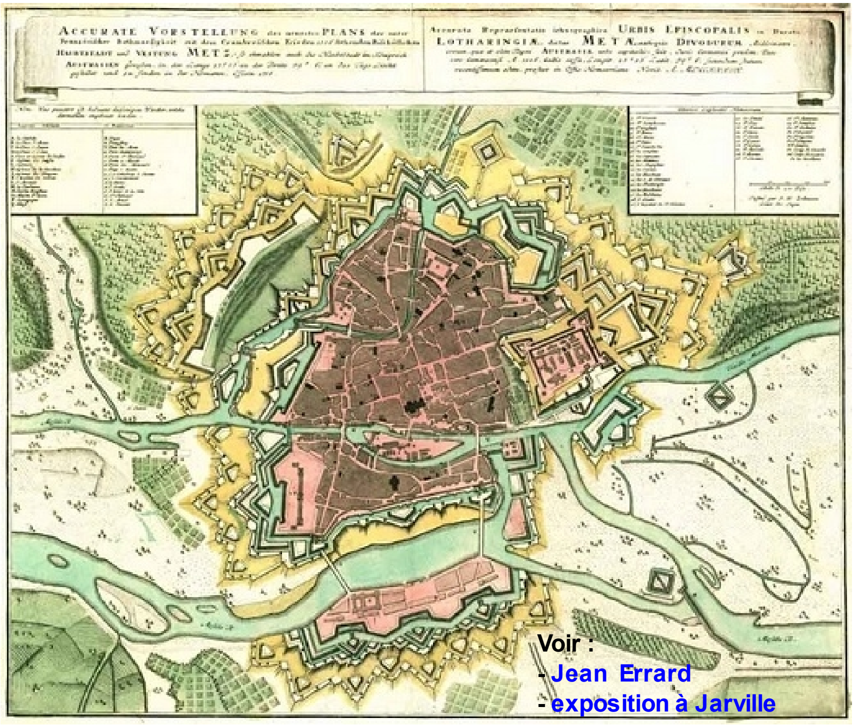
LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N° 115 | **SEPTEMBRE 2013**



Voir :
- **Jean Errard**
- **exposition à Jarville**

http://apmeplorraine.free.fr

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale Lorraine A.P.M.E.P.
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il paraît quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).
Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges entre les adhérents.
On y trouve un éditorial (généralement rédigé par un membre du Comité) et diverses annonces, les rubriques "problèmes", "dans la classe", "vu sur la toile", "maths et médias", "c'était il y a 25 ans", "maths et philo" et parfois une "étude mathématique". Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article, et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à jacverdier@orange.fr .

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève BOUVART, François DROUIN, Françoise JEAN, Walter NURDIN, Jacques VERDIER et Gilles WAEHREN. La maquette et la mise en page sont réalisées par Christophe WALENTIN.

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

« Le but de l'instruction est la fin de l'instruction, c'est-à-dire l'invention. L'invention est le seul acte intellectuel vrai, la seule action d'intelligence. Le reste ? Copie, tricherie, reproduction, paresse, convention, bataille, sommeil. Seule éveille la découverte. L'invention seule prouve qu'on pense vraiment la chose qu'on pense, quelle que soit la chose. Je pense donc j'invente, j'invente donc je pense : seule preuve qu'un savant travaille ou qu'un écrivain écrit. »

(Michel Serres, Le Tiers-Instruit, 1991)

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

retour sommaire

SOMMAIRE

retour sommaire

édito

De 1902 à 2013...

Ma nouvelle vie remplie d'activités non professionnelles a commencé le 31 mars. La météo maussade pendant les mois d'avril et mai m'a aidé à faire tri et rangement tant dans mon bureau que dans mon ordinateur : j'y ai retrouvé le texte d'une conférence d'Émile Borel à propos de la réforme des lycées de 1902.

En voici un court extrait (la conférence est téléchargeable à l'adresse indiquée en fin de cet éditorial).

« Il est, en effet, nécessaire d'arriver, non pas à multiplier les points de contact entre les Mathématiques et la vie moderne (ces points de contact sont innombrables et se multiplient chaque jour d'eux-mêmes), mais à mettre ces points de contact en évidence pour tous ; c'est le seul moyen d'empêcher que les Mathématiques soient un jour supprimées comme inutiles par voie d'économie budgétaire ; cette économie coûterait vite très cher à la nation qui la ferait ; mais, pendant quelques dizaines d'années, les choses continueraient à marcher tout de même, par routine, et il serait ensuite très long et très difficile de regagner le terrain perdu ».

Les rubriques « Maths et Médias » et « Maths et Philo », le compte rendu de séquences mises en œuvre dans l'option MPS (Méthodes et Pratiques Scientifiques) en Seconde, les conférences de nos Journées Nationales et Régionales, les échanges « Maths et Arts » sont des moments de mise en évidence de ces points de contacts évoqués par Émile Borel. Une nouvelle année scolaire commence : elle sera, je l'espère, propice à d'autres envies de rencontres « Maths et… », en particulier dans les nouvelles ESPÉ (Écoles Supérieures du Professorat et de l'Éducation) qui ouvrent leurs portes pendant ce mois de septembre.

Il y aura toujours de la place dans le Petit Vert pour évoquer ce qui permet aux élèves de ne plus poser sans cesse la lancinante question « M'sieur, à quoi ça sert les maths ? ».

http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

François DROUIN

retour sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

C'était il y a 25 ans

Dans le Petit Vert n° 15 (septembre 1988), ou pouvait lire, dans un article « ***Comment faire des mathématiques en 1ère S-E ?*** » :

> Un certain nombre de problèmes se posent dans la classe de 1ère S-E :
> 1. La motivation des élèves : quelles activités peut-on proposer pour "stimuler" la curiosité des élèves et leur donne envie de chercher en utilisant leurs acquis ?
> 2. L'oubli : les élèves ne savent pas réinvestir les connaissances et savoir-faire acquis dans les "chapitres antérieurs".
> 3. Les méthodes de travail : savoir transcrire un énoncé et déceler des hypothèses, ... (c'est-à-dire les problèmes de lecture) ; faire soi-même des fiches-résumé du cours,...
> 4. La démonstration : il semble que ce soit en 1ère S que 1'on commence vraiment à démontrer ; mais comment montrer aux élèves la nécessité de la démonstration ? Il faut un entraînement à la "mise à plat logique" des choses.

Nous pouvons nous poser la question : **Qu'en est-il aujourd'hui ?**

1. En 2013, pour motiver les élèves, les professeurs s'efforcent toujours de construire des activités développant le goût de la recherche de leurs élèves. Ils font, en particulier, appel à des outils TICE, peu présents en 1988. De plus ils essaient, peut-être davantage et conformément aux programmes, d'établir des passerelles avec les autres disciplines scientifiques. La connaissance des métiers scientifiques et de l'enseignement supérieur sont également des points d'appui utilisés pour donner du sens et de l'intérêt aux apprentissages des mathématiques du lycée.

2. L'oubli : il semble que les « progressions spiralées » largement utilisées maintenant dans l'enseignement secondaire en mathématiques aient contribué à atténuer ce phénomène d'oubli.

3. Les méthodes de travail ne sont plus considérées comme « allant de soi », intrinsèques aux mathématiques. Elles sont prises en compte de manière systématique par les enseignants et développées dans les manuels.

4. La démonstration est initiée dès la classe de sixième mais son apprentissage reste difficile tout au long du collège et du lycée. La réintroduction explicite de la logique au lycée n'est pas beaucoup prise en compte par les professeurs par manque de formation initiale à la logique et manque de formation continue pour son enseignement. L'usage de la calculatrice génère également des difficultés de statut des assertions : le lycéen peut valider un résultat grâce à un logiciel de calcul formel ou à l'aide d'une fonction statistique de sa calculatrice, mais ne peut s'autoriser à considérer comme une démonstration le fait qu'un logiciel déclare que des droites sont parallèles ou non.

VIE DE LA REGIONALE

JOURNÉE RÉGIONALE : 26 mars 2014

La Journée régionale des mathématiques aura lieu le mercredi 26 mars prochain, à la Faculté ses Sciences (sur le campus de Vandœuvre) le matin et au lycée Jacques Callot l'après midi.

APPEL À ATELIERS

Un des temps forts, gage de réussite de cette journée, est la présentation d'ATELIERS. Le but de ces ateliers est de permettre de partager, d'échanger, de transmettre, de susciter la curiosité, d'ouvrir des pistes, de débattre… sur des sujets en rapport avec les mathématiques et leur enseignement.

Ces ateliers doivent être **variés et nombreux** : il serait bon qu'il y en ait une vingtaine, et nous avons déjà quelques pistes. Nous lançons donc un appel auprès de tous les collègues qui voudraient en animer un. Ces ateliers se dérouleront l'après-midi, durant **1 h 20**, et pourront rassembler chacun de 20 à 30 participants.

Envoyez vos propositions le plus rapidement possible à jacverdier@orange.fr.

Nous comptons sur vous !

retour sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

Commission Lycée

La commission lycée de la régionale Lorraine s'est réunie le 1er juillet 2013 au lycée Varoquaux (Tomblaine). Vingt professeurs étaient présents, et quatre se sont excusés.

- Bilan du baccalauréat 2013

Sujet de S

Les capacités évaluées en probabilités sont principalement celles de première (sauf la probabilité conditionnelle). Les professeurs sont déçus de n'avoir aucune question sur les lois continues ; c'est une partie du cours qui a motivé les élèves, les exercices proposés dans le cours de l'année étant plus concrets et plus en relation avec les autres disciplines scientifiques.

Les sommes de suites en terminale sont très peu étudiées et les dernières questions sur les suites sont peu ou mal abordées.

L'exercice sur les algorithmes est mal réussi. Les lettres a et b utilisées dans la première partie de l'exercice et dans la deuxième partie comme des variables dans l'algorithme sont sources de confusion pour les élèves. Certains ont essayé de programmer l'algorithme sur leur calculatrice avec peu de succès et ont souvent considéré le test « m>1 » au lieu de « f(m)>1 ». Le tableau à compléter ne correspond pas à l'ordre de l'exécution de l'algorithme et ne comporte pas de ligne « f(m) » ; il est plus perturbant que facilitant.

Sujet de ES

Les exercices sont « creux » et évaluent peu de connaissances de première et terminale. Un candidat peut facilement obtenir 8/20 avec très peu de résultats corrects.

Les collègues déplorent qu'il n'y ait pas de spécificité pour les séries ES et L.

Baccalauréat général

Il y a beaucoup d'épreuves évaluées en contrôle continu (langues, EPS, TP) qui sont mangeuses d'heures. De nombreux cours sont perturbés ainsi.

retour sommaire

Sujet lycée Agricole

La réforme s'appliquera en 2013/2014. Sujet classique, pas de remarques particulières.

Usage de la calculatrice

Les exercices demandent d'avoir acquis une gymnastique de la calculatrice ; il y a trop de différentes procédures en fonction des machines.
On distingue deux étapes dans les exercices de probabilité :

- Savoir traduire de façon mathématique,
- Savoir utiliser sa calculatrice (moins intéressant à évaluer lors d'une épreuve nationale que lors d'épreuves locales d'évaluation des capacités expérimentales).

- Horaires de mathématiques au lycée

Les collègues présents étaient issus de treize établissements différents. Parmi ces 13 établissements, 7 bénéficient d'une heure à effectif réduit par semaine, 3 bénéficient d'1/2h à effectif réduit par semaine, 2 n'ont aucun groupe de ce type et un établissement ne comporte que des secondes à moins de 25 élèves. Toutes les premières S, sauf pour un établissement, dont l'effectif est supérieur à 25 ont une heure hebdomadaire à effectif réduit. La plupart des collègues déplorent surtout en première S une quotité hebdomadaire insuffisante pour « boucler » le programme dans des conditions satisfaisantes.

On note une très grande disparité pour la gestion des heures d'accompagnement personnalisé : disparité dans le compte des heures (heures annualisées ou non), disparité dans l'attribution des heures (variables d'ajustement pour le service des collègues ou non), disparité dans l'affectation (heures de DNL comptée comme heure d'AP en tant qu'approfondissement, heures d'AP utilisées pour des heures de cours « ordinaires »).

- Algorithmique, TICE

Il est nécessaire de définir un cadre plus précis pour l'algorithmique pour comprendre ce qui est attendu. On peut aussi imaginer un cadre au sein d'un établissement pour prévoir une progression des apprentissages des outils utilisés : tableur, calculatrice, etc.

retour sommaire

- Un début de réflexion sur le nouveau programme

- Remarques sur le programme de seconde :
  - Les élèves manquent beaucoup de pratique sur le calcul algébrique (gestion des parenthèses, …) et le calcul numérique (fractions, racines carrées,…). Des collègues présents précisent qu'ils mettent à profit l'accompagnement personnalisé pour travailler ces notions ; d'autres utilisent le calcul formel pour tester des solutions et en (re)dégager des règles de calcul.
  - Pour motiver les élèves, des exercices « concrets » semblent plus pertinents ; les tâches complexes du collège peuvent être une source d'inspiration dans la forme du travail demandé.
- Les points les plus délicats à enseigner en terminale :
  - Géométrie dans l'espace : il n'y a pas de continuité dans l'apprentissage de cette notion au lycée et les élèves sont très peu familiers des figures de l'espace. L'orthogonalité est « découverte » en terminale et les élèves doivent la comprendre d'un point de vue affine, vectoriel et analytique la même année.
  - Limites : cette notion est peu rencontrée en première et il n'y a pas un temps suffisant en terminale pour la maturation.

- Attentes

Mathématiques en 1ère L.
5 heures en 1S.
Liaisons avec les collèges.
Besoin de formations.
Besoin d'un meilleur décryptage des programmes.

- Perspectives

Les collègues présents éprouvent le besoin de concertations pour mieux réfléchir à la manière d'enseigner certaines notions, réfléchir à la pertinence des progressions à mettre en place…

Une autre commission est prévue dans le courant du mois d'octobre ou novembre pour une progression en seconde sous forme d'un goûter.

retour sommaire

DANS NOS CLASSES

Maths et Architecture : dessinons une citadelle comme le propose Jean Errard

par François DROUIN
groupe APMEP « Maths et Arts »

Au collège :

Le premier texte proposé est celui écrit par Jean Errard dans son ouvrage. Pour des facilités de lecture, une police de caractère « moderne » a été utilisée.

D'après « La fortification démontrée et réduite en art par feu I Errard de Bar le Duc, …, Revue, corrigée et Augmentée par A. Errard, son nepveu (s.l.n.d., s.n. Imprimeur) 1619-1612 ».

***De la construction de l'hexagone** : Soit proposé à fortifier un Hexagone, d'autant que l'Hexagone se divise en six triangles équilateraux. Soit sur A B descrit le triangle équilateral A B C, puis soit faict l'angle C A D de quarante-cinq degrez: Soit faicte la ligne A E égale à la ligne B D, en après soit tirée B E.*

Soit divisé l'Angle E A D en deux également par la ligne A G, & soit prise D F égale à E G, & tirée la Courtine G F, comme aussi F H perpendiculaire sur la ligne B E. Soit prise A I égale à B H , & soit tirée la ligne G I perpendiculairement comme F H.

