DANS NOS CLASSES

VOLUMES DE PYRAMIDES

Par Clara RAGOT et Émilie MARTIN-DUPAYS
Collège Maurice Barrès, Charmes
D'après *The Mathematics Teacher*, janvier 2001

Nous vous proposons ici une activité qui nous a été soufflée par le comité de rédaction de l'APMEP, et tout particulièrement François Drouin qui l'avait mise en œuvre en un temps où l'usage du tableur en classe n'était pas généralisé. Nous avons retravaillé les énoncés élèves et élaboré l'analyse. Elle fait suite à divers articles publiés dans les derniers numéros du Petit Vert (défi lycée n°119 et rubrique Maths et Médias des n^os^ 120 et 121).

Intention

Trouver la formule permettant de calculer le volume d'une pyramide. Faire le lien entre le volume du prisme droit et celui de la pyramide de même base, même hauteur et mettre en avant le fameux coefficient qui paraît sortir de nulle part pour les élèves.

Prérequis

Définition d'une pyramide.

Utilisation du tableur.

Objectifs selon la fiche d'objectifs distribuée en début d'année aux élèves

M Manipuler, construire, mesurer, calculer : chercher, émettre une conjecture.

R Raisonner, démontrer.

Gd2 Modifier une feuille de calcul, insérer une formule avec un tableur.

N6 Utiliser le calcul littéral pour résoudre un problème.

Gm2 Calculer des volumes.

Contexte

L'expérimentation se déroule dans trois classes de 4ème du collège de Charmes, classé en RRS (bientôt en REP). Émilie a en charge 2 classes et Clara une seule.
L'effectif de la classe de Clara permet de prendre en charge la diversité des élèves : les élèves d'ULIS n'étant pas inclus en mathématiques, il reste 20 élèves.

Déroulement prévu et analyse a priori

- **1ère partie : But de l'activité et premiers calculs**

1) présentation du but et visualisation – classe dialoguée

Lecture avec la classe des deux premiers paragraphes du document élève (annexe 0).
Afin de faire expliciter le 2ème paragraphe en gras, le professeur aura construit des « pyramides » de cubes de base un polygone non carré, donc contenues dans un prisme droit non cubique (annexe 1). Puis il montrera des « pyramides » de cubes comme celles dessinées sur le document élève (élèves en groupes, constructions déjà prêtes, une série par groupe – voir photos en annexe 2). Il s'agit de faire en sorte que les élèves, d'une part, visualisent les pyramides et d'autre part, fassent le lien avec la forme générale de la formule qui sera trouvée en fin d'activité, c'est-à-dire que les élèves passent bien du prisme au cube (et inversement).

2) Production d'une 1ère formule – temps en groupes puis mise en commun

Pourquoi en groupes ? Pourquoi donne-t-on les constructions ?
On distribue à chaque groupe les premiers empilements. Les élèves peuvent construire une pyramide de cubes de hauteur 4 si certains ont encore besoin de visualiser et échanger entre eux. La mise en mots peut leur permettre d'avancer dans leur recherche, de formaliser leur comptage.
On ne donne pas le tableau tout de suite pour ne pas les influencer. Nous voulons tester leur prise d'initiative : feront-ils des essais sans que le professeur ne les y incite ? Sont-ils capables de s'engager seuls dans une démarche par tâtonnement, une phase d'observation, bref dans une recherche ? De telles activités (production d'une formule) ont déjà été réalisées en classe auparavant : activité les mosaïques notamment, tirée du document d'accompagnement *Du numérique au littéral*.

Aides prévues
Prends des exemples et calcule les volumes (figures 1 et 2).
Continue tant que tu ne trouves pas la façon de calculer.
Donner alors le tableau.
Ecris une formule.

Quant à la conjecture, rien n'apparait de concordant, si ce n'est que le quotient diminue. On s'attend à ce genre de conjecture imprécise. Le professeur fera remarquer que cela ne donne toujours pas le volume d'une « pyramide » de cubes… il nous faut continuer pour « affiner » la conjecture !

