZ. Or la date de la rentrée scolaire a été modifiée en février, et reportée au 3 septembre - pour les élèves. Il nous a donc fallu reconsidérer toute notre organisation, en tenant compte d'un certain nombre de faits :

- impossiblilité d'utiliser Restaurant et Cité Universitaires après le 15/9 ;
- impossibilité d'avancer les journées au dernier week-end d'août, à cause des fêtes de la Mirabelle (il aurait fallu supprimer la conférence "grand public", le banquet, la réception à l'Hôtel de Ville, les visites, etc. et travailler en plein carnaval, la ville étant totalement désorganisée).
- impossibilité, en principe, d'avoir une autorisation d'absence en septembre.

Nous avons sollicité une autorisation exceptionnelle d'absence en arguant du fait que le Ministère a modifié très tardivement son calendrier. Si cette autorisation est accordée, les journées nationales auront lieu les

JEUDI 11, VENDREDI 12 & SAMEDI 13 SEPTEMBRE

L'organisation est déjà bien avancée, la première réinion de l'équipe organisatrice aura lieu le 12/4 à MET

Entre autres ex

- acc
- s'o
- col ... es accusés de récep
- rés
- fai
- etc ... ns besoin de beau ... nt la quinzaine préc ... épondre à des lettr ... ns, préparer le fléch ... c. Pendant les jour ... rmanences au secr ... e dès que tout sera

Nous appelons ... ra lieu :

Dernière minute :
Les Journées nationales n'auront pas lieu à METZ en septembre.
L'autorisation exceptionnelle n'a pas été accordée.

Si vous ne pouvez assister à cette réunion, merci de contacter daniel Vagost, Groupe scolaire « Les Saules », 54130 BOUSSE, en lui précisant vos coordonnées, vos moments de liberté, et le type d'aide que vous pouvez nous apporter.

Pour ques ces Journées nationales soeint un réussite, nous comptons sur vous.

Le Comité de la Régionale, le 10 mars 86.

PAGF (MATH)

Monsieur ROUSSELET, chef de la Mission Académique de Formation, a envoyé ses instructions concernant la préparation du P.A.G.F. Pour les mathématiques, les I.P.R. ont organisé deux réunions, les 5 et 12 février, la seconde étant destinée à "classer" les offres de formation.
Voici la liste des offres qui ont été proposées au cours de ce groupe de travail ; ce qui ne veut pas dire - l'expérience de l'an passé le prouve - que ces offres ont une chance d'être retenues : le "couperet" financier est impitoyable.
Toutes les offres, sauf une, émanent de l'I.R.E.M.

1. COLLÈGES

1.a. Stages "lourds" (l jour de présentation et de mise au point des objectifs, 5 jours consécutifs de stage avec remplacement prévu + délai de 2 à 4 mois pour l'expérimentation en classe + 2 jours de stage pour le suivi et l'évaluation).

- PEDAGOGIE DIFFERENCIEE EN MATHEMATIQUES
- GEOMETRIE PLANE ET GEOMETRIE DANS L'ESPACE
- UTILISATION DES CALCULATRICES DANS LES ACTIVITES NUMERIQUES ET STATISTIQUES
- LE TRAVAIL SUR FICHES EN ACTIVITES NUMERIQUES ET GEOMETRIQUES ($6^e/5^e$)

Un stage est proposé par 1'E.N. (stage de 6 fois 1 jour) :

- INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES

1.b. Stages "légers" (stages locaux de deux demi-journées, organisés en réponse aux demandes d'équipes d'établissement ou de secteurs)

- ACTIVITES NUMERIQUES ET GEOMETRIQUES EN $6^e/5^e$: FORMATION AUX TECHNIQUES DE BASE
- UTILISATION DES TRANSPARENTS ET DIAPOSITIVES EN 1^{er} CYCLE
- UTILISATION DES CALCULETTES AU COLLEGE
- GEOMETRIE DANS L'ESPACE ET RAISONNEMENT

2. LYCEES

2.a. Stages de foramation "mi-lourds" (environ 25 h. au total, sans remplacement)

- CONDUITE DE LA CLASSE ET SITUATIONS D'APPRENTISSAGE EN MATH (8×½ j.)
- INITIATION A LA FABRICATION D'IMAGICIELS PEDAGOGIQUES (8×½ j.)
- ANALYSE ET PROGRAMMATION EN BASIC SUR MICROORDINATEUR (10×½ j.)