Ainsi seront descrits les deux demi-bastions AIG & FHB. Et pour plus facile intelligence, j'ay tracé à la figure les deux Bastions entiers MNAIG, & FHBLK (voir les figures de la page suivante).

Le deuxième texte a été proposé à des élèves de troisième au collège de Saint-Mihiel :

Il est proposé de fortifier un hexagone. L'hexagone se divise en six triangles équilatéraux.
Soit ABC un de ces triangles équilatéraux. (C est le centre de l'hexagone).
D est le point du segment du segment [BC] tel que l'angle CAD mesure 45°.
Sur le segment [AC], place le point E tel que BD = AE.
Trace le segment [BE].
Trace la bissectrice de l'angle EAD. Elle coupe le segment [BE] au point G.
Sur le segment [AD], place le point F tel que FD = EG.

retour sommaire

Trace le segment [FG].

I est le point du segment [AD] tel que les segments [GI] et [AD] sont perpendiculaires.

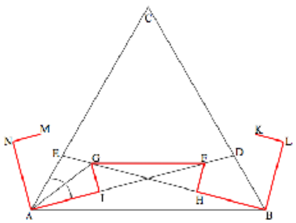
H est le point du segment [EB] tel que les segments [FH] et [EB] sont perpendiculaires.

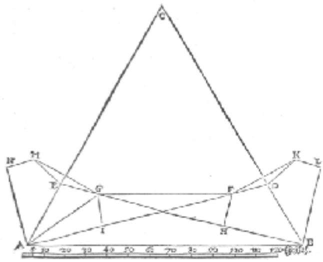
Les segments [AI], [GI], [GF], [FH], [HB] sont les bords extérieurs de la fortification.

Recommence ces mêmes tracés dans les autres triangles équilatéraux formant l'hexagone.

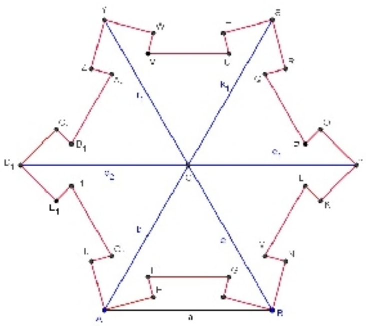
Dessins obtenus en complétant les demis bastions déjà tracés dans le triangle

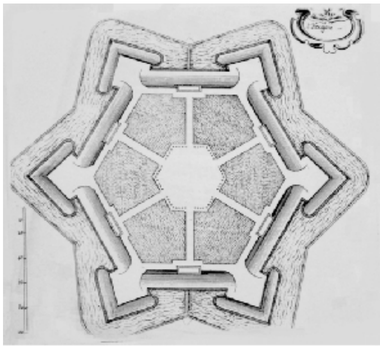
Le dessin de gauche est extrait de la présentation faite par Frédéric Métin à Nancy en 2005, celui de droite est extrait de l'ouvrage de Jean Errard :





Le dessin de gauche a été réalisé par notre collègue Brigitte Chouannière, celui de droite est extrait de l'ouvrage de Jean Errard :





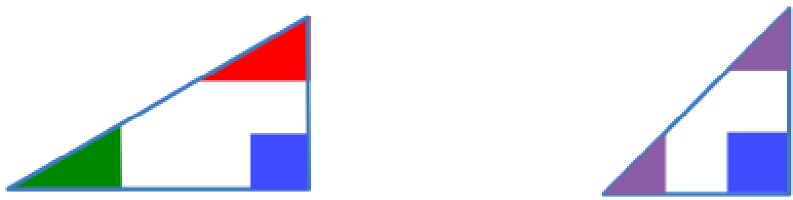
La construction peut être réalisée par les élèves, à la règle et au compas ou en utilisant un logiciel de géométrie.

À l'école primaire, en CM2 :

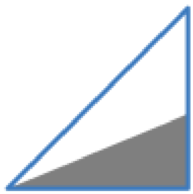
Les élèves n'utilisent pas de rapporteur et ne tracent pas de bissectrices d'angle. Cependant, ils doivent savoir tracer une figure d'après un programme de construction et reproduire un angle donné en utilisant un gabarit.

Différents gabarits vont être utilisés :

Deux types d'équerre sont à disposition des élèves :



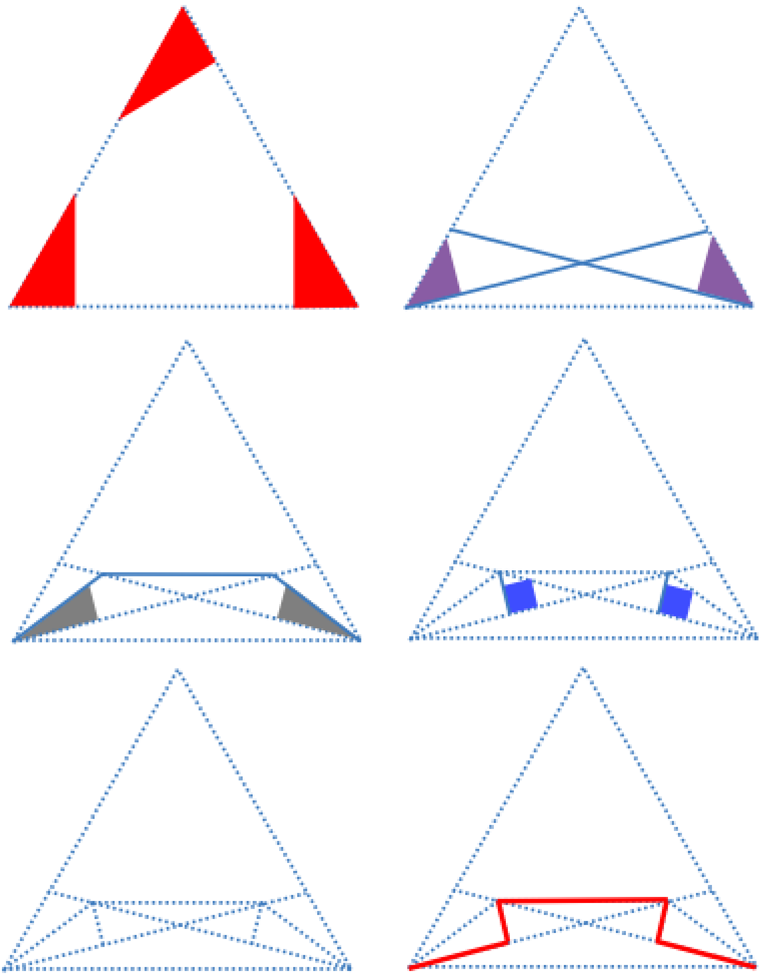
La première est un gabarit d'angle droit en (bleu), de tiers d'angle droit (en vert) et de deux tiers d'angle droit (en rouge). La deuxième est également un gabarit d'angle droit (en bleu) et de demi angle droit (en violet).



Il reste à réaliser un gabarit pour la moitié d'un demi angle droit, c'est à dire pour un quart d'angle droit (en gris).
Le programme de production proposé aux élèves est constitué par la suite des six dessins de la page suivante.

…/...

Voir aussi le diaporama proposé par Frédéric Métin lors de la Journée régionale de 2005 :
http://apmeplorraine.free.fr/modules/regionale/jr_2005/APMEP%20Nancy%202%20Errard%20fortif.ppt



En assemblant six dessins identiques au dernier obtenu, la citadelle hexagonale sera visualisée.

retour sommaire

DANS NOS CLASSES

La bibliothèque de Babel

Par Renaud Dehaye,
ESPE-IUFM de Lorraine

Cet article est un compte rendu d'un atelier d'une heure réalisé dans le cadre du stage Maths C2+ de l'académie de Nancy-Metz. Ce stage de trois jours au mois de juin est proposé chaque année à une quinzaine d'élèves de seconde de l'académie et leur permet de découvrir le métier de chercheur en mathématiques.

A l'occasion de la visite de l'Institut Elie Cartan, et plus particulièrement de sa bibliothèque, une activité a été proposée aux quatorze élèves de seconde autour de la nouvelle « La bibliothèque de Babel » de Jorge Luis Borges.
Après une lecture commentée d'un extrait de la nouvelle (voir document distribué aux élèves en annexe), deux questions ont été posées aux élèves :

- Combien y a-t-il de livres dans la bibliothèque de Babel ?
- Dessiner la bibliothèque de Babel.

La question du nombre de livres

Les ingrédients nécessaires pour répondre à cette question sont les suivants :

- Chacun des murs de chaque hexagone porte cinq étagères ; chaque étagère comprend trente-deux livres, tous de même format ; chaque livre a quatre-cent-dix pages ; chaque page, quarante lignes, et chaque ligne, environ quatre-vingts caractères noirs. […]

- Il y a cinq cents ans, [un] penseur observa que tous les livres, quelques divers qu'ils soient, comportent des éléments égaux : l'espace, le point, la virgule, les vingt-deux lettres de l'alphabet. Il fit également état d'un fait que tous les voyageurs ont confirmé : il n'y a pas, dans la vaste Bibliothèque, deux livres identiques. De ces prémisses incontroversables il déduisit que la Bibliothèque est totale, et que ces étagères consignent toutes les combinaisons possibles des vingt et quelques symboles orthographiques (nombre, quoique très vaste, non infini), c'est-à-dire tout ce qu'il est possible d'exprimer, dans toutes les langues. [...]

retour sommaire

Rapidement, la plupart des élèves se sont lancés dans le calcul du nombre de caractères dans un livre : $410\times40\times80 = 1\ 312\ 000$
Quelques uns sont partis dans le calcul du nombre de livres par salle hexagonale (il y a quatre murs occupés par cinq étagères de trente-deux livres soit $4\times5\times32 = 640$ livres) mais ils se sont vite rendus compte qu'ils étaient dans une impasse – on ne connaît pas le nombre de salles !
Les deux nombres à prendre en considération sont bien, d'une part 1 312 000 et d'autre part, 25, le nombre de caractères utilisables, y compris l'espace.

Trois calculs ont alors été proposés pour le nombre total de livres :
$25\times1\ 312\ 000$, ou $25^{1\ 312\ 000}$ ou $1\ 312\ 000^{25}$ sans consensus dans les groupes, les adeptes du deuxième calcul (le bon!) n'étant pas encore en mesure de l'imposer.

Un détour par un problème plus simple (combien peut-on écrire de pages de 100 caractères avec les lettres a,b,c ?) a permis de rallier l'ensemble des élèves au nombre $25^{1\ 312\ 000}$.

La question s'est alors transformée en la suivante :
Qu'est-ce que le nombre $25^{1\ 312\ 000}$? Peut-on le calculer ? Combien a-t-il de chiffres ?

« Mais, Monsieur, pourquoi la calculatrice écrit Ma Error … ? »

Les élèves se sont alors lancés dans de nouveaux calculs, essayant de réduire la taille de l'exposant ou tentant de se ramener aux puissances de dix.
Voici quelques conjectures formalisées suite aux propositions des élèves :

Conjecture 1 :	Conjecture 2 :	Conjecture 3 :
$a\times25^n=2a\times25^{\frac{n}{2}}$	$a^n=\left(\frac{a}{p}\right)^{n/p}$	$(2{,}5a)^n=a^{2{,}5n}$

Conjectures assez vite abandonnées à partir d'un contre-exemple, les contraintes horaires n'ayant pas permis un moment collectif sur ces formules. C'était l'heure du repas !

Il pourrait être intéressant de connaître la taille du nombre $25^{1\ 312\ 000}$

retour sommaire

On pourrait écrire :

$$25^{1\ 312\ 000} = \left(\frac{100}{4}\right)^{1\ 312\ 000} = \left(\frac{10^2}{2^2}\right)^{1\ 312\ 000} = \frac{10^{2\ 624\ 000}}{2^{2\ 624\ 000}}$$

On cherche alors une puissance de 10 assez proche d'une puissance de 2 : on peut choisir $2^{10} \simeq 10^3$ d'où $25^{1\ 312\ 000} \simeq \frac{10^{2\ 624\ 000}}{10^{787\ 200}} \simeq 10^{1\ 836\ 800}$.

Ce qui donne une « idée » de la taille du nombre total de livres.
Une élève a proposé d'utiliser $2^3 \simeq 10$ ce qui conduit au calcul :

$$25^{1\ 312\ 000} \simeq \frac{10^{2\ 624\ 000}}{10^{874\ 666,66\ldots}} \simeq 10^{1\ 749\ 333,33\ldots}$$

On obtient alors l'encadrement

$$10^{1\ 749\ 333,33\ldots} < 25^{1\ 312\ 000} < 10^{1\ 836\ 800}$$

Cet encadrement utilise des puissances d'exposant non entier et n'est pas accessible à des élèves de seconde.
Quoiqu'il en soit, ce nombre dépasse largement tous les nombres astronomiques connus : il y a environ 10^{80} atomes dans l'univers observable.
Le diamètre de l'univers observable est d'environ 10^{27} mètres (correspondant à 100 milliards d'année-lumière).

Pour en savoir plus sur les stages MathC2+ :
http://www.animath.fr/spip.php?rubrique263

(Image tirée de http://sophieracine.blogspot.fr/2011/09/bibliotheque.html)

Annexe page suivante...

ANNEXE

La bibliothèque de Babel. Fictions. J.L. Borges. Extraits.

L'univers (que d'autres appellent la Bibliothèque) se compose d'un nombre indéfini, et peut-être infini, de galeries hexagonales, avec au centre de vastes puits d'aération bordés par des balustrades très basses. De chacun de ces hexagones on aperçoit les étages inférieurs et supérieurs, interminablement. La distribution des galeries est invariable. Vingt longues étagères, à raison de cinq par coté, couvrent tous les murs moins deux ; leur hauteur, qui est celle des étages eux-mêmes, ne dépasse guère la taille d'un bibliothécaire normalement constitué. Chacun des pans libres donne sur un couloir étroit, lequel débouche sur une autre galerie, identique à la première et à toute. […]

A proximité passe l'escalier en colimaçon, qui s'abîme et s'élève à perte de vue. Dans le couloir, il y a une glace, qui double fidèlement les apparences. […]

Des sortes de fruits sphériques appelés lampes assurent l'éclairage. Au nombre de deux par hexagone et placés transversalement, ces globes émettent une lumière insuffisante, incessante. […]

Qu'il me suffise, pour le moment, de redire la sentence classique : la Bibliothèque est une sphère dont le centre véritable est un hexagone quelconque, et dont la circonférence est inaccessible.

