

DANS NOS CLASSES**Une feuille « A4 » pleine de mathématiques**

François DROUIN I.U.F.M. de Lorraine, site de Metz

J'ai mis une première fois en œuvre ce qui suit avec mes élèves de troisième au collège de Saint-Mihiel. Depuis, j'enseigne à temps plein à l'I.U.F.M. et j'ai continué à présenter ce travail à mes étudiant(e)s préparant le Concours de Recrutement de Professeur des Ecoles. La publicité présentée dans ce Petit Vert (rubrique « Maths et Médias ») annonçant 141 % d'efficacité d'une nouvelle imprimante m'a donné l'envie de mettre au propre cette activité.

Matériel : deux feuilles A4 par personne. J'ai utilisé des feuilles de couleur pour les lecteurs du Petit Vert ; au collège et à l'I.U.F.M. les feuilles étaient blanches.



Une des feuilles A4 est pliée pour former deux rectangles superposables (de longueur égale à la largeur du rectangle initial), puis découpée, l'une de ses moitiés est placée et collée dans un coin de l'autre feuille A4. L'autre moitié est de même pliée puis coupée et collée, de la même façon que précédemment, dans le même coin. L'opération est renouvelée plusieurs fois. L'image ci-contre de pliages, découpages et collages, réalisés spécialement pour les lecteurs du Petit Vert, vous aidera à comprendre.

Les sommets opposés au sommet commun semblent alignés. Il semble qu'il y ait toujours proportionnalité entre la largeur et les longueur des rectangles collés. Mes élèves de collège constataient, en mesurant ce qui est nécessaire, que le tableau ci-après semblait

être un tableau de proportionnalité et repéraient un opérateur multiplicatif entre la première ligne et la seconde ligne environ égal à « $\times 1,4$ ».

Largeur des rectangles collés					
Longueur des rectangles collés					

Mes étudiant(e)s préparant le Concours de Recrutement de Professeur des Écoles sont des adultes, je leur ai fait rapidement utiliser des écritures littérales. « L » est la longueur d'un des rectangles. « l » est la largeur de ce rectangle. Le rectangle suivant découpé et collé aura pour longueur « l » et

pour largeur « $\frac{L}{2}$ ». Je considère comme vrai que les largeurs sont

proportionnelles aux longueurs donc $\frac{L}{\ell} = \frac{L}{\frac{L}{2}}$. D'après l'égalité des produits en

croix, j'en déduis $\frac{L^2}{2} = \ell^2$, c'est-à-dire $L^2 = 2\ell^2$.

L et ℓ sont des longueurs dont les mesures sont positives, donc $L = \sqrt{2} \times \ell$. A partir de ma feuille A3, je trouve donc des rectangles possédant cette propriété.

Retrouvons les dimensions d'une feuille A4

La feuille A0 est pour les papetiers une feuille d'aire 1 m^2 qui, pliée et coupée le long de sa « petite médiane » fournit deux rectangles « de même forme ». Ses longueur et largeur sont liées par la relation « $L = \sqrt{2} \times \ell$ ». Par pliages successifs selon la « petite médiane », nous obtenons des feuilles A1, A2, A3, A4, A5, ... possédant elles mêmes ces propriétés. Le rectangle A0 est un agrandissement du rectangle A1 à l'échelle $\sqrt{2}$, le rectangle A1 est un agrandissement du rectangle A2 à l'échelle $\sqrt{2}$, ..., le rectangle A3 est un agrandissement du rectangle A4 à l'échelle $\sqrt{2}$...

Recherche des dimensions des feuilles A0, A1, A2, A3, A4

La feuille A0 est un rectangle tel que $L = \sqrt{2} \times \ell$. Son aire est 1 m^2 , c'est-à-dire $10\,000 \text{ cm}^2$.

$L \times \ell = 10\,000$ donc $(\sqrt{2} \times \ell) \times \ell = 10\,000$, d'où $\ell^2 = \frac{10000}{\sqrt{2}}$.

Difficile pour mes élèves de troisième ou mes étudiant(e)s de travailler avec des racines carrées de racines carrées, nous avons donc travaillé à partir de l'affichage du résultat de ℓ^2 donné par la calculatrice.

La largeur est environ égale à 84,09 cm (à un dixième de mm près). La longueur est environ égale à 118,92 cm. Petit à petit nous avons rempli le tableau suivant. Le retour à la visualisation des rectangles collés en début d'activité a toujours été bien utile pour retrouver les dimensions du rectangle au format A_{n-1} connaissant les dimensions du rectangle au format A_n .

	Format A0	Format A1	Format A2	Format A3	Format A4
Longueur	118,92 cm	84,09 cm	59,46 cm	42,05 cm	29,73 cm
Largeur	84,09 cm	59,46 cm	42,05 cm	29,73 cm	21,02 cm
Aire	1 m^2	$\frac{1}{2} \text{ m}^2$	$\frac{1}{4} \text{ m}^2$	$\frac{1}{8} \text{ m}^2$	$\frac{1}{16} \text{ m}^2$

En arrondissant les dimensions au millimètre près, je retrouve les dimensions de la feuille A4 connues des utilisateurs de ses feuilles et vérifiables en mesurant.

Masse d'une de mes feuilles A4



Du tableau précédent, j'en déduis que 16 feuilles A4 ont une aire totale de 1 m^2 . D'après les indications repérées sur ma ramette de papier, 1 m^2 de ce papier pèse 80g.

J'en déduis qu'une feuille A4 pèse 5g. Dans une enveloppe « ordinaire » dont le papier utilisé a une aire inférieure à la feuille A4, je ne glisserai au

maximum que trois feuilles A4 pour un affranchissement à $0,58 \text{ €}$ ⁽¹⁾ afin que mon courrier ne soit pas taxé.

Les élèves et les étudiant(e)s ont été surpris de constater « la quantité de mathématiques » cachées dans les feuilles de papier utilisées habituellement. Le travail à propos de la masse d'une feuille leur a montré que ces mathématiques pouvaient leur servir dans leur vie de tous les jours (aspect important pour mes étudiant(e)s quelque peu fâché(e)s avec notre matière...). Je laisse aux lecteurs du Petit Vert le soin de faire trouver par leurs élèves pourquoi, sur ma photocopieuse, je programme 141 % pour passer du format A4 au format A3 et 71 % pour passer du format A3 au format A4.

Note de la rédaction : le Petit Vert est réalisé, depuis plus de 26 ans, en format A5 (environ 21 cm sur 14,9 cm). Chaque page a donc une aire de $1/32 \text{ m}^2$ exactement. La « version papier » est imprimée sur des feuilles A4 (papier 80 g) en recto-verso, et il est expédié dans des enveloppes dont le poids est compris entre 7,5 et 8 g. Combien de pages doit-il contenir au maximum pour pouvoir être affranchi à $0,75 \text{ €}$ ⁽¹⁾ (poids maximum 50 g en tarif économique) ?

Réponse : c'est l'année de naissance de Marcus Salvius Otho, empereur romain pendant seulement trois mois en 69, individu par ailleurs fort peu recommandable !

1 Tarif en vigueur en mars 2011