2.b. Stages "actualisation des connaissances"

- FORMATION AUX TECHNIQUES DE BASE DES STATISTIQUES MATHEMATIQUES (6×½ j.)
- FORMATION AUX TECHNIQUES DE BASE EN MATH. NUMERIQUES SUR MICROS (3×½ j.)
- LES GRANDS PROBLEMES DE LA GEOMETRIE ELEMENTAIRE (5×½ j.)

2.c. Stages "légers" (même principe de fonctionnement qu'en collège : cf 1.b)

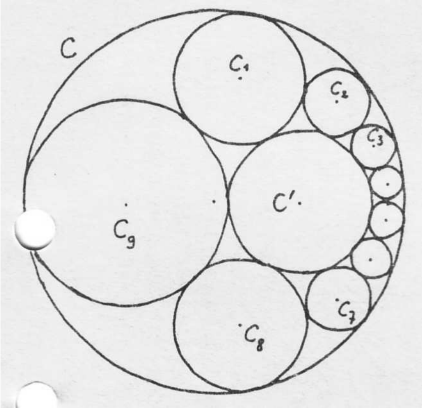
- UTILISATION DES ORDINATEURS DE POCHE PROGRAMMABLES EN BASIC
- GEOMETRIE ET RAISONNEMENT EN SECONDE ET PREMIERE
- ANALYSE ET RAISONNEMENT EN lère S-E ET EN TERMINALE
- ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ET GRAPHISME SUR MICROORDINATEUR

3. Formations INTERCYCLES

- LIAISON 3ème/2nde DANS LES DISCIPLINES FAISANT APPEL AUX MATHEMATIQUES (stage "léger", donc organisé en réponse aux demandes, par exemple celles des G.P.A.D.).

Seuls les stages "légers" seront décentralisés ; les autres stages auront lieu pratiquement tous à NANCY, quelques uns à METZ.

PROBLEME DU TRIMESTRE N°5



Soient deux cercles (C) et (C'), (C') appartenant à l'intérieur de (C). On trace (C_1), tangent intérieurement à (C) et extérieurement à (C'), puis un cercle (C_2) répondant aux mêmes conditions mais en plus tangent à (C_1), puis un cerc1e (C_3) distinct de (C_1) répondant aux mêmes conditions mais en plus tangent à (C_2), etc. Il peut arriver que la chaîne se reforme : (C_n) tangent à (C_1). Démontrer que, si cela est, cela se produit quelle que soit la position donnée initialement à (C_1).

Ce problème est proposé par André VIRICEL, 16 rue de la Petite Haye, 54600-VILLERS LES NANCY. Lui faire parvenir vous solutions.

Nous publions. à la page suivante, un article extrait du n° 239 des CAHIERS PÉDAGOGIQUES. Ce numéro des CAHIERS est entièrement consacré à LA PÉDAGOGIE DIFFERENCIÉE. La Rédaction des CAHIERS PÉDAGOGIQUES nous a aimablement autorisés à publier cette page et invite les lecteurs du PETIT VERT à l'afficher dans leur salle des profs, à la faire circuler, à en discuter avec les collègues.

La pédagogie différenciée : l'essentiel en une page

Le principe de base qui doit présider à la mise en place de la pédagogie différenciée consiste à multiplier les itinéraires d'apprentissage en fonction des différences existant entre les élèves, tant sur le plan de leurs connaissances antérieures, de leurs profils pédagogiques, de leurs rythmes d'assimilation, que de leurs cultures propres et de leurs centres d'intérêt.
Cette prise en compte de l'élève dans le processus d'appropriation des connaissances n'exclut en rien la poursuite d'objectifs communs ; elle en est, au contraire, la condition. C'est pourquoi la différenciation, si elle doit s'appuyer sur les ressources propres de chacun, ne doit pas renoncer à élargir celles-ci. Aussi, pour éviter d'éventuels processus d'enfermement, il importe que le processus de différenciation n'occupe pas, pour chaque élève, la totalité du temps scolaire dans une discipline : il sera ainsi en mesure, à la fois, de travailler selon la méthode qui lui convient et d'étendre son répertoire méthodologique ; l'articulation entre ces deux temps étant constitué par un objectif clairement identifié.

On peut distinguer plusieurs cadres d'organisation de la différenciation.