Chacun des murs de chaque hexagone porte cinq étagères ; chaque étagère comprend trente-deux livres, tous de même format ; chaque livre a quatre-cent-dix pages ; chaque page, quarante lignes, et chaque ligne, environ quatre-vingts caractères noirs. […]

Il y a cinq cents ans, [un] penseur observa que tous les livres, quelques divers qu'ils soient, comportent des éléments égaux : l'espace, le point, la virgule, les vingt-deux lettres de l'alphabet. Il fit également état d'un fait que tous les voyageurs ont confirmé : il n'y a pas, dans la vaste Bibliothèque, deux livres identiques. De ces prémisses incontroversables il déduisit que la Bibliothèque est totale, et que ces étagères consignent toutes les combinaisons possibles des vingt et quelques symboles orthographiques (nombre, quoique très vaste, non infini), c'est-à-dire tout ce qu'il est possible d'exprimer, dans toutes les langues. [...]

retour sommaire

DANS NOS CLASSES

Faites de la Science : Les chiffres, ça s'invente !

Par Nathalie Wies,
Collège Charles Péguy, VIGY

Au programme de 6ème se trouve la numération. A l'origine, les élèves ont eu un devoir maison sur les chiffres mayas. Il y a ensuite eu deux exposés sur les chiffres faits par les élèves : un exposé sur les différents chiffres (romains, mayas,…) et un exposé sur le chiffre 0.

Les élèves ont été très intéressés par ces exposés. Je leur ai alors montré la vidéo des chiffres Shadoks, qu'ils ont trouvé amusante : certains se sont intéressés à cette façon de compter. Et à la suite de cela, je leur ai proposé d'inventer eux aussi des chiffres propres à leur classe, comme l'avaient fait les Shadoks.

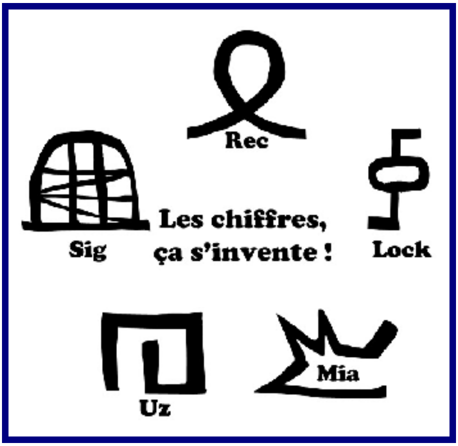
Voici quels étaient mes intentions pédagogiques et les objectifs visés pour les élèves :

- Faire naitre un système de numération depuis la naissance des chiffres jusqu'à son emploi dans l'addition de 2 nombres, afin de comprendre comment cela fonctionne.
- Laisser exprimer son imagination : on invente des chiffres (leur forme, leur nom, …), on raconte la naissance de ces chiffres (Pourquoi sont-ils nés ? Comment ?...)
- Réaliser la table d'addition de ce nouveau système de numération et effectuer des additions posées et avec un tableur (les initier en vue du B2I).
- Travailler en interdisciplinarité Arts-Plastiques / Mathématiques / Français.

Plusieurs outils ont été utilisés au cours de ce projet : le logiciel FontForge pour créer la nouvelle police dessinant ces chiffres ; un tableur ; une vidéo sur Les Shadoks : http://www.wat.tv/video/mathematiques-shadocks-32ivh_32iv1_.html.

Description de l'activité

Avec leur professeur d'Arts Plastiques, les élèves ont fabriqué chacun un objet représentant un chiffre en 3D. Puis tous les élèves de la classe ont choisi les 5 objets qu'ils préféraient.



Ensuite, ils se sont entrainés à les dessiner, puis à leur chercher un nom.

Avec leur professeur de Français, ils ont imaginé la naissance de ces nombres. Chacun a rédigé un texte qui parle de ce monde sans chiffre où les chiffres apparaissent. Les professeurs du collège ont voté pour leur texte préféré (voir en annexe).

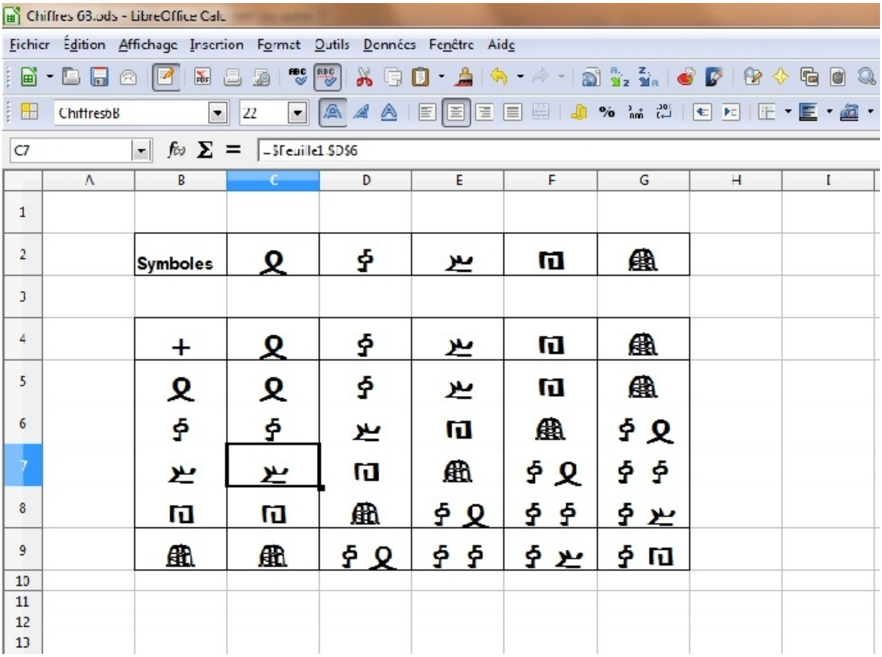
En cours de mathématiques, nous avons appris à compter avec ces chiffres en écrivant chaque nombre les uns après les autres. On a d'abord appris à compter jusque 15 environ, puis jusqu'à environ 150, mais sans jamais faire la « conversion » du système décimal vers cette nouvelle numération, car on imagine qu'il n'y a pas d'autres chiffres que ceux qu'on a inventés. Les élèves ont tout de suite compris le système de paquets (de 5) qu'ils devaient faire pour pouvoir compter.

Une fois qu'on savait énumérer les nombres, on a construit la table d'addition. Les élèves ont, là encore, facilement rempli la table d'addition.

On s'est ensuite entrainé aux additions posées avec ces nombres. Là, spontanément, un élève a posé l'addition comme ils l'ont toujours appris avec nos nombres décimaux, utilisant les retenues quand c'était nécessaire. Je leur ai alors demandé s'il n'y avait pas une autre méthode, surtout pour les faire réfléchir à ces retenues qui nous gêneraient plus tard avec le tableur… une élève a proposé la solution utilisée par le tableur.

On a alors travaillé sur ordinateur pour créer la police représentant ces chiffres. Certains élèves ont réussi à créer leur chiffre sur l'ordinateur de leur domicile (pas possible au collège).

retour sommaire



Puis on a pu recopier la table d'addition sur un tableur (voir copie d'écran ci-dessus). Je leur ai donné la feuille de calcul pour additionner 2 nombres (avec moins de 5 chiffres) et je leur ai expliqué son fonctionnement.

Une activité récompensée…

Ce projet a été présenté le mardi 16 avril 2013 au Concours « Faites de la Science » organisé par La Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées de l'Université de Lorraine à Metz. Pour cette 3ème édition, huit projets avaient été retenus, portés par des élèves de collèges ou de lycées. Cinq élèves ambassadeurs ont présenté ce projet face à deux jurys et la classe de 6ème B a remporté le 2ème prix.

… et très enrichissante !

Cette aventure a été très enrichissante pour les élèves. Certes, quelques uns ont compté sur les autres, et il y a eu des moments d'incertitudes (notamment à cause de l'outil informatique), mais cela a permis à certains élèves d'apprécier les mathématiques, de les redécouvrir sous une autre forme, dans un autre contexte. Le choix des ambassadeurs s'est fait par tirage au sort, ce qui a donné lieu à certaines remarques, d'élèves et même de professeurs. Mais nous avons eu confiance en eux, ils ont porté le projet de la classe et, quel que soit leur niveau, ils se sont investis à fond pour ce projet.

retour sommaire

En tant que professeur de cette classe, j'ai apprécié l'enthousiasme et la ténacité des élèves pour y arriver.

J'aimerais bien retenter cette aventure, mais sans doute pas avec une classe entière, car c'est très prenant au niveau des heures de classe, donc plutôt avec un petit groupe d'élèves volontaires.

ANNEXE

Texte de Laurine, élève de la classe de 6e B

Les chiffres inconnus

Dans une forêt magique, il y a très longtemps, se trouvait le village des Glupys. Ce monde était très particulier car il n'y avait pas de chiffres.

La reine des Glupys s'appelait Glupette. Elle était toujours très bien habillée. Elle portait souvent une petite robe rouge et des petites chaussures à lacets. Son mari, le roi Glupuss, était tout son contraire. C'était un savant fou !

Un beau matin, le roi appela ses chiens pour qu'ils viennent manger. Totalement par hasard il commença à compter sur ses doigts en même temps qu'il disait leur prénom. Puis il n'arrêtait pas de répéter les noms de ces chiens : lock, mia, uz, sig, lock rec, lock lock, lock mia, lock uz, lock sig, et mia rec, en comptant sur ses doigts.

Un jour une idée ingénieuse lui vint à la tête. Son idée était d'inventer les chiffres.

Il appela sa femme et lui dit :

- Glupette ! Glupette ! j'ai inventé un truc pour savoir si tous nos chiens sont bien là !

- Ho, qu'as-tu encore inventé ?

- J'ai nommé chaque doigt par le nom de nos chiens.

- Dans quel but ? demanda-t-elle.

- Par exemple, quand on ira à la boulangerie acheter de pain, on dira : je voudrais mia baguettes au lieu de dire : je voudrais cette baguette et celle là !

- Très ingénieux ! Là, je te reconnais Glupuss !

Depuis ce jour tout le village des Glupys adopta l'invention de Glupuss, qui enseigna à l'école la nouvelle matière nommée le calcul qui souvent commence par les doigts d'une main puis de deux.

N.d.l.r. En complément, nous vous proposons de consulter l'article de PLOT : http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Shadoks.pdf ainsi que les annales 2005 du concours de professeur des écoles, page 60, « L'écriture des nombres chez les Cincofiles » : http://www.arpeme.fr/documents/2A9CD594BA5B482CE85.pdf.

MATHS ET PHILO

DESCARTES ET LES QUATRE RÈGLES DE LA MÉTHODE

Le Discours de la Méthode (DM) a été publié en 1637, en guise de « préface » à trois traités scientifiques : la Dioptrique, les Météores, la Géométrie. Dans cet ouvrage autobiographique, Descartes (1596-1650) retrace son itinéraire intellectuel ; il cherche à justifier le projet fou qui est le sien, « réformer la connaissance », et à expliquer la méthode qu'il a choisie pour construire une science qui puisse « nous rendre comme maîtres et possesseurs de la nature ».

« Je me plaisais surtout aux mathématiques »

Dans la première partie du *DM* Descartes montre sa foi en la raison humaine et sa déception à l'égard de ce qu'on lui a appris. Nous avons une raison mais nous l'appliquons mal, seules les mathématiques, par leur évidence et par la force de leurs démonstrations, trouvent grâce à ses yeux. Il va donc chercher à s'en inspirer pour trouver la méthode dont il a besoin.

« J'avais un peu étudié, étant plus jeune, entre les parties de la philosophie, à la logique, et, entre les mathématiques, à l'analyse des géomètres et à l'algèbre, trois arts ou sciences qui semblaient devoir contribuer quelque chose à mon dessein. Mais, en les examinant, je pris garde que, pour la logique, ses syllogismes et la plupart de ses autres instructions servent plutôt à expliquer à autrui les choses qu'on sait (…) qu'à les apprendre ; et bien qu'elle contienne en effet beaucoup de préceptes très vrais et très bons, il y en a toutefois tant d'autres mêlés parmi, qui sont ou nuisibles ou superflus qu'il est presque aussi malaisé de les en séparer, que de tirer une Diane ou une Minerve hors d'un bloc de marbre qui n'est point encore ébauché. Puis, pour l'analyse des anciens et l'algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'étendent qu'à des matières fort abstraites, et qui ne semblent d'aucun usage, la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination ; et on s'est tellement assujetti en la dernière à certaines règles et à certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur qui embarrasse l'esprit, au lieu d'une science qui le cultive. Ce qui fut cause que je pensai qu'il fallait chercher quelque autre méthode, qui, comprenant les avantages de ces trois, fût exempte de leurs défauts. Et comme la multitude des lois fournit souvent des excuses

aux vices, en sorte qu'un état est bien mieux réglé lorsque, n'en ayant que fort peu, elles y sont fort étroitement observées ; ainsi, au lieu de

ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois a les observer »[1].

La **logique** est utile, elle permet d'imposer une certaine rigueur à la pensée, elle permet également d'exposer méthodiquement des vérités découvertes ; elle a quelques bons préceptes, avoue Descartes, comme celui qui enseigne que l'on doit toujours aller du plus connu au moins connu, et celui qui dit que l'on doit diviser les problèmes que l'on veut discuter. Mais elle a aussi de nombreux inconvénients. Le syllogisme ne fait rien découvrir, il ne nous apprend rien, il ne sert qu'à confirmer ce que l'on sait déjà. Le syllogisme conduit aussi à affirmer tout et n'importe quoi, « *à parler sans jugement* » puisqu'il ne tient pas compte de la vérité matérielle de ses conclusions, et que de prémisses fausses on peut tirer des conclusions vraies.

L'**analyse des géomètres** est celle des géomètres grecs (l'analyse des anciens). Ce que leur reproche Descartes c'est de raisonner uniquement et directement sur les figures géométriques, sur les lignes et non sur les symboles qui les représentent, en supposant le problème résolu puis en cherchant ensuite à reconstruire les lignes qui permettent la solution du problème. Ainsi ils asservissaient l'entendement (la faculté de comprendre) à l'imagination, ils réduisaient le travail mathématique à un travail d'imagination.

Enfin Descartes reproche à **l'algèbre** (algèbre du Père Clavius 1537-1612) d'employer un système de notation trop compliqué.
Descartes veut donc trouver une méthode qui ait les avantages de ces trois disciplines, sans en avoir les inconvénients. Il faut que, comme la logique, elle s'applique à des problèmes concrets, mais tout en étant une méthode d'invention. Que, comme la géométrie, elle procède par analyse, qu'elle parle aux sens et à l'imagination, mais sans asservir l'intellect. Que, comme l'algèbre, elle symbolise les quantités par des signes mais en les simplifiant[2].

1 DM, 2° partie.

2 L'importance des réformes que va introduire Descartes dans le domaine mathématique se mesure mieux à la lecture de *La Géométrie* qui suit le DM. On y voit plus clairement comment la représentation de l'algèbre peut se faire par la géométrie, et réciproquement. Il y montre comment résoudre les problèmes et traite de la représentation des points d'un plan au moyen des nombres réels, ainsi que de la représentation et de la classification des courbes par des équations. En unifiant l'algèbre et la géométrie il se conforme à l'idée d'unité énoncée au début de la 2° partie du DM.