- ### 2ème partie : Une nouvelle formule, vers le volume d'une pyramide

Pour convaincre les élèves que cette formule est juste et qu'elle a bien un fondement, on utilise six pyramides de cubes bien empilées (voir annexe 3).
La question 1 permet aux élèves de s'approprier la formule.
Pourquoi utiliser le tableur ?
Deux séances sur tableur ont déjà été réalisées, dont notamment une qui permet de prendre en main une feuille de calcul et d'en comprendre l'intérêt. Nous utilisons pour cela toujours le fichier intitulé *Formule* tiré de *Le tableur au collège*[2]. Faire manipuler une feuille de calculs aux élèves avec l'utilisation de formules est au programme de 4ème.
Le tableur est d'une part une aide à la conjecture, d'autre part utile pour un calcul rapide avec des grands nombres. Cela a un vrai intérêt ici car le calcul n'est pas évident et surtout long à la main et fastidieux à la calculatrice. On ne revient pas sur l'intérêt du tableur dans le travail sur le calcul littéral pour la production et l'utilisation de formules.

Aides pour la question 2 en binôme sur tableur
Les exposants sont à expliciter : écrire au tableau *5^3 est traduit par 5^3*.
Si la difficulté réside dans le fait d'écrire des formules : le professeur renvoie à l'activité *Formule* afin que l'élève se rappelle qu'on commence par le signe = et qu'on utilise le nom des cellules.

Mise en commun et institutionnalisation
Il est prévu de revenir sur le dernier tableau en insistant sur les résultats de la dernière colonne. Nous nous attendons à des propositions de conjectures par les binômes, mais sans réelle formule de calcul du volume. Une phase en classe dialoguée permettra d'y parvenir.
Nous prévoyons d'utiliser les solides des annexes 1 et 2 afin d'obtenir la formule générale : passer de *côté* x *côté* x *côté* à *aire base* x *hauteur*. Il sera également utile de s'appuyer sur une pyramide et un prisme droit non cubique de même hauteur et même base.

[2] *Le tableur au Collège*, Chouanière B., Didry D., Millet C., Thinus N., Thiry M., IREM de Lorraine, 2004

retour au sommaire

Déroulement réel et analyse a posteriori

- **Expérimentation dans les classes d'Émilie**

Séance 1 : six groupes dans une classe et six groupes dans l'autre.

Première classe

Trois groupes ont trouvé la formule, un l'a écrite ; trois autres groupes sont arrivés à $1^2 + 2^2 + 3^2$ sans formaliser dans le cas général.

Deuxième classe

Tous les groupes ont trouvé sur des exemples $4\times4 + 3\times3 + 2\times2 + 1$, mais ils ont eu des difficultés à passer au cas général car la formule est à « l'envers » (commence par le côté final).

Un seul groupe a réussi à écrire la formule : $1 + 2\times2 + 3\times3 + \ldots + n\times n$, mais sans voir l'écriture avec les carrés !

La mise en route a été difficile dans cette classe, la généralisation leur semblait trop abstraite malgré le matériel donné. Ils ne voyaient pas à quoi servaient les cubes de cubes et effectivement, faut-il vraiment leur donner ? Il est intéressant de les montrer au départ, mais il n'y a pas d'intérêt à ce qu'ils les aient pour la manipulation. Sur des exemples, ils n'ont pas de problèmes, mais dès qu'on veut aller plus loin, c'est difficile.

La partie d'explication au départ a pris du temps, certains ont eu des difficultés à comprendre pourquoi on introduisait aussi des prismes droits et pas que des cubes.

Dans la question : « Peux-tu trouver une méthode pour calculer le volume d'une telle « pyramide » de cubes quelle que soit la longueur du côté ? », l'expression « quelle que soit la longueur du côté » a posé problème à certains. Une reformulation a été nécessaire, en introduisant des exemples de côtés plus grands.