1. Dans la classe, par chaque professeur, dans sa discipline :

a) **Différenciation successive** : elle consiste à utiliser successivement différerents outils et différentes situations d'apprentissage de manière à ce que chaque élève ait le maximum de chances de trouver une méthode lui convenant. Ainsi, on pourra varier les outils et les supports, utiliser l'écriture, la parole, l'image, le geste, l'informatique, etc. On pourra également varier les situations : exposé collectif, travail individualisé, monitorat, travaux de groupes. Dans cette forme de différenciation, le maître conserve une progression collective mais alterne les méthodes utilisées.

b) **Différenciation simultanée** : celle-ci, qui ne peut s'effectuer que sur une partie du temps scolaire, consiste à distribuer à chaque élève un travail correspondant, précisément, à un moment donné du programme, à ses besoins et à ses possibilités : exercices d'entraînement sur une question mal comprise, reprise d'une notion, exercices d'enrichissement, etc. Cette forme de différenciation est particulièrement nécessaire dans les disciplines comme les Lettres où les compétences à acquérir sont multiples et les niveaux des élèves très différents sur chacune d'entre elles (orthographe, grammaire, rédaction, lecture, expression orale, culture littéraire, etc.). Elle est cependant possible dans l'ensemble des matières si l'on s'efforce d'adapter les méthodes proposées à chacun des élèves (tel élève travaillera sur une fiche ou à l'aide d'un didacticiel pendant que tel autre travaillera à partir de manipulations et qu'un troisième bénéficiera de l'explication du maître).

Il est essentiel, dans cette forme de différenciation, de disposer d'outils rigoureux pour éviter la dispersion : on établira, à cette fin, des **plans de travail individuels** ou des **contrats** qui feront l'objet d'évaluations régulières.

2. Pour plusieurs classes, dans une discipline donnée

Il est possible, pour une équipe de professeurs d'une discipline donnée, de diviser l'horaire scolaire hebdomadaire en deux temps :
- **un temps en classes hétérogènes** où sont définis les objectifs, organisés des apprentissages communs, effectuées les évaluations.
- **un temps en « groupes de besoins »** où les élèves sont répartis en fonction des besoins identifiés dans tel ou tel domaine et pris en charge par l'un des professeurs de l'équipe (les horaires des classes et des professeurs auront été placés en parallèle sur cette partie de l'emploi du temps). Selon les cas, la répartition des élèves pourra se faire sur l'un des critères suivants :

- Reprise de notions antérieures non ou mal assimilées ;
- Formation à des capacités méthodologiques (apprendre une leçon, faire un graphique, etc.) ;
- Exercices d'entraînement pour les élèVes plus lents et d'enrichissement pour les autres ;
- Reprisr de la notion par d'autres itinéraires (faisant, par exemple, plus appel à l'oral ou à la manipulation) ;
- Applications ou approfondissements dans différents domaines ;
- Utilisation de la diversité des personnes dans l'équipe pédagogique pour surmonter des difficultés relationnelles qui auraient pu apparaître avec tel ou tel élève.

L'intérêt d'une telle formule réside dans son extrême souplesse et la possibilité d'utiliser, suivant les besoins, l'un ou l'autre des critères de répartition. Elle requiert, évidemment, une concertation minimale des maîtres pour inventorier les besoins et élaborer les propositions pédagogiques correspondantes ; mais elle permet d'éviter de considérables pertes de temps dans la gestion de la classe.

3. Pour une classe, dans l'ensemble des disciplines :

On peut envisager d'utiliser la diversité même des disciplines comme un outil de différenciation. Les professeurs peuvent, en effet, s'entendre sur un programme de capacités transdisciplinaires à acquérir dans une période de temps donnée (par exemple : écoute, compréhension, application des consignes ; confection d'un exposé, d'une affiche, d'une fiche de lecture ; faire une analyse, une synthèse, un graphique ; constituer un dossier documentaire, etc.). Une fois le programme établi, les élèves sont sollicités pour effectuer l'exercice dans la matière de leur choix. Ils doivent, bien évidemment, avoir atteint toutes les capacités requises et le conseil de classe devra s'en assurer.
Précisons enfin que la mise en place de la différenciation est inséparable d'une pédagogie de l'autonomie : en permettant à l'élève d'ajuster progressivement des moyens à des fins, elle lui permet de devenir de plus en plus lucide et responsable dans la gestion de son travail scolaire.