La logique ayant trop de règles ; quatre suffiront à Descartes, pourvu qu'il prît « *la ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer* ».

1ère Règle

« Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ; c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute ».

RÈGLE D'ÉVIDENCE. L'évident est ce dont la vérité apparaît à l'esprit de façon immédiate. L'évidence n'a pas besoin de justification. Elle implique la simplicité, car seules les choses simples peuvent être saisies de façon immédiate, c'est-à-dire sans recourir à aucune opération de la pensée.

2ème Règle

« Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre ».

RÈGLE D'ANALYSE. Il faut diviser les problèmes en questions élémentaires, il faut ramener les questions à une question simple. Les « *parcelles* » dont parle Descartes sont les éléments les plus simples et donc les plus clairs dont il faut partir pour conduire bien ses pensées et opérer des déductions (voir 3° règle).

3ème Règle

« Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés, et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres ».

RÈGLE D'ORDRE. L'analyse précédente conduit à organiser les pensées en allant du plus simple au plus composé. Nous ne devons pas penser au hasard. La déduction doit aller du simple au complexe. Lorsque nous étudions les choses de la nature nous devons respecter l'ordre naturel. Lorsque le problème à résoudre est purement intellectuel, artificiel, il n'y

retour sommaire

a pas de raison de commencer par un bout plutôt que par un autre. Dans ce cas nous devons imaginer un ordre et nous y tenir afin d'être sûrs de parcourir tous les éléments du problème.

4ème Règle

« Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre ».

RÈGLE DE DÉNOMBREMENT (ÉNUMÉRATION). C'est le moment de la vérification. Cette vérification portera aussi bien sur l'analyse (2e règle) pour s'assurer que la division est complète, que sur la déduction qui va du simple au composé (3e règle) pour vérifier qu'aucun intermédiaire n'est oublié, sinon la déduction serait illégitime et nous n'aboutirions point à l'évidence recherchée (1e règle).

Par ces règles simples, en faisant appel aux seules lumières de la raison, Descartes rompt avec la tradition scolastique et fait entrer la philosophie dans l'ère de la modernité… qui doit donc beaucoup aux mathématiques !

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

« Ma cohabitation passionnée avec les mathématiques m'a laissé un amour fou pour les bonnes définitions, sans lesquelles il n'y a que des à-peu-près. »

Gustave Flaubert

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

retour sommaire

MATH & MEDIA

Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.
Envois par la poste à Jacques VERDIER (7 rue des Bouvreuils, 54710 FLEVILLE) ou par courrier électronique : jacverdier@orange.fr .
Les archives de cette rubrique sont disponibles sur notre site à l'adresse :
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=math_et_media

Élections à Villeneuve

LES RÉSULTATS DU SECOND TOUR

- **Jean-Louis Costes (UMP) :** 18 193 voix, soit **53,76 %** des votants. Elu.
- **Etienne Bousquet-Cassagne (FN) :** 15 647 voix, soit **46,24 %** des votants. Eliminé.

Blancs et nuls : 5 624 bulletins, 14,25 % des suffrages exprimés.
Abstention : 47,53 % des inscrits.

Lu le matin du 24/06/13 dans mon journal préféré. J'ai été intrigué par les pourcentages, les deux premiers étant donnés comme "% des votants" et le troisième par "% des suffrages exprimés".

Un petit exercice, à adapter suivant le niveau de vos élèves : rétablir les bonnes données, et donner le nombre de votants. En déduire une valeur approchée du nombre des inscrits ; plus difficile : quelle est la marge d'erreur ?

Éléments de réponse

Vous l'avez tout de suite remarqué, il y a une inversion entre les termes « votants » et « suffrages exprimés ». Il y a 18 193 + 15 647 = 33 840 suffrages exprimés. En ajoutant les 5 624 bulletins blancs ou nuls, on obtient 39 464 votants. Ces votants représentent 52,47 % des inscrits (puisqu'il y a 47,53 % abstentions).

Cela donne environ $\dfrac{39464}{0{,}5247} \approx 75\ 212$ inscrits.

Mais les pourcentages sont arrondis au centième : le taux est donc compris entre 0,52465 et 0,52475 (au sens large). Ce qui donne un nombre d'inscrits entre 75 205,3358... et 75 219,6702... Comme ce nombre doit être entier, on en déduit qu'**il y a entre 75 206 et 75 219 inscrits** (bornes incluses).

Après consultation de http://www.ville-villeneuve-sur-lot.fr/election-legislative-partielle-les-resultats-definitifs-art2547.html, nous avons pu connaître le nombre « officiel » d'inscrits : 75 207.

retour sommaire

Sphère... Vous avez dit sphère ?

Lu le 25 juin dans l'Est Républicain:

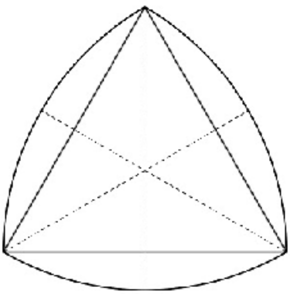
« Quand il s'agit de paille ou de foin, tout le monde sait reconnaitre les gros cubes ou les grosses sphères qui se répandent dans les champs en attendant d'être stockés... »

Sans commentaire...

Le triangle de Reuleaux

Décidément, les produits surgelés Thiriet font tout ce qu'ils peuvent pour qu'on parle d'eux dans le Petit Vert... Après le gâteau partagé en 16 parts « façon Tangram » (voir numéros 113 et 144), voici l'entremet au chocolat « façon triangle de Reuleaux », envoyé par Joëlle A.

Le triangle de Reuleaux est cette figure formée de 3 arcs de cercles dont les centres sont les sommets d'un triangle équilatéral.



Les propriétés géométriques de ce « triangle » sont fort intéressantes, et ont permis des innovations dans le domaine technologique (moteur rotatif par exemple). Voici quelques une des sites que nous avons visités :

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_de_Reuleaux
- http://www.etudes.ru/ru/etudes/koleso/ (admirez les vidéos!)

Et pour les amateurs d'art :
- http://www5.ac-lille.fr/~ygagarine/matieres_fichiers/mathbernard/mathbernard_fichiers/correction_5/dossier_arts_1.pdf

Mais ce qui nous intéresse ici, c'est le partage du gâteau. Il est annoncé pour 6/8 parts. Le partage en 6 parts égales est évident. Mais qu'en est-il du partage en 8 ? La maison Thiriet nous donne la solution :

Cependant, nous restons dubitatifs. En admettant que la figure ci-dessus soit bien un triangle de Reuleaux, comment **peut-on faire en sorte que les 8 parts aient des aires égales ?**
La rédaction du Petit Vert attend vos réponses...

Récréation ancienne (1694)

Deviner deux nombres que quelqu'un aura pensés. Ayant fait ajouter ensemble les deux nombres pensés pour avoir leur somme, et ayant fait ôter le plus petit du plus grand pour avoir leur différence, faites multiplier la somme par la différence et ajouter au produit le carré du plus petit nombre pensé. Alors, demandez le nombre qui vient de cette addition, et prenez en la racine carrée qui sera le plus grand des deux nombres pensés. Pour avoir le plus petit, au lieu de faire ajouter au produit le carré du plus petit nombre pensé, faites ôter ce produit du carré du plus grand nombre pensé, et demandez le nombre qui restera : la racine de ce reste sera le plus petit nombre pensé.

Extrait de « Récréations Mathématiques et Physiques » de Jacques OZANAM, 1694. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k927336

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

LA GÉOMÉTRIE DE LA MOSAÏQUE DE GRAND

Par Bernard PARZYSZ,
Université d'Orléans & Laboratoire André-Revuz
(univ. Paris-Diderot)

Introduction

La petite ville lorraine de Grand est située dans le canton de Neufchâteau, entre, d'une part les vallées de la Marne et de l'Ornain (à l'Ouest), et d'autre part la vallée de la Meuse (à l'est). L'archéologie y a révélé une cité antique, située sur le territoire des Leuques, à l'écart des grands axes de circulation Lyon-Trèves et Langres-Reims. Il s'agissait en fait d'une ville construite autour d'un sanctuaire consacré au dieu guérisseur Apollon Grannus. Elle était ceinte d'un rempart de 1760 m de long, haut de 6 à 7 m, épais de 2,80 m et muni de 18 tours circulaires, avec une porte monumentale à l'est (Dechezleprêtre 2010). La ville comportait également un amphithéâtre de 17000 places, extérieur à l'enceinte et daté de la fin du 1er siècle (Olivier 2010).

Figure 1 . Vue générale
N.d.l.r. Sauf indication contraire toutes les photos et dessins sont de B. Parzysz

Mais, surtout, Grand est connu pour la mosaïque pavant le sol de la grande salle d'un vaste bâtiment, fouillé en 1883 par Félix Voulot, conservateur du musée départemental des Vosges. Cette mosaïque, la

retour sommaire

plus grande de Lorraine (224 m^2), est conservée *in situ*[1](fig. 1). Elle est datée de la période antonine (2^e siècle) selon J.-P. Darmon (Darmon 2006). Deux jours passés en octobre 2012 sur la mosaïque m'ont permis[2] de prendre toute une série de mesures, dont résulte la présente étude[3].

Le pavement est composé de deux parties principales : une abside semi-circulaire et un grand carré, entre lesquels se situent deux bandeaux rectangulaires.

1. Mise en place des différentes parties de la mosaïque

Par suite des dégradations subies depuis sa mise au jour, la mosaïque a dû être déposée et restaurée à la fin des années 1950, avant d'être remontée sur place (Blanc 2006). Il n'y a donc a priori aucune raison de supposer que les dimensions actuelles du pavement diffèrent des dimensions d'origine, sauf de façon négligeable ; c'est ce que nous supposerons dans ce qui suit.

La partie « carrée » du pavement ne l'est pas tout à fait : elle mesure 12,60 m × 12,20 m, soit un écart relatif de 3 % entre les deux dimensions. L'ensemble des dimensions relevées est présenté sur la figure 2[4]. Sachant que le pied romain (*pes*) correspond en principe à 296 mm, 42 pieds font 12,43 m, ce qui est à la fois trop pour la dimension est-ouest du panneau rectangulaire (12,20 m), et trop peu pour la dimension nord-sud de ce même panneau (12,60 m). En outre, la différence entre les deux dimensions (0,40 m) est trop grande par rapport à un pied, et trop grande aussi pour qu'on évoque un manque de précision ou une erreur de mesurage lors de la réalisation, ou un résultat du remontage moderne. D'autant plus qu'on peut raisonnablement penser que le concepteur du tapis (le *pictor*) a eu pour dessein de partir d'un panneau théoriquement carré. Comment alors expliquer cette différence ? Nous pouvons constater que presque toutes les longueurs semblent correspondre à un pied de 300 mm, quelques autres suggérant un pied de 290 mm ; c'est le cas des dimensions est-ouest du grand panneau et de celui qui y est inclus. La figure 3 représente l'interprétation des mesures en fonction de ces deux unités. Tout se passe donc comme si l'on avait utilisé successivement deux cordeaux différents : l'un gradué en pieds « forts » et l'autre en pieds « faibles » et conduit à proposer une procédure possible de mise en place. Précisons cette hypothèse.

---

1 Le site est ouvert toute l'année au public : toute la journée du 1er avril au 30 septembre et l'après-midi du 1er octobre au 31 mars. Il est fermé le lundi, sauf en juillet-août.

2 Assisté de mon épouse, que je remercie ici.

3 Je tiens à remercier chaleureusement M. Thierry Dechezleprêtre et toute l'équipe du site archéologique de Grand pour leur aide et leur gentillesse.

4 Les dessins de cet article ont été réalisés à l'aide du logiciel Cabri Géomètre II.

retour sommaire

1.1. Le panneau extérieur

Dimensions extérieures : 42 p × 42 p.
Dimensions intérieures : 30 p × 18 p.

1° Une fois déterminé le centre de la salle, le cordeau « faible » est utilisé pour délimiter l'un des côtés, nord ou sud, du grand panneau ; ce côté, d'une longueur de 42 pieds est subdivisé en 7 sections de 6 pieds. Le cordeau faible (cassé ? perdu?) est ensuite abandonné.

2° Avec le cordeau « fort » on mesure perpendiculairement 42 pieds (côtés est et ouest) et on détermine le dernier côté.

3° On délimite, sur les côtés du (pseudo) carré initial, une bande de 6 pieds dans le sens nord-sud et – par rabattement depuis le premier côté – une bande de 12 pieds dans le sens est-ouest (fig. 4). Ceci détermine par conséquent un espace central de 30 p × 18 p.

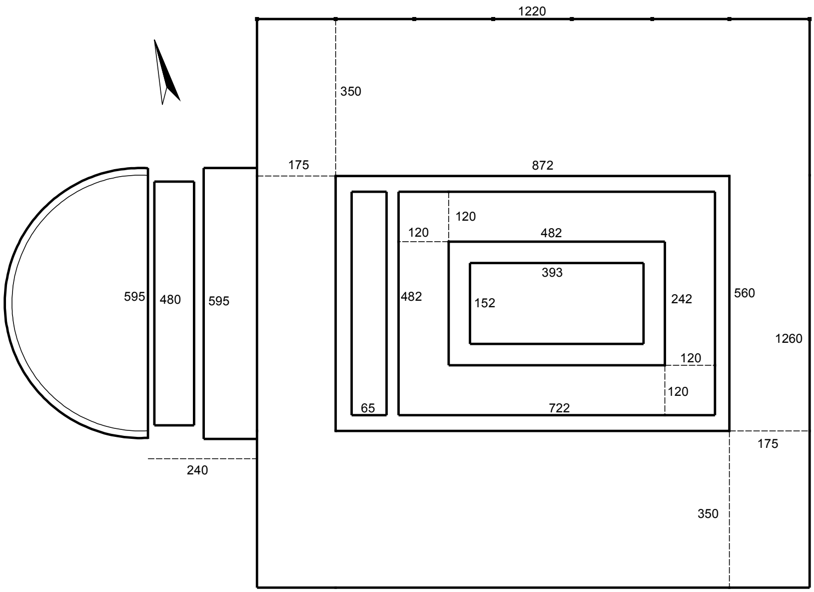


Figure 2. Dimensions en cm.