(Cahiers Pédagogiques)

lu pour vous

THEORIE SEMI-GRAPHIQUE DES ESPACES MARBRES

Il aura fallu plus d'un an pour que soit enfin traduit en français le remarquable ouvrage de Thomas R. AVRIL et Clarence W. POISSON (1) sur les espaces marbrés.

Contrairement à ce que pourrait laisser penser son titre rébarbatif, ce livre est à la portée de tous les enseignants de mathématiques et se lit comme un "thriller"

Dans une première partie, T. R. AVRIL nous montre comment, depuis Archimède, Médias de Cnirne et Polyrode de Némée, s'est forgée la notion d'espace feuilleté (en insistant tout particulièrement sur la topologie feuilletée de Bolzano et d'Azertyu, point "culminant" du chapitre 7). Si vous avez ouvert le livre le soir après le J.T. de 20 heures, il vous faudra attendre au moins 23 heures - fin du chapitre 8 - avant d'espérer souffler un peu et relâcher votre attention.

Le chapitre 10, qui introduit la seconde partie, est assez ardu pour un non-spécialiste ; mais il peut être "sauté" sans inconvénient : il ne contient que les fondements théoriques et les définitions des structures marmorescentes transfinies récursives et des attracteurs semiétranges.

De la deuxième partie, signée C. W. POISSON, le moins qu'on puisse dire est qu'elle m'a passionné. Tout s'enchaine d'une manière lumineuse, et ouvre à nos esprits des horizons (mathématiques) que l'on oserait à peine soupçonner ! A lire ABSOLUMENT.

Le seul inconvénient de cet ouvrage : son prix ; mais la Régionale se l'est procuré, et pourra le prêter à qui le voudra (frais de port à votre charge, sauf si vous venez le prendre à l'I.R.E.M.).

J.P. Farséattre

(1) T. R. AVRIL & C. W. POISSON, "A THEORY FOR SEMI-CRAPHIC MARMORED SPACES", traduit de l'américain par Barbara BARBE, Editions S.P.F., Genève, 1986 (132,- F.S.)

Didactique

LES OBJECTIFS DANS L'APPRENTISSAGE

Cette situation est extraite du
Manuel de Didactique-Action (1)

Comment concevoir, comment organiser une suite de situations permettant d'atteindre des objectifs précis ?
La "Pédagogie Par Objectifs" ne permet pas de répondre à ces questions. Elle permiet cependant au formateur d'être plus conscient de son action, de la part qu'il réserve dans le temps à telle ou telle méthode, à telle ou telle aproche.

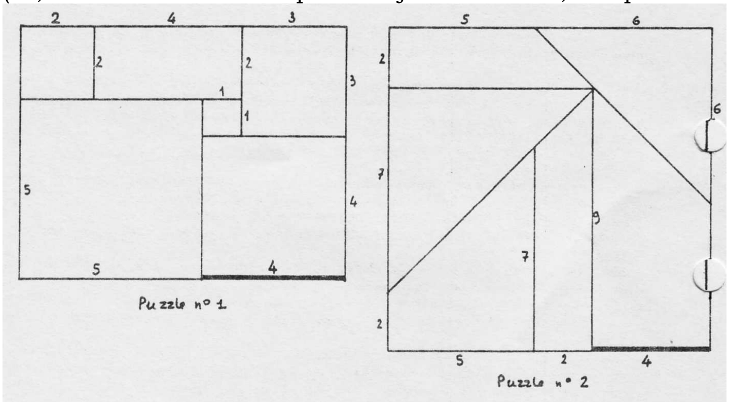
Quelle part donne-t-il à des situations d'apprentissage :
- qui partent des représentations, des savoirs des élèves ,
- qui visent des objectifs correspondants à des savoirs de base,
- qui proposent un support sur lequel l'élève puisse avoir une action et la formuler,
- qui permettent à l'élève de formuler des hypothèses, des plans d'action et de les vérifier par la suite,
- qui permettent à l'élève de faire des choix le mettant ainsi dans une situation de déséquilibre l'obligeant à choisir (dissonance cognitive),
- qui lui permettent de mieux sentir sa progresion dans l'apprentissage, en particulier dans la conception et la mise en œuvre de ses modèles, dans la validation et dans la limitation de leurs "modèles" (charmps d'utilisation),
- qui développent et exploitent la socialisation des élèves au sein du groupe (effet convivial de la situation) ?

Nous vous proposons ci-après une situation qui touche à chacun de ces points. Elle est extraite des recherches réalisées à Bordeaux et à Orléans (2) et s'adresse aussi bien à des enfants de CM2-sixième (puzzle n°2) qu'à des adultes en formation ayant un bas niveau de qualification (puzzle n°1).

Les objectifs terminaux visés à terme sont :
- utiliser les nombres décimaux dans les situations multiplicatives de type proportionalité ;
- utiliser les proporiétés de la linéarité pour résoudre des problèmes de proportionalité.

Dans la programation de situations visant ce type d'objectifs, celle qui est proposée ici se place chronologiquement dans les toutes premières, et a comme objectifs propres :
- faire utiliser par les élèves leurs modèles faux (en particulier les modèles additifs) ;
- faire rejeter ces modèles par les élèves en le justifiant ;
- faire utiliser une stratégie de résolution de problème lié à la linéarité.

Le matériel :
Un puzzle fait de six pieces et dont les dimensions sont entières et connues (ici, deux variantes : n°1 pour les jeines adultes, n°2 pour les sixièmes).



La situation :
Les élèves sont répartis en groupes qui seront ensuite divisés en 3 équipes de 2 (ou 3) élèves.
Après les avoir familiarisés avec les pièces du puzzle on demande à chaque groupe de construire un agrandissement de ce puzzle de telle sorte que le côté marqué en gras ait une longueur qui passe de 4 cm à 7 cm.
Chaque équipe de 2 élèves est chargée de construire deux pièces et l'on commente.

Le déroulement

Une première étape est le passage à l'action. Chaque équipe choisit une règle de construction et réalise les 2 pièces. Il y a ensuite assemblage des 6 pieces et, en cas de désaccord, mise au point d'une règle de construction commune aux trois équipes.
Lorsque la situation est proposée au bon moment en C.M. ou en début de sixième, les élèves utilisent presque systématiquement des modèles additifs erronés comme "on ajoute 3 à toutes les dimensions comme on l'a fait de 4 à 7" ou encore "on multiplie par 2 puis on retranche 1".
Dans l'analvse des erreurs et les rejets des modèles faux par les élèves, les arguments vont être affinés. Les calculs sont vérifiés, ils sont corrects, le découpage est correct, c'est donc bien la règle qui ne fonctionne pas. Certains vont même s'en convaincre pendant le découpage, en s'apercevant que la nouvelle pièce n'est pas semblable à celle du modèle.

Une seconde étape va permetre une justification institutionnalisée des rejets.

Chaque groupe présente sa stratégie et le groupe-classe formule des raisons de rejet.

L'enseigant leur fait écire un tableau de respondance entre les mesures de départ et les mesures du nouveau puzzle. Par exemple :

$2 \rightarrow 5$	$2 \rightarrow 3$
$4 \rightarrow 7$	$4 \rightarrow 7$
$5 \rightarrow 8$	$5 \rightarrow 9$
$6 \rightarrow 9$	$6 \rightarrow 11$
$7 \rightarrow 10$	$7 \rightarrow 13$
$9 \rightarrow 12$	$9 \rightarrow 12$

Ces tableaux sont rejetés en utilisant les propriétés de la linéarité qui seront réexploitées pour la phase collective.

La mise en place d'un modèle correct utilisant l'image d'une somme, l'image du produit d'une mesure par un scalaire, et finalement faisant apparaitre l'opérateur multiplicatif 7/4 faisant émerger le rôle de l'image de 1.
L'apprentissage le plus important ici se situe dans la première étape, justifiée dans la seconde : le rejet des modèles additifs ou pseudoadditifs inopérants pour ce type de problème. La situation a été construite pour cela.
Après cette phase où les élèves ont été déséquilibrés, la 3ème phase viendra les réassurer tout en participant à l'élaboration d'un nouveau savoir.

Pour conclure, nous ferons remarquer que, si l'observation de l'activité des élèves permet au formateur de constater si les objectifs liés à la situation ont été ou non ateints, ni la formulation des objectifs, ni l'observation de leur atteinte ne permet de juger de la pertinence de ces objectifs ni de leur ateinte par les mêmes élèves dans d'autres situations.
Le travail le plus important reste à faire : trouver de telles situations d'apprentissage qui partent des connaissances des élèves et en élaborent de nouvelles en détruisant ou en limitant le champ d'application des premières.