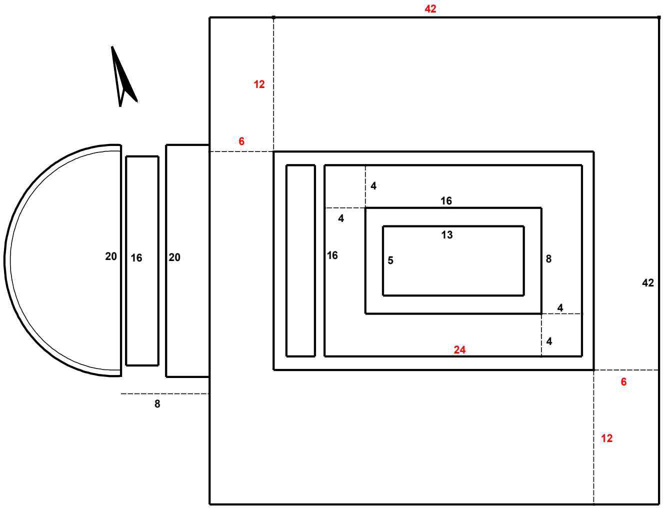


Figure 3. Dimensions en pieds (pied faible en rouge, pied fort en noir)

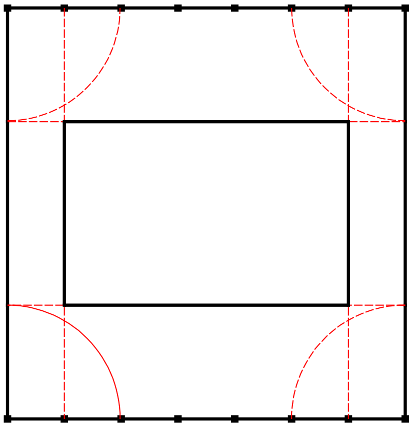


Figure 4. Mise en place du panneau carré

1.2. Le panneau intermédiaire

Ce panneau est séparé du panneau extérieur par une bordure double d'un peu plus d'un pied de large[5] : méandres en redans vers l'extérieur, tresse à deux brins vers l'intérieur (fig. 5). D'où un espace intérieur d'un peu moins de 28 p ×16 p.

5 0,34 m en moyenne.

retour sommaire

Figure 5. La tresse séparant le panneau intermédiaire du panneau extérieur

Or le décor prévu pour le panneau rectangulaire nécessitait, comme on le verra plus loin, un rapport longueur / largeur égal à 3 / 2 ; pour le mettre en place, le *pictor* s'est alors calé sur la largeur de l'emplacement disponible, ce qui lui assurait le maximum d'espace : il a partagé la largeur en deux et a reporté trois fois ce module dans la longueur (fig. 6).

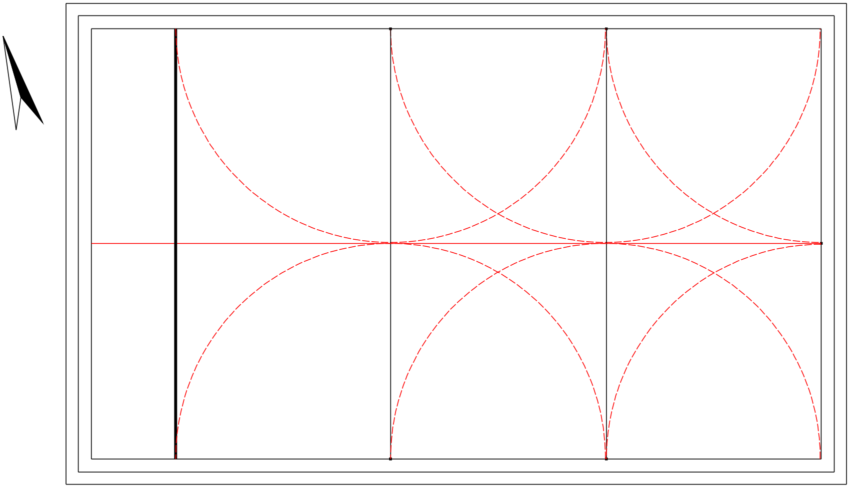


Figure 6. Mise en place du panneau intermédiaire

Ceci étant fait, il avait maintenant environ 24 pieds de long pour le panneau principal. Mais, comme il y a près de 28 pieds dans la longueur de l'espace central, il s'est trouvé dans la nécessité de créer un bandeau complémentaire, qu'il a choisi de placer du côté ouest, séparé du panneau principal par une dérivation de la tresse du pourtour, et il l'a subdivisé en sept petits panneaux rectangulaires[6].

6 Dimension N-S comprise entre 0,49 m et 0,62 m, dimension E-W comprise entre 0,62 m et 0,70 m.

retour sommaire

1.3. Le panneau central

Le choix du motif du panneau intermédiaire permettait, en joignant les centres des six carrés unitaires (fig. 7), de réserver au centre un espace libre en forme de « double carré » (16 p × 8 p), destiné à y placer le panneau figuré central.

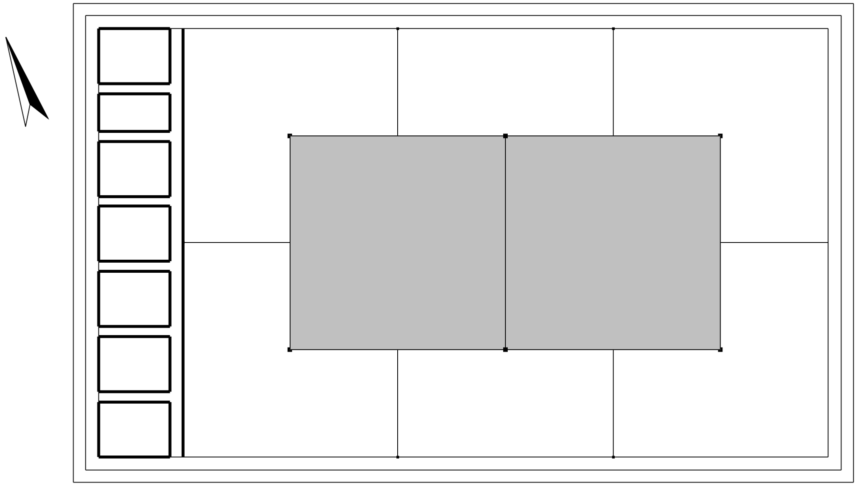


Figure 7. Disposition du « double carré » central

Quant à celui-ci, il est entouré d'une bordure multiple, d'un pied et demi de large (fig. 8) comportant notamment une tresse à deux brins (à la jonction avec le panneau intermédiaire) et une ligne brisée (vers l'intérieur).

Figure 8. Bordure séparant le panneau intermédiaire du panneau central

Le panneau central mesure donc environ 13 p × 5 p (fig. 9).

retour sommaire

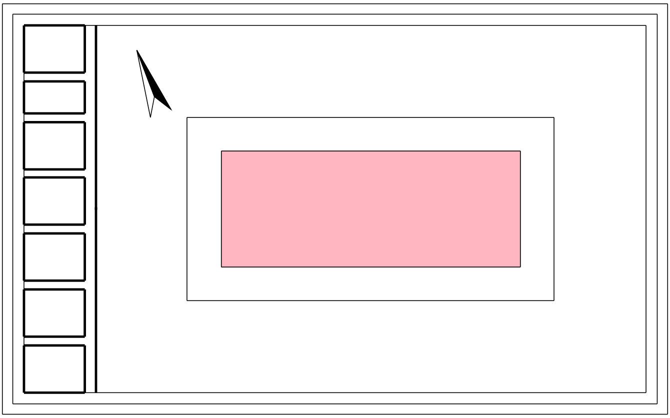


Figure 9. Position du panneau central (en rose)

1.4. L'abside

Rayon extérieur : 10 p, rayon intérieur : 9 p.

L'abside se trouve à 8 pieds à l'ouest du panneau carré (fig. 3). Entre les deux sont placés deux bandeaux : l'un, vers l'est, à décor géométrique (deux losanges encadrés par des carrés) ; l'autre, vers l'ouest, à décor végétalisé (rinceau).

L'abside, semi-circulaire, comporte une bordure extérieure de triangles, large d'un peu moins d'un pied. En réalité elle comporte un peu plus qu'un demi-cercle car, par rapport au milieu du diamètre, le centre du cercle se trouve décalé de 0,02 m vers le nord et de 0,05 m vers l'ouest. Ceci permet, au passage, de juger du degré de précision atteint par les artisans antiques.

2. Mise en place des décors

2.1. Le panneau extérieur

Le décor du panneau extérieur (fig. 10) repose sur un réseau carré dont la maille est de 2 pieds, d'où en principe 21 × 21 carrés.

retour sommaire

Figure 10. Décor du panneau extérieur

Ce carroyage de deux pieds de côté est parfaitement accordé au découpage constituant le panneau intermédiaire : celui-ci, ayant pour dimensions théoriques 30 p × 18 p, avec des bandes latérales de 3 carrés à l'est et à l'ouest et de 6 carrés au nord et au sud, correspond en effet à un rectangle de 15 × 9 carrés.

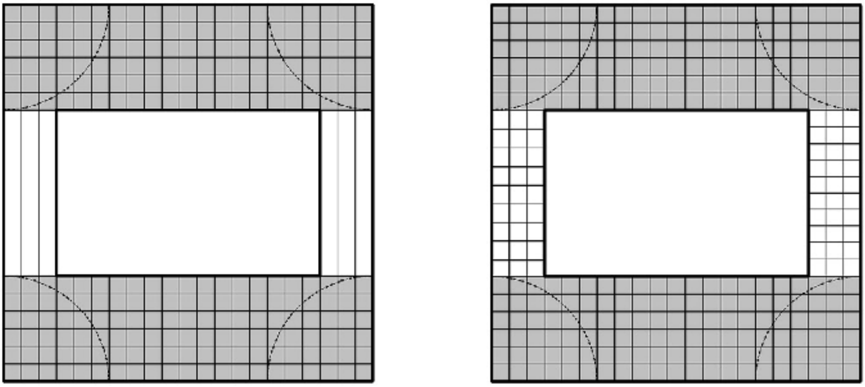
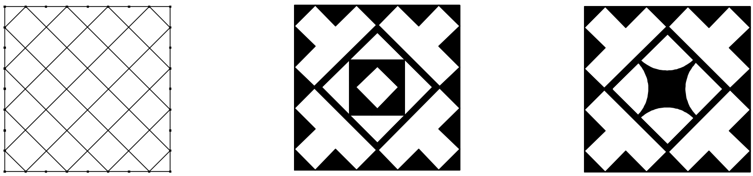


Figure 11. Mise en place du quadrillage extérieur

Le quadrillage des bandes nord et sud s'est fait sans difficulté : chacun des deux rectangles latéraux a été subdivisé en 21 × 6 carrés (fig. 11 A). Par contre, si les deux parties restantes ont bien été subdivisées en 3 dans le sens nord-sud, le *pictor* a rencontré un problème pour placer les derniers carrés : la distance qu'il avait à subdiviser est la différence entre 42 pieds forts et 24 pieds faibles, soit environ 18 pieds forts *moins 0,24* *m*. Comment a-t-il résolu le problème ? Eh bien, des deux façons possibles : du côté est (côté de l'entrée) en rétrécissant un peu des bandes, et du côté ouest en les élargissant. Plus précisément, la longueur restante a été partagée en 9 du côté ouest et en 10 du côté est (fig. 11 B). D'où une dimension nord-sud des carrés rétrécie de 2 cm du côté est et élargie de 4 cm du côté ouest (ce qui, disons-le, passe totalement inaperçu).

J.-P. Darmon y voit d'ailleurs une « *subtilité* », créant *« un effet d'optique corrigeant le caractère exagérément oblong du panneau central* » (Darmon 2006, p. 93). Pour ma part, je verrais plutôt dans ce choix différencié le fait de profiter du décalage fortuit pour compenser l'effet de perspective produit au moment où l'on pénètre dans la pièce (si tant est qu'on s'en rende compte).

L'ouvrage de référence décrit ainsi cette composition : « *quadrillage de lignes de carrés sur la pointe tangents* [sic]*, en opposition de couleurs, déterminant des cases carrées à degrés (ici chargées d'un grand carré sur la pointe, déterminant des T* »[7] (Balmelle & al. 1985, p. 202). En outre, on trouve au centre des cases deux motifs en alternance (cette alternance n'étant d'ailleurs pas régulière dans la partie nord) : un carré « droit » dans lequel est inscrit un carré « sur la pointe » et un « carré concave ». Chaque motif est obtenu à partir d'une trame carrée diagonale, construite sur une subdivision des côtés du carré initial en 8 (fig. 12).



Trame *Motif A* *Motif B*

Figure 12. Décor des carrés du panneau extérieur

Par juxtaposition, les triangles noirs bordant les carrés induisent un quadrillage de petits carrés « sur la pointe » (fig. 13).

7 Les « T » sont les ensembles de 4 carrés blancs situés entre le carré central et la bordure.

retour sommaire

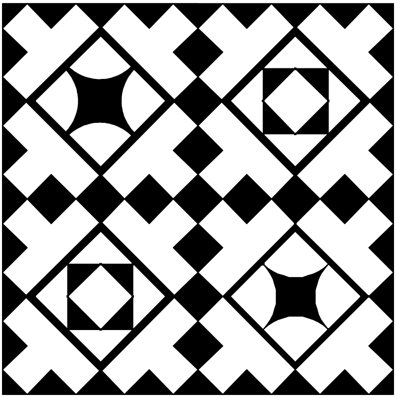


Figure 13. Schéma théorique du décor du panneau extérieur

2.2. Le panneau intermédiaire

Le bandeau latéral comporte, nous l'avons vu, sept médaillons à décor géométrique végétalisé, eux aussi séparés par une tresse à deux brins (fig. 14).

Figure 14. Le bandeau latéral

Le décor du panneau intermédiaire principal (fig. 15) est décrit dans l'ouvrage de référence comme un « *quadrillage oblique de bandes à carré d'intersection débordant, en tresse* » (Balmelle & al. 1985, p. 222) Dans chaque angle on trouve la représentation d'un animal utilisé dans les combats de gladiateurs contre des fauves (*venationes*) : sanglier, ours, panthère et tigre. Selon J.-P. Darmon, ces animaux pourraient peut-être symboliser les quatre saisons[8].

8 Communication orale.

retour sommaire

Figure 15. Le panneau intermédiaire

Une des difficultés à surmonter, lorsqu'on étudie le décor d'une mosaïque géométrique, est d'en déterminer les lignes directrices. Ainsi, dans le cas présent, s'agit-il de considérer la limite externe des polygones, leur limite interne ou l'axe des tresses ? La réponse s'obtient en considérant les points communs à deux polygones (fig. 16). On voit que ces points appartiennent aux *bords externes*. Sous cette hypothèse, on constate en outre que les sommets des carrés sur la pointe sont les milieux des côtés des carrés droits (et inversement) et que, de même, les sommets des carrés droits sont les milieux des côtés longs des rectangles.