(1) MANUEL DE DIDACTIQUE-ACTION (Cedic-Nathan), 576 pages, à paraitre. Prix de souscription : 300 F ; prix de vente prévu : 407 F.
Une quarantaine d'auteurs (enseignants, formateurs, chercheurs) de plusieurs pays ont réuni leurs compétences pour proposer au enseignants de mathématiques un ouvrage d'une qualité et d'une richesse exceptionnelles.

Le MANUEL DE DIDACTIQUE ACTION est un outil indispensable pour la préparation de l'enseignement et la réflexion didactique. Son organisation, sa structure et ses nombreux index facilitent la consultation et l'accès rapide aux informations recherchées. Les thèmes abordés permettent de dresser un panorama complet des question essentielles liées à l'enseignement des mathématiques : introduction à la didactique, thèmes d'activité de formation, séquences d'apprentissage pour les élèes, pratiques pédagogiques : par objectif, par problème ouvert, par le travail autonome ..., travaux de didactique-action, etc ...
Pour souscrire. joindre chèque de 300 F à l'ordre de CEDIC/NATHAN. 6 Boulevard Jourdan, 75014 PARIS

(2) Revue de Didactique des Mathématiques, nos 1.2 et 2.1, Editions "La Pensée Sauvage", Grenoble.

le droit à l'erreur

Sur quoi nous renseignent les erreurs de nos élèves ? Comment en tenir compte dans notre enseignement ? Quels sont les "modèles" utilisée par les élèves ? Comment permettre à nos élèves de faire des mathématiques ?

Voici un certain nombre de questions auxquelles nous aimerions pouvoir répondre. C'est pourquoi l'A.P.M.E.P. a invité Alain BOUVIER (*), directeur de l'I.R.E.M. de Lyon, à animer une séquence de travail sur le droit à l'erreur.

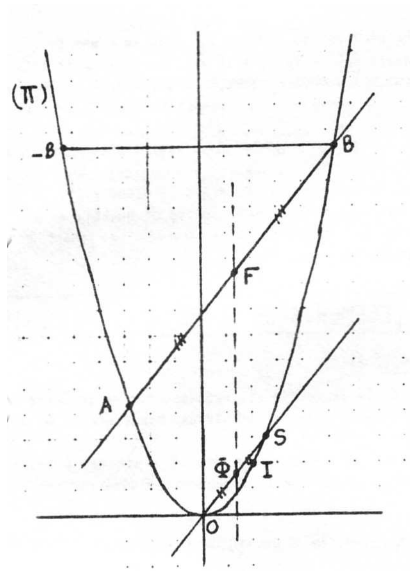
• LES ERREURS NOUS GÊNENT. POURQUOI ?
• ERREURS ET APPRENTISSAGE. RUPTURES, MODÈLES, REPRÉSENTATIONS.
• IDÉES DE TRAVAUX A MENER DANS LES CLASSES.

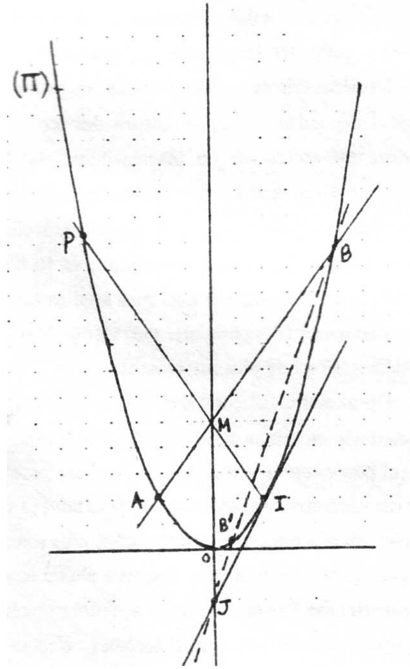
La séance, qui se déroulera de 14 heures (précises) à 17 h 30 comportera à la fois un exposé d'Alain BOUVIER et un travail en petits groupes à partir de documents.

MERCREDI 21 MAI à 14 h AU C.R.D.P.
99 rue de Metz. NANCY

(*) Alain BOUVIER a déjà publié plusieurs articles dans le bulletin de 1'A.P.M.E.P., dont « Que nous apprennent les erreurs de nos élèves ? » (n°335, septembre 1982, p. 657 à 699).
Il a lancé les travaux de DIDACTIQUE-ACTION, publiés depuis 1982 dans « Sans tambour ni trompette », bulletin de la Régionale Lyonnaise de l'A.P.M.E.P. (à consulter à l'I.R.E.M. de Lorraine).