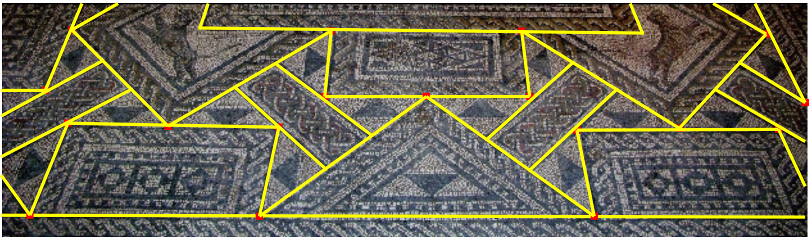


Figure 16. Détermination des lignes directrices

En se fondant sur ces lignes directrices, l'étude de la composition du pavage induit par ce décor montre qu'il se décompose effectivement en 3 × 2 carrés comportant le même décor (fig. 17), dont aucun n'est par ailleurs complet.

retour sommaire

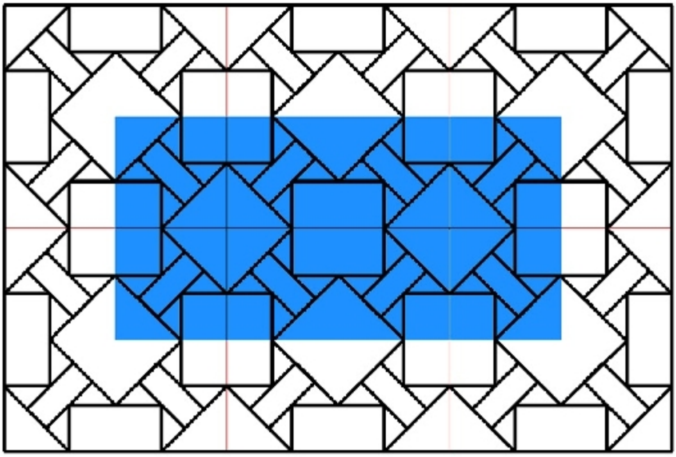


Figure 17. Composition géométrique du décor

Les mesures effectuées sur place ont montré que les carrés droits et les carrés sur la pointe sont de même dimension[9], mais on peut également s'en rendre compte sur le cliché de la figure 18, grâce à un peu de géométrie perspective.

Figure 18. Tous les carrés ont la même taille

9 Ils mesurent tous, à très peu près, 1,00 m de côté. Mais n'allons pas en conclure que les Lorrains de l'Antiquité avaient inventé le système métrique !

Considérons le carré droit ABCD et le carré sur la pointe NPQR. Soit [MN] une médiane du carré ABCD ; nommons Π le plan vertical contenant [MN]. Sur le cliché, la droite (MN) est frontale, donc les segments qu'elle contient sont représentés « en vraie grandeur ».

Construisons dans le plan Π le carré NMHK, qui est donc de même taille que le carré ABCD. Rabattons ensuite la diagonale [NH] de ce carré autour de (AD) sur (MN). On constate que, dans le rabattement, le point H vient coïncider avec Q. Par conséquent les diagonales des carrés ABCD et NPQR ont même taille, et il en va de même pour ceux-ci.

La composition du décor peut *a priori* paraître complexe. Mais sa décomposition en 6 carrés unitaires identiques, comme l'indique la figure 17, permet de se ramener à des constructions plus simples.

La mise en place du décor de chaque carré repose en effet sur une construction très courante – et, si l'on peut dire, « classique » – dans la mosaïque antique : celle de l'octogone régulier inscrit dans un carré (fig. 19 A) : on trace les diagonales du carré, puis les cercles centrés en ses sommets et passant par son centre. Leurs points d'intersection avec le carré sont les sommets de l'octogone régulier inscrit (démonstration laissée au lecteur).

Partant de cette construction, on trace les diagonales de l'octogone parallèles aux diagonales du carré (elles joignent les sommets de trois en trois). Ceci détermine le carré « sur pointe » central (fig. 19 B). Puis, en menant par exemple les parallèles aux côtés du carré initial par les sommets du carré central, on construit les « demi-carrés » latéraux (fig. 19 C). Enfin, par les parallèles aux diagonales du carré initial passant par les sommets intérieurs des demi-carrés, on obtient les rectangles (fig. 19 D).

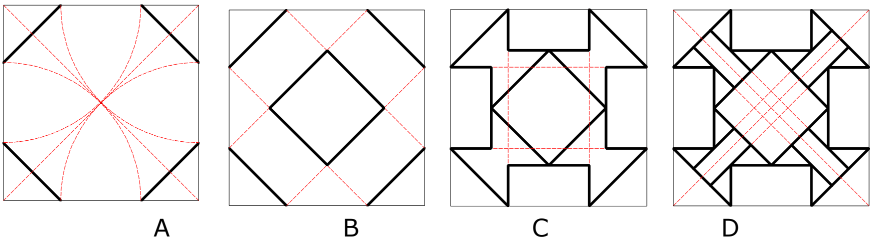


Figure 19. Construction du motif unitaire carré

retour sommaire

Il suffit alors de répliquer ce décor par des symétries par rapport aux côtés du carré initial pour obtenir un pavage du plan[10] (fig. 17).

Mais ici, comme nous l'avons remarqué, aucun carré n'est complet : le décor est en fait constitué d'une bordure de 16 triangles rectangles isocèles au décor identique, disposés tête-bêche (fig. 20).

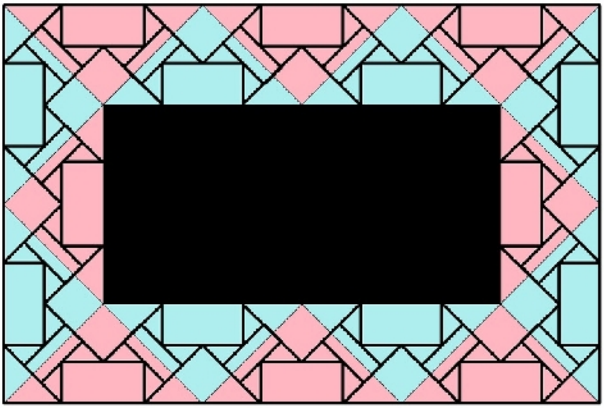
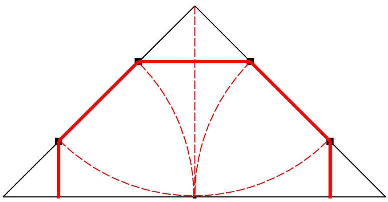
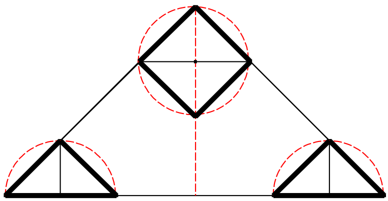


Figure 20. Décomposition du décor en 16 triangles

On peut alors envisager une procédure de construction alternative. Dans un triangle rectangle isocèle (considéré comme un « demi-carré »), on construit les quatre sommets d'un « demi-octogone régulier » inscrit, par la méthode indiquée plus haut (fig. 21 A). On construit ensuite, aux sommets du triangle, le carré et les triangles (fig. 21 B), puis – par des perpendiculaires et/ou des parallèles – le rectangle central (fig. 21 C), et enfin les rectangles latéraux (fig. 21 D).

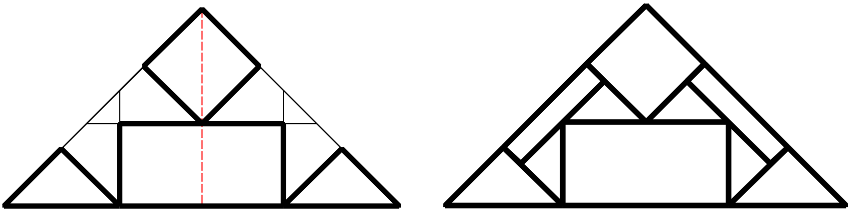


A



B

10 On peut remarquer au passage que l'expression « *quadrillage oblique* » figurant dans la description citée plus haut, si elle correspond à l'orientation des rectangles, ne convient pas au réseau servant à mettre en place le décor.

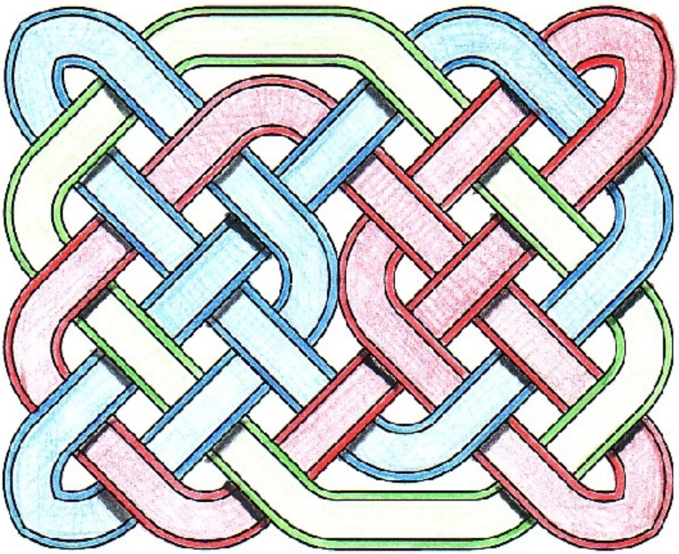


C D

Figure 21. Construction du motif unitaire triangulaire

Quelle que soit la construction qu'il ait utilisée, le mosaïste ne la refaisait sans doute pas dans chacun des carrés du réseau. Plus probablement, il la réalisait une seule fois – in situ ou à proximité – et répliquait le motif par des reports de longueurs au cordeau.

La suite de cet article (panneau central et abside, conclusion et bibliographie) sera publiée dans le prochain numéro du Petit Vert. L'intégralité de l'article est téléchargeable sur notre site, à l'adresse http://apmeplorraine.free.fr/modules/regionale/jr_2013/Conf_BParzysz_Mosaique.pdf



retour sommaire

VU SUR LA TOILE

Dessiner, c'est gagner

Une animation avec GeoGebra peut être longue à réaliser surtout quand on se rend compte, la veille au soir, que le cours du lendemain serait plus facile à faire passer avec un beau dessin. La toile regorge de productions de ce que je n'hésiterais pas à appeler « artistes du genre » tant les fichiers proposés font parfois preuve d'inventivité et de souci du détail. Mes premières recherches sur les solides de révolution en STI (pas 2D … ni 3D) m'avaient mené, à l'époque, sur le site de Daniel MENTRARD : http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/, qui est l'un des créateurs les plus prolixes. Ses œuvres font la part belle tant aux mathématiques qu'aux sciences physiques et comptent même quelques adaptations des grands maîtres. Le site officiel de Geogebra héberge un grand nombre de ressources visibles sur GeogebraTube : http://www.geogebratube.org/

Les pages de l'académie de Haute-Corse montrent comment on peut découvrir GeoGebra dès l'École élémentaire : http://ia2b.ac-corse.fr/Decouverte-simple-du-logiciel-GeoGebra_a286.html .
Les liens qui suivent recensent de nombreuses ressources pour une utilisation au Collège : http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Coll%C3%A8ge ou http://www.delphineheurtaux.fr/spip.php?article144 , avec une référence au site du Collège H. Wallon de Garges-lès-Gonnesse : http://www.rar-wallon-garges.ac-versailles.fr/spip.php?rubrique250 qui présente des figures belles et simples.
Pour le Lycée, Maths Bidouille : http://mathsbidouille.free.fr/page0/index.html dispose d'un forum assez actif avec un post consacré aux VideoGebra : http://mathsbidouille.free.fr/forum/showthread.php?tid=264.
On trouvera ici aussi quelques fichiers pour des exercices assez classiques et donc bien utiles : http://histoiredechiffres.free.fr/formation/ressources%20geogebra/sommaire.htm .

« Autour de GeoGebra » comporte un 28 tutoriels prévus pour pratiquer 24 exercices : http://autour-de-geogebra.blogspot.fr/. Un bon moyen d'apprendre par la pratique. Le site du « récit » intègre également un grand nombre d'outils pour la prise en main : http://recitmst.qc.ca/GeoGebra-des-ressources.

Enfin, pour ceux qui désirent créer des figures de l'espace, ils peuvent découvrir les nouvelles fonctionnalités de GeoGebra 5 et de son module de géométrie dans l'espace : http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp

gilles.waehren@wanadoo.fr

SOLUTION DU PROBLEME n°114

Rappel de l'énoncé : Un triangle étant donné, est-il toujours possible de le positionner sous une source lumineuse ponctuelle donnée de sorte que son ombre au sol (plan) soit un triangle équilatéral ? Pire encore : est-il possible de trouver une surface sur laquelle l'ombre de ce triangle est un carré ??

Nous n'avons reçu que deux solutions pour ce problème, l'une de Jacques Choné et l'autre de l'auteur, Jean-Marie Didry. La réponse aux deux questions est OUI. Nous vous proposons ci-dessous la solution de Jacques Choné pour la première question. La totalité des solutions est disponible sur notre site, rubrique « Le Petit Vert », sous-rubrique « Problèmes ».

Nous traitons la première question par deux méthodes ; la première est très simple mais s'applique seulement si le triangle donné est acutangle et la seconde fait appel au théorème de Desargues mais s'applique dans le cas général.

1. Soit *a, b, c* les mesures des côtés du triangle donné, supposé ici acutangle et, dans un repère orthonormal d'origine O de l'espace, les points $A(x,0,0)$, $B(0,y,0)$, $C(0,0,z)$. Pour pouvoir identifier le triangle donné au triangle ABC, il suffit que le système :

$\begin{cases} a^2 = y^2 + z^2 \\ b^2 = z^2 + x^2 \\ c^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$ ait une solution en nombres positifs. Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \\ y^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2) \\ z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \end{cases}.$$

Or puisque le triangle est acutangle, on a : $b^2 + c^2 > a^2$, $c^2 + a^2 > b^2$, $a^2 + b^2 > c^2$.
Le système étudié a bien une unique solution en nombres positifs et on peut identifier le triangle donné au triangle ABC.
Soit alors u un nombre supérieur à chacun des trois nombres *x, y, z* ainsi obtenus et les points $A'(u,0,0)$, $B'(0,u,0)$, $C'(0,0,u)$. Le triangle $A'B'C'$ est équilatéral et il est l'image du triangle ABC dans une projection centrale de centre O. On en déduit le résultat demandé (en faisant « tourner » la figure de façon que le plan déterminé par $A'B'C'$ soit horizontal (le sol), que la source lumineuse soit en O et que le triangle donné soit positionné en ABC.

2. Soit ABC le triangle donné, S un point dans son plan et un triangle équilatéral $A'B'C'$ dont les sommets sont respectivement sur les droites (SA), (SB), (SC). La construction en est facile: on choisit un point A' sur la droite (SA), B' est alors l'intersection de la droite (SB) avec l'image de la droite (SC) par la rotation plane de centre A' et d'angle $\pm\frac{\pi}{3}$ (selon le cas de figure) et C' est l'antécédent de B' par cette rotation (Remarque :si B' n'existe pas, on change la position de S).

retour sommaire

D'après le théorème (direct) de Desargues les intersections (éventuellement rejetées à l'infini) $U=(BC)\cap(B'C')$, $V=(CA)\cap(C'A')$, $W=(AB)\cap(A'B')$ des droites indiquées sont alignées sur une droite Δ. Considérons alors les images A_1, B_1, C_1 des points A, B, C par une rotation de l'espace d'axe Δ.