Solution du problème précédent (proposé dans le n°4 page 5)





On prend comme repère la tangente au sommet et l'axe cette parabole Π, et comme unité l'abscisse du point I. Dans ce repère, l'équation de la parabole est $y = \alpha x^2$.

Soit φ l'application de **R** sur Π qui à tout réel *m* fait correspondre le point M de la parabole dont l'abscisse est *m*.

L'application φ est évidemment une bijection bicontinue. Il suffit donc de démontrer que φ(*a*+*b*) = φ(*a* +φ(*b*) et que φ(*ab*) = φ(*a*) × φ(*b*) pour que φ réalise un isomorphisme de (**R**, +, .) sur (Π, +, ×).

<u>Somme</u> : S est définie comme intersection de la parabole avec la parallèle à (AB) menée par O.

A a pour coordonnées (a ; αa^2) et B a pour coordonnées (b ; αb^2). Le coefficient directeur de la droite (AB) est donc $\alpha(a+b)$, et l'équation de la droite OS est $y = \alpha(a+b)x$. Cette droite recoupe la parabole d'équation $y = ax^2$ au point S d'abscisse $s = a+b$. C.Q.F.D.

Remarque : ceci est le cas général ; lorsque A = B, la droite (AB) est la tangente en A à Π, d'équation $y = 2\alpha a$, et l'on retrouve bien $s = 2a$.

<u>Produit</u> : La droite (AB) [ou, dans le cas particulier A = B, la tangente en A à Π] coupe l'axe de la parabole en M et la droite (IM) recoupe la parabole au point P cherché.

L'équation de (AB) est $y = \alpha(a+b)x - \alpha ab$. Les coordonnées de M sont (0 ; $-\alpha ab$).

L'équation de (IM) est $y = \alpha(ab+1)x - \alpha ab$. Les coordonnées ($p$, y_P) de P vérifient :

$$\begin{cases} y_P = \alpha(ab+1)p - \alpha ab \\ y_P = \alpha p^2 \end{cases}.$$

p vérifie donc l'équation $\alpha p^2 - \alpha(ab+1)p + \alpha ab = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = \alpha^2(ab-1)^2$, d'où les deux racines $\dfrac{\alpha(ab+1) \pm \alpha(ab-1)}{2\alpha}$, soit $p_1 = 1$ et $p_2 = ab$.

Dans le cas général, la solution recherchée est $p = ab$, car 1 correspond au point I. C.Q.F.D.

Cas particulier : lorsque $ab = 1$, il y a une racine « double », et la droite (IM) est la tangente en I à Π. Les points A et B sont alors « inverses » l'un de l'autre.

On a donc bien démontré que $(\Pi, +, \times)$ est un corps commutatif.
L'élément neutre pour l'addition est le sommet O. L'opposé d'un point est son symétrique par rapport à l'axe de la parabole.
L'élément neutre pour la multiplication est le point I choisi au départ. Pour trouver « l'inverse » d'un point B, on trace la tangente en I qui coupe l'axe de la parabole en J ; l'intersection de (AJ) avec la parabole est le point B^{-1} cherché.
Résoudre $A \times X + B = 0$ revient donc à construire $X = (-B) \times A^{-1}$.
La solution est unique si A n'est pas l'origine O. Si A = O et B $\neq$ O, il n'y a pas de solution ; si A = B = O, tout point de la parabole Π est solution.

N.B. J'ai essayé de chercher une solution purement géométrique. Je ne suis arrivé à démontrer ainsi ni l'assocoativité de $\times$, ni la distributivité. Si quelqu'un pouvait fournir une telle solution entièrement géométrique, elle serait la bienvenue…

Jacques VERDIER

---

feuilleton : suite

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DE CLAIRAUT

<u>NOTICE BIOGRAPHIQUE</u> :
Alexis Claude CLAIRAUT est ni à Paris en 1713, et y est mort en 1765. Il est entré à l'Académie des Sciences à 18 ans, après la publication de "RECHERCHES SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE", qui est le premier ouvrage de synthèse relatif à l'extension de la géométrie analytique aux figures de l'espace à trois dimensions.
En 1737, il est parti en Laponie avec MAUPERTUIS et CELSIUS pour déterminer la longueur d'un degré de méridien terrestre. C'est au retour de cette expédition qu'il a écrit ses "ÉLÉMENTS DE GEOMETRIE".
Il a prévu les dates de retour de la Comète de HALLEY, en appliquant la théorie universelle de l'attraction de Newton (en tenant compte de l'action de Jupiter et de Saturne).