Les points $U=(B_1C_1)\cap(B'C')$, $V=(C_1A_1)\cap(C'A')$, $W=(A_1B_1)\cap(A'B')$ étant alignés (sur Δ), d'après la réciproque du théorème de Desargues (dans l'espace) les droites (A_1A'), (B_1B'), (C_1C') sont concourantes en un point S'.

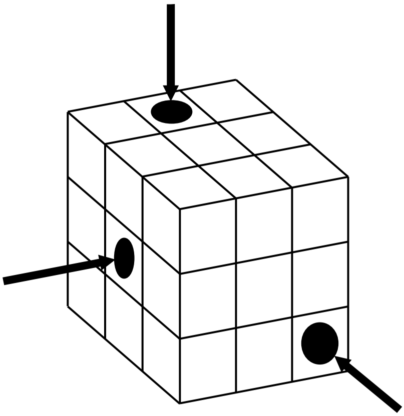
Ainsi, en « positionnant » le triangle ABC donné en $A_1B_1C_1$ (qui en est son image par la rotation), son ombre sous une source lumineuse placée en S' est le triangle équilatéral $A'B'C'$.

Remarque :

Étant donné un quadrilatère plan, il existe une projection centrale qui l'envoie sur un carré. Voir les pages 4 et 8 de « An Introduction to Projective Geometry, IMO Training 2006-2007 » :
http://www.docstoc.com/docs/47390909/An-Introduction-to-Projective-Geometry

Problème du trimestre n°115

proposé par Jacques Verdier



Dans un cube de côté n (sur la figure ci-dessus, n = 3), on choisit **au hasard** un des n^2 « petits carrés » de la face supérieure, et on y perce avec un foret un trou perpendiculaire à cette face, qui traverse tout le cube (forage indiqué par une flèche). On fait de même avec un des « petits carrés » de la face de gauche, et un des « petits carrés » de la face de droite.

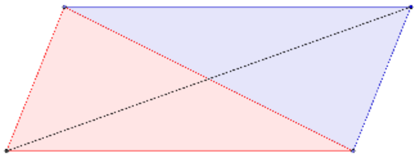
Il existe alors quatre possibilités : soit les trois forages ont un même « point » d'intersection, soit ils ont deux points d'intersection distincts, soit deux d'entre eux ont un point d'intersection mais ne recoupent pas le

retour sommaire

troisième, soit ils ne se recoupent pas du tout (c'est d'ailleurs le cas sur la figure ci-dessus).
Calculer, en fonction de n, la probabilité de chacune de ces quatre éventualités. Définir leurs limites lorsque $n \rightarrow \infty$.

Envoyez votre solution (nous espérons en recevoir une grande quantité), **ainsi que toute proposition de nouveau problème**, à Loïc Terrier (de préférence par courriel, sinon 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE).

SOLUTION DÉFI COLLEGE/LYCEE n°114

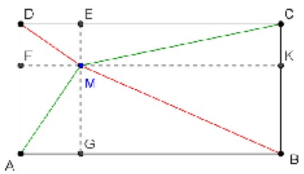


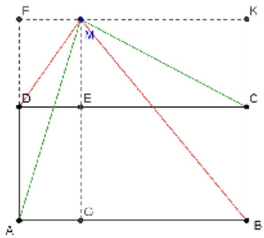
La somme des carrés des côtés d'un rectangle est égale à la somme des carrés de ses diagonales. Mais cette propriété s'applique-t-elle aussi au parallélogramme ?

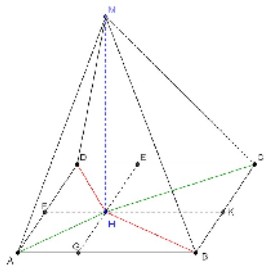
La réponse est **OUI**. Mais ce n'est pas du tout simple à démontrer ! L'exercice avait été proposé dans le bulletin APMEP n°483, et sa solution est en ligne sur la site de l'APMEP :
http://www.apmep.asso.fr/Somme-des-carres-des-cotes-d-un

Beaucoup plus facile à démontrer était la seconde proposition de ce défi :

M étant un point quelconque du rectangle ABCD, a-t-on toujours $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$?
La réponse est OUI, c'est une application directe du théorème de Pythagore, en utilisant les projections orthogonales de M sur les côtés.
C'est encore vrai si le point M est extérieur au rectangle, et même en dehors du plan du rectangle (voir figures).

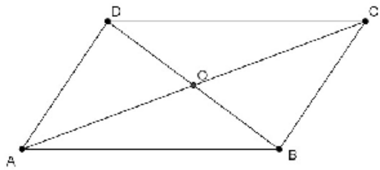




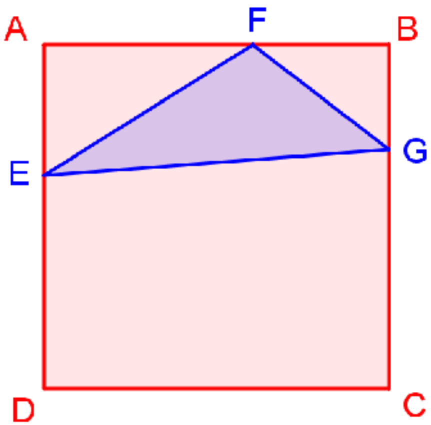


retour sommaire

Par contre, cette fois, la propriété n'est plus vraie pour le parallélogramme. Il suffit d'exhiber un contre-exemple : ce 'est pas vrai si M est en O, puisque la « demi-grande » diagonale n'est pas égale à la « demi-petite » diagonale.



DÉFI COLLEGE n°115



On considère un carré ABCD. Sur trois de ses côtés, on place les points E, F et G, **distincts des sommets A, B, C et D**.

Comment placer les points E, F, et G pour que le triangle EFG soit :

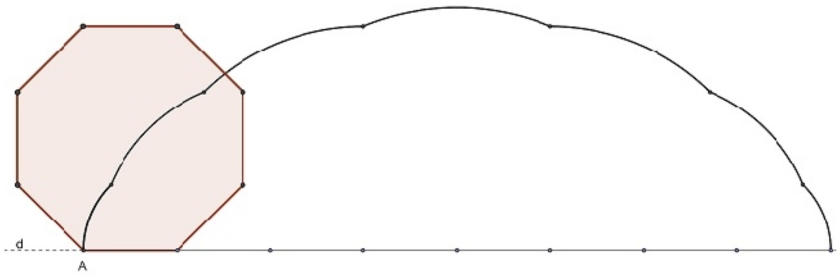
- un triangle rectangle ?
- un triangle isocèle ?
- un triangle rectangle isocèle ?
- un triangle équilatéral ?

Plus difficile :
La même question, avec une contrainte supplémentaire : E, F et G ne doivent pas non plus être au milieu d'un des côtés du carré.
Quand vous avez trouvé une (ou plusieurs) solution(s), merci de **fournir un « programme de construction »** : soit pour une construction sur papier avec instruments habituels de dessin (en laissant apparents les tracés), soit pour une construction avec un logiciel de géométrie dynamique (en précisant l'ordre des tracés).

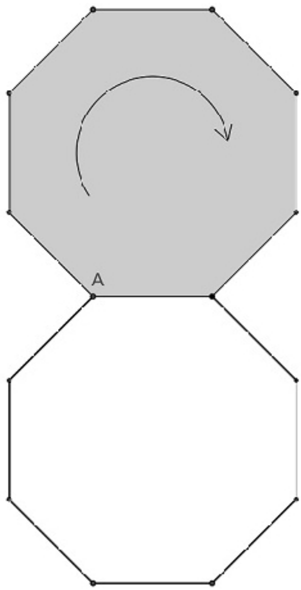
retour sommaire

DÉFI LYCEE n°115

Un octogone « roule » sur une droite (d).
On a représenté ci-dessous la trajectoire du sommet A de l'octogone pendant cette « manœuvre », correspondant à un tout complet de l'octogone. Pouvez-vous calculer la longueur de cette trajectoire (on prendra comme unité la longueur du coté de l'octogone) ?



Un peu plus complexe, maintenant : l'octogone gris tourne autour d'un autre octogone qui reste fixe. Représenter sa trajectoire (correspondant à un tour complet). Quelle est sa longueur ? Quelle est l'aire de la surface située à l'intérieur de cette trajectoire ?



Chaque trimestre, le Petit Vert vous propose un DEFI destiné à vos élèves de collège et/ou de lycée ?

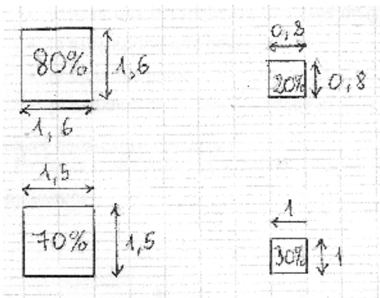
Envoyez toute solution originale de vos élèves, ainsi que toute proposition de défi, à michel.ruiba@ecopains .net

retour sommaire

SOLUTIONS D'ÉLÈVES A NOS DÉFIS

Dans le Petit Vert n° 108 (décembre 2011), nous avions présenté ce défi : Les représentations ci-dessous, issues de la revue Challenge du 17/11/2011, sont elles mathématiquement correctes ?

Voici la réponse de Céline, Émilie, Tristan et Guillaume, un groupe d'élèves de cinquième (professeur : Claire Staub).



80 = 4 x 20

1,6 x 1,6 2,56

0,8 x 0,8 0,64

2,56 = 4 x 0,64

$70 = \frac{7}{3} \times 30$

$1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25 = \frac{9}{4} = \frac{27}{12}$

1 x 1 = 1

$\frac{7}{3} \times 1 = \frac{7}{3} = \frac{28}{12}$

Il est juste à $\frac{1}{12}$ près.

Au comité de rédaction du Petit Vert, nous avons bien aimé la réponse « C'est juste à 1/12 près » !

Ces mêmes élèves ont également résolu le défi n°110 (juin 2012), dont voici l'énoncé :

Le jeune Alionel veut devenir berger. Il va trouver monsieur Atanase et lui demande aimablement de le prendre en stage. Ce dernier lui montre un enclos où paissent paisiblement des moutons et lui dit : « *Dans cet enclos, il y a moins de 1 000 bêtes. Si tu permutes le chiffre des dizaines*

retour sommaire

de ce nombre et le chiffre des unités, il y aura 9 têtes de trop ; mais si tu triples le nombre des dizaines, le cheptel augmente de 400 bêtes. Trouve le nombre de moutons qu'il y a dans l'enclos et je t'accepte comme second ».
Aide l'apprenti berger à se faire embaucher par le pâtre.

Voici la solution proposée par ce groupe de 4 élèves :

Si on permute le chiffre des dizaines de ce nombre et le chiffre des unités, il y aura 9 têtes de trop.
→ le chiffre des **unités** = le chiffre des dizaines + 1
Si on triple le nombre des dizaines, le cheptel augmente de 400 bêtes.
→ le nombre des dizaines de 400 est 40.

$40 = \frac{2}{3}$ du nombre des dizaines × 3

$40 = \frac{2 \times \cancel{3} \times \text{le nombre des dizaines}}{\cancel{3}}$

N

40 = 2 × le nombre des dizaines
→ le nombre des dizaines est 20
→ le chiffre des dizaines est 0
→ le chiffre des unités est 1 (car 0 + 1 = 1)

→ Le nombre de moutons dans l'enclos est de 201.

Vous aussi, n'hésitez pas à proposer à vos élèves les défis (mêmes anciens) du Petit Vert, et envoyez-nous leurs solutions. Merci.

retour sommaire

VIE DE LA REGIONALE
RALLYE DE L'A.P.M.E.P. 2013

Premiers de Lorraine en maths !

Pour les élèves de 3e et leurs professeurs du collège du Pervis, l'inscription au « Rallye mathématique » de Lorraine constituait une épreuve audacieuse car il s'agissait d'affronter 180 autres classes de collèges et de lycées mieux rodés à cette discipline.
Qui ne risque rien n'a rien ! Le petit établissement vosgien se lançait dans la compétition organisée par l'association régionale des professeurs de mathématiques de l'enseignement public. Les 24 élèves, encouragés par leur prof de maths Cédric Diziain arriveraient-ils à déjouer les pièges tendus par « le commissaire Albert Girard » ?
Dix exercices portaient sur des enquêtes très variées du commissaire, tantôt prévoyant, tantôt face à un travail de romain, puis chez son garagiste, dans son bureau face à un piège tout en noir...
Les corrections ont demandé du temps. Jeudi après-midi, le responsable du rallye, M. Drouin, et un de ses collaborateurs ont annoncé les résultats. Les collégiens darnéens ont appris qu'ils étaient classés premiers de toutes les classes lorraines !

Le Principal M. Perron ne cacha pas sa satisfaction, soulignant que l'établissement pouvait être fier de ce résultat : « *Vous avez travaillé dans une étroite coopération et vos recherches en équipe ont été exemplaires. Nous sommes fiers tout comme vous car vous avez été capables de réaliser un exploit, d'autant que c'était pour vous une première expérience de ce type* ».

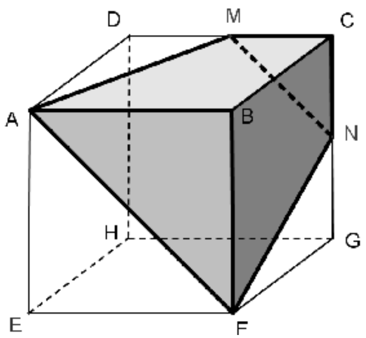
M. Drouin, délégué de l'association organisatrice, s'est monté ravi de venir dans ce collège rural. « *Dans une situation comme la vôtre, vous avez su vous montrer à la même hauteur que des jeunes citadins plus expérimentés* ». Les lauréats ont reçu leurs récompenses : un diplôme, une calculatrice professionnelle « grand format » et un puzzle rappelant les questions pièges.

Article paru dans Vosges Matin

retour sommaire

VIE DE LA REGIONALE
RALLYE DE L'A.P.M.E.P. 2013

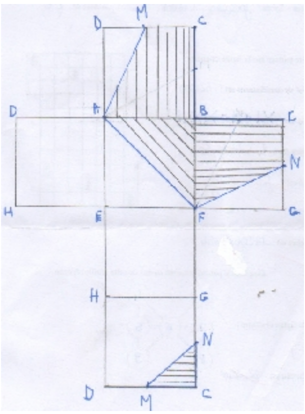
Un cube scié



La huitième question du Rallye 2013 était la suivante :

ABCDEFGH est un cube de 4 cm d'arête. En le sciant, j'obtiens le solide ABFMCN, où M est le milieu de [CD] et N est le milieu de [CG]. Calculez la longueur AN, puis dessinez un patron du solide ABFMCN.