<u>RÉSUMÉ DE L'ÉPISODE PRÉCÉDENT</u> :
- L'enseignement de la géométrie est rebutant car on commence par des définitions, axiomes, etc. Les applications "pratiques" ne viennent qu'à la fin de l'étude.
- CLAIRAUT se propose de remonter à ce qui avait donné naissance à la géométrie, et de refaire dans son enseignement la démarche d'invention.

La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie; et c'est en effet l'origine de cette science, puisque Géométrie signifie *mesure de terrain*. Quelques auteurs prétendent que les Égyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs héritages détruites par les débordements du Nil, jetèrent les premiers fondements de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue et de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporterait pas à ces auteurs, du moins ne saurait-on douter que, dès les premiers temps, les hommes n'aient cherché des méthodes pour mesurer et pour partager leurs terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulières les conduisirent peu à peu à des recherches générales ; et s'étant enfin proposé de connaître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formèrent une science d'un objet beaucoup plus vaste que celui qu'ils avaient d'abord embrassé, et à laquelle ils conservèrent cependant le nom qu'ils lui avaient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet ouvrage une route semblable à celle des inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains et des distances accessibles ou inaccessibles, etc. De là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premières, que la curiosité naturelle de tous les hommes les porte à s'y arrêter ; et justifiant ensuite cette curiosité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant.

On ne saurait disconvenir, ce me semble, que cette méthode ne soit au moins propre à encourager ceux qui pourraient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications ; mais j'espère qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher et à découvrir ; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes, c'est-à-dire de ces propositions où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir.

Si les premiers auteurs de mathématiques ont présenté leurs découverte en théorèmes, ç'a été sans doute pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avaient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes lecteurs à résoudre des problèmes, c'est-à-dire à chercher les moyens de faire quelque opération ou de découvrir quelque vérité inconnue, en déterminant le rapport qui est entre des grandeurs données et des grandeurs inconnues, qu'on se propose de trouver.

En suivant cette voie, les commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur tait faire, la raison qui détermine l'inventeur ; et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention.

On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces éléments, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, et de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourraient me faire un pareil reproche, d'observer que je ne passe légèrement que sur des propositions dont la vérité se découvre, pour peu qu'on y fasse attention. J'en use de la sorte, surtout dans les commencements, où il se rencontre plus souvent des propositions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui avaient de la disposition à la Géométrie, se plaisaient à exercer un peu leur esprit ; et qu'au contraire ils se rebutaient, lorsqu'on les accablait de démonstrations pour ainsi dire inutiles.

... à suivre ...

CALENDRIER DU TRIMESTRE

Samedi 12 avril à 9 h à METZ : équipe organisatrice des Journées.

Annulé

Mercredi 23 avril à 14 h à MET[illegible]ous les volontaires pour aider à l'organisation des Journ[illegible])

Mercredi 14 mai à 14 h à METZ : remise des prix, par TEXAS-INSTRUMENTS, aux lauréats de notre concours d'affiches. Rappelons que l'affiche primée sera l'affiche des Journées.

Mercredi 21 mai à 14 h à NANCY : Alain BOUVIER anime une réunion sur « LE DROIT A L'ERREUR » au CRDP (voir page 16).

Parution du n° 6 du PETIT VERT le 15 juin.

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 20 Francs (*)

NOM : ……………………………………………………………………………………………..

ADRESSE : ……………………………………………………………………………………….

Signature :

Désire m'abonner pour 1 an au « PETIT VERT ».

Joindre règlement à l'ordre de : APMEP-Régionale de Lorraine, CCP 1394-64 U NANCY.

(*) L'abonnement est gratuit (et automatique) pour les adhérents de l'A.P.M.E.P.

LE PETIT VERT

(BULLETIN DE LA RÉGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

Ce numéro a été tiré à 430 exemplaires
Directeur de la publication : Jacques VERDIER
N°CPPAP : 2 814 D 73 S.
Dépôt légal : mars 1986.

Imprimé au siège de l'Association :
IREM (Faculté des Sciences), Boulevard des Aiguillettes, VANDŒUVRE