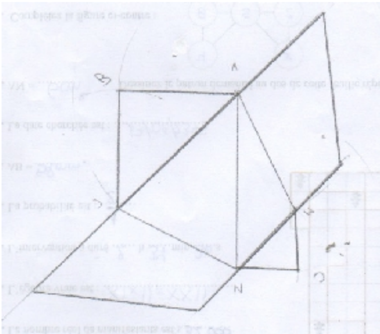
Analyse de quelques productions de classes :



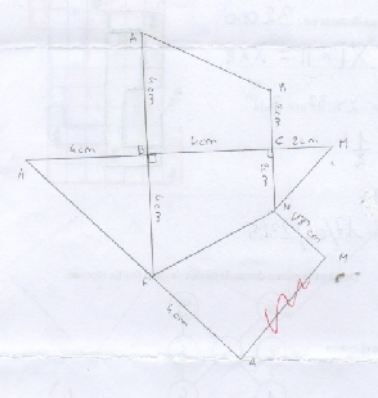
Les productions analysées seront indistinctement des productions de classes de troisième ou de seconde. La principale différence vient du fait que les classes de collège ont plus fourni de non réponses ou de réponses incomplètes que celles de lycée.

Plusieurs classes ont fourni ce type de patron, confondant le patron demandé avec la trace de la scie dans le cube.

Ici, la longueur AN a été utilisée pour tracer le trapèze isocèle. L'aspect symétrique du patron a été repéré. Les correspondances des longueurs sont respectées. Le solide a été perçu un peu comme un prisme. Sont alors apparus des alignements faisant oublier le fait que deux des faces étaient des trapèzes isocèles.

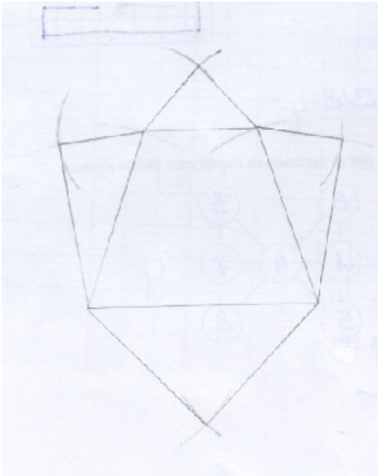


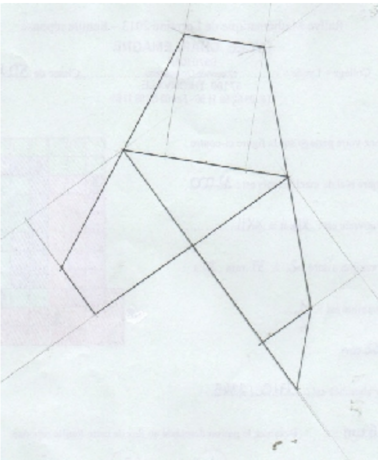
retour sommaire



Seul le trapèze isocèle n'a pas été reconnu, causant des non respects de correspondances de longueurs. La classe n'a pas saisi l'intérêt du calcul de AN.

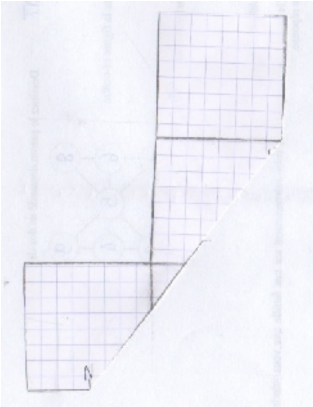
Les arcs de cercle ne montrent pas d'utilisation de AN pour le tracé du trapèze isocèle, la petite base semble avoir été tracée au jugé. Les trapèzes rectangles n'ont pas été reconnus, mais les correspondances des longueurs sont respectées.





Sur-figures et sous-figures ont été mises à contribution. La finalisation du trapèze isocèle semble malgré tout avoir été faite au jugé.

retour sommaire

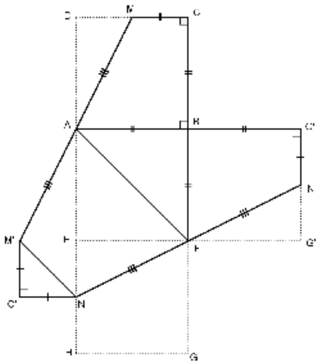


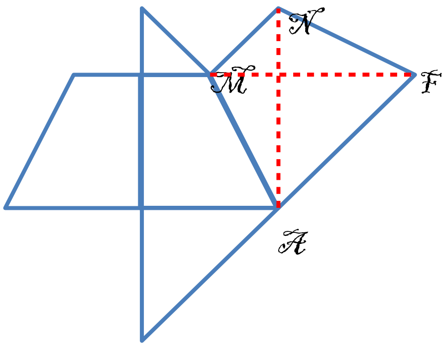
Certaines classes ont fourni des patrons surprenants, tel celui ci contre. L'élève qui l'a produit n'a sans doute pas demandé l'aval de ses camarades avant qu'il soit collé sur la feuille réponse.

La demande de la longueur AN avait pour but de faciliter le tracé de la face AMNF. Il est à noter que beaucoup de classes n'ont pas utilisé cette longueur AN.
Les trapèzes ne figurant plus dans les programmes tant de l'enseignement primaire que secondaire, les élèves ont pu avoir du mal à les reconnaître comme faces du solide puis à les représenter.

Quelques idées de prolongements en classe :

Comment tracer un trapèze isocèle connaissant la longueur de ses quatre côtés ?
Les mesures des côtés du trapèze isocèle sont des nombres irrationnels, les mesures des diagonales sont des nombres entiers. Existe-t-il des trapèzes isocèles possédant cette propriété, autres que ceux obtenus par agrandissement ou réduction de celui de l'énoncé ?





Les développements proposés à l'équipe de correction montrent des diagonales du trapèze isocèle MNFA de même longueur (ce qui n'est pas surprenant car une de ses médianes est axe de symétrie) et perpendiculaires (ce qui est plus inattendu) et également des alignements non anticipés (par exemple M, A, M' et N, F, N' dans le second développement proposé). Comment justifier ces propriétés perçues visuellement ?

retour sommaire

VIE DE LA REGIONALE
RALLYE DE L'A.P.M.E.P. 2013

Analyse des réponses à la question subsidiaire

Rappel de l'énoncé : Loto de cœur
Arthur, le petit-fils du commissaire Albert Girard, a inventé un loto en utilisant uniquement les 13 cœurs d'un jeu de 52 cartes.
Pour jouer, il faut faire un ou plusieurs paris, chaque pari étant une liste de 6 cartes choisies parmi les 13 cœurs.
Une fois les paris effectués, Arthur tire 6 cartes au hasard.
Un pari est gagnant s'il comporte au moins 3 cartes communes avec le tirage.
Arthur met à l'épreuve son grand-père ; il lui demande quel est le nombre minimum de paris à faire pour être certain d'avoir au moins un pari gagnant.
Vous aussi, vous avez du cœur, alors aidez notre cher vieux commissaire à prouver à son ingénieux petit-fils que l'heure de la retraite n'a pas encore sonné !

Statistique des résultats
Lycée : Non réponse : 27 (32,5%) ; réponse exacte : 19 (22,9%) ; réponse fausse : 37 (44,6%)
Collège : Non réponse : 46 (42,6%) ; réponse exacte : 14 (13%) ; réponse fausse : 48 (44,4%).
On peut remarquer que les taux de réponses fausses sont quasiment identiques, par contre la répartition est différente entre non réponse et réponse exacte.
Au collège, la question déconcerte puisque près d'une classe sur deux ne répond pas à la question. Au lycée ce type d'énoncé est reconnu, souvent comme étant un problème qui nécessite d'utiliser les probabilités (16,9% au lycée et 9,2% au collège) ou/et des formules de dénombrement, d'où la différence sur les non réponses.

Étude des bonnes réponses

Certaines explications sont très claires tout en occultant, tout au moins dans la rédaction, l'exhaustivité des cas comme par exemple celle-ci :

Il y a besoin de 2 paris.
Exemple : les deux paris sont 1-2-3-4-5-6 et 7-8-9-10-V-D, et la première carte tirée est R.
Il reste 5 cartes, donc il y aura forcément au moins 3 cartes gagnantes pour un pari :
- soit 3 cartes dans le premier pari et 2 dans le second ;
- soit 2 cartes dans le premier pari et 3 dans le second ;
- soit 4 cartes dans le premier pari et 1 dans le second ;

retour sommaire

- soit 1 carte dans le premier pari et 4 dans le second ;
- soit 5 cartes dans le premier pari ;
- soit 5 cartes dans le second pari.

Dans tous les cas, c'est gagné !

Toutes les bonnes réponses montrent que deux paris sont suffisants, s'ils sont bien choisis (aucune carte commune aux deux paris). Mais très peu de réponses (4 sur les 33 réponses exactes) explicitent le fait qu'un seul pari ne peut pas suffire. Comme on le trouve dans cette phrase d'une classe de collège:

En ne faisant qu'un seul pari, on couvre seulement 6 cartes sur le jeu de 13. Il y a donc la possibilité qu'Arthur tire les 6 cartes non pariées.

Étude de quelques réponses fausses

Elles sont, comme souvent, beaucoup plus difficiles à analyser. Certains raisonnements sont pratiquement impossibles à suivre, bien qu'ils utilisent presque tous les nombres donnés (13, 6 et 3) :

Par exemple : $\dfrac{\dfrac{13^2}{6}}{3} = 9$

D'autres sont tellement laconiques qu'on se demande parfois à quoi elles correspondent (même si le raisonnement sous-jacent est correct) :

Sachant que toutes les cartes pariées sont différentes, la réponse est 2.

D'autres élèves ne répondent à la question qu'en ne tenant compte du nombre de cartes que l'on peut prendre dans un pari. Ils réalisent, en général, une partition de l'ensemble des cartes en trois ensembles, deux que l'on peut choisir disjoints et le dernier qui peut sortir dans un tirage particulier. On rencontre ce raisonnement aussi bien au collège qu'au lycée (4 fois au lycée (4,8%) et 5 fois au collège (4,6%)) :

Le nombre de paris pour en avoir au moins un gagnant est trois ; car lors du premier pari il y a 6 cartes, lors du second 12, donc il manque une carte. Il faut donc un troisième pari pour être sûr d'avoir les 3 cartes sorties.

Certaines réponses font apparaître des dénombrements.
En utilisant des formules :

Il y a $\dfrac{13\times12\times11\times10\times9\times8}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=1716$ combinaisons possibles, et $\dfrac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$ combinaisons gagnantes.

Mais à partir de là, le raisonnement est erroné :

retour sommaire

Il y a 1716 combinaisons possibles. Il y a 286 combinaisons gagnantes. 1716 - 286 = 1430. Il y aura 1430 combinaisons fausses. Il faut donc faire 1431 paris.

Parfois en pensant réaliser « à la main » tous les tirages possibles.

Beaucoup de réponses fausses proviennent du fait que **l'énoncé n'a pas été compris** : il y a confusion entre les paris (des listes de 6 cartes, que l'on écrit avant le tirage) et le tirage réel des 6 cartes fait par Arthur. Il est vrai qu'il est plus courant de faire un seul pari et de chercher le nombre de tirages qu'il faudrait attendre pour être certain de gagner. La représentation du problème est donc erronée et ainsi la réponse donnée correspond en général à une autre question :
Quel est le nombre minimum de tirages que l'on doit effectuer pour être certain de gagner ?
On trouve cette confusion entre pari et tirage dans l'exemple précédent mais également dans les suivants.

Si l'on remet les cartes en jeu, on peut faire autant de paris que l'on veut, ce n'est pas sûr pour autant que l'on ait les trois cartes choisies, vu qu'il y en a en tout 6 sur 13.

Supposons qu'ils ne remettent jamais les cartes dans la pioche. Alors il est impossible de parier 3 fois car le nombre de cartes est insuffisant, donc on ne peut parier que 2 fois si on désire gagner.

Pour finir, signalons le « réflexe » qui consiste à dégainer la formule apprise en classe : miracle de la calculatrice !

Un pari comporte 6 cartes. La formule est donc **Int(6xRan#+1)** pour simuler si les cartes sont gagnantes ou non. Sachant que les chiffres 1 et 2 sont perdants, et que 3, 4, 5 et 6 sont gagnants, il y a donc 4 chances sur 6 de gagner, soit 2 sur 3.
En théorie, son grand-père va gagner deux fois sur trois.

De nombreux autres exemples de raisonnements proposés par les classes sont consultables sur notre site (valider rallye 2013) :
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=rallye

retour sommaire

EXPOSITION

UNE IDÉE MILLE MACHINES, de Léonard de Vinci à Jean Errard

Le Petit Vert 113 a annoncé cette exposition présentée au Musée du Fer à Jarville jusqu'au 5 Janvier. Il n'est donc pas trop tard pour vous y rendre et y amener vos élèves. Voici quelques liens pour préparer la partie « mathématique » de votre visite. Pour en savoir un peu plus sur Jean Errard : http://fr.wikipedia.org/wiki/Jean_Errard

Frédéric Metin (ami des Journées APMEP) a travaillé sur les tracés géométriques utilisés dans les ouvrages bastionnés. Les diaporamas utilisés de sa conférence aux Journées APMEP 2008 de la Rochelle sont accessibles : http://www.apmep.asso.fr/Conferences,2586

A Jarville, Frédéric Métin présente le tracé d'une citadelle pentagonale comme celle de Doullens.

Pour tracer un pentagone régulier :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_du_pentagone_r%C3%A9gulier_%C3%A0_la_r%C3%A8gle_et_au_compas

Pour en savoir un peu plus sur Doullens et sa citadelle : http://crdp.ac-amiens.fr/idp/page3/files/d845efbc3999c5909155db51329239ab-201.html et http://picardie.profs.hg.free.fr/regionales/doullens/visite%20Doullens.pdf

Les œuvres mathématiques de Jean Errard sont accessibles sur Gallica : http://gallica.bnf.fr/Search?ArianeWireIndex=index&p=1&lang=FR&q=errard

La Bibliothèque Médiathèque de Nancy permet de consulter « Le premier livre des instruments mathématiques mechaniques de I. Errard de Bar le Duc » : http://bmn-renaissance.nancy.fr/items/show/1852

D'anciens plans de Nancy sont consultables (http://jcb1.pagesperso-orange.fr/ducs1.html#cartes).

Concernant l'œuvre mathématique de Léonard de Vinci, il est possible de s'intéresser à ses travaux sur les lunules http://leonard-de-vinci.net46.net/Partie_2_2.html et http://leonard-de-vinci-tpe.e-monsite.com/pages/le-chercheur/etude-des-lunules.html. De plus, une démonstration du théorème de Pythagore lui est attribuée : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/pythagor/textes/vinci.htm et

http://debart.pagesperso-orange.fr/geoplan/pythagore_classique.html#tr3

Par ailleurs Frédéric Métin (IUFM de Bourgogne) animera une conférence à l'amphithéâtre du muséum aquarium de Nancy le jeudi 5 décembre 2013 à 18h30. Le thème sera « Jean Errard et les mathématiques » et l'entrée sera libre.

retour sommaire