Séance 2

- Reprise en classe entière et explicitation de la formule à l'aide de la manipulation : on ajoute un étage de $n\times n$ à chaque étape. L'introduction de la lettre n n'a pas posé de problème, elle est venue naturellement lorsqu'on a dit un grand nombre, « n'importe lequel ».
- Remplissage du tableau et conjecture qui ne permet pas de conclure.

Les élèves ont alors bien compris et ont même trouvé seuls (en classe dialoguée) qu'on allait devoir prendre des longueurs de côtés plus grandes pour essayer d'aboutir à quelque chose.

- Explication de la nouvelle égalité pour faire moins de calculs.

Un élève qui a des difficultés et un suivi particulier n'avait toujours pas compris et il a donc manipulé pendant une grande partie de l'heure. Il a construit toutes les pyramides jusqu'à celle de côté de base 5 et il a calculé leur volume en comptant les cubes un à un. Il a alors compris que chaque pyramide était formée de la précédente avec un étage en plus, mais il n'a pas compris la façon de calculer par multiplication.

Séance 3

- Quelques rappels rapides à l'oral sur ce que nous étions en train de faire ;
- Correction du test de la formule pour $n = 10$;
- Tableur, remplissage du tableau.

Dans certains groupes, il a fallu revoir avec eux comment écrire une formule et surtout comment l'étendre.

Un élève en grande difficulté et qui ne fait généralement pas grand-chose, a réussi seul à compléter le tableau avec les formules.

retour au sommaire

Séance 4 : Bilan de l'activité avec écriture de la formile du volume

En classe dialoguée et avec sous les yeux la feuille de calcul d'un groupe de la classe vidéo projetée au tableau, nous avons étudié les résultats obtenus afin d'émettre la conjecture. Celle-ci n'avait été trouvée que dans peu de groupes car l'arrondi au millième n'avait pas été fait pour une grande majorité. Très vite, avec cet arrondi, les élèves ont vu la conjecture.
Concernant le passage à la formule du volume de la pyramide, cela a été assez simple. J'ai été surprise par la vitesse à laquelle certains élèves avaient fait le rapprochement entre 0,333 et 1/3.

- **Expérimentation dans la classe de Clara**

Séance 1 : une demi-heure pour la première partie

La partie classe dialoguée a pris du temps, le temps nécessaire pour que les élèves s'approprient l'énoncé et le but de l'activité. Il a été nécessaire de rappeler le volume d'un prisme droit, noté au tableau afin de bien mettre en avant que s'il y a un lien entre le volume du prisme droit et celui de la pyramide, nous aurons trouvé une méthode pour calculer ce dernier.
La reformulation en classe dialoguée de « Peux-tu trouver une méthode pour calculer le volume d'une telle "pyramide" de cubes quelle que soit la longueur du côté ? » permet d'ajouter au tableau, à l'énoncé vidéo projeté : « pour 2, pour 3, pour 4, etc., pour 1 000, pour 10 000 ? ». C'est-à-dire qu'on ne dit pas d'introduire une lettre, mais au vu des activités déjà réalisées en classe, le passage à « n'importe quel nombre », puis à la lettre sera facilité.
Lors de la recherche en groupes est apparu un parasitage non anticipé : des élèves essayaient dès ce premier temps de faire le lien entre volume de pyramides et volume de cubes. Les constructions distribuées en sont surement la cause. Leur distribuer des pyramides est intéressant car les élèves manipulent, et comme nous l'avions prévu, peuvent en construire d'autres (côté de longueur 4). Mais il n'est pas souhaitable de construire les cubes. Leur montrer de telles constructions est indispensable, mais il ne vaut mieux pas leur laisser.
Les aides prévues *Prends des exemples et calcule les volumes (figures 1 et 2)* et *Continue tant que tu ne trouves pas la façon de calculer* ont été utiles, auxquelles j'ai ajouté, afin que les élèves trouvent une méthode de calcul : *comment passer de compter à calculer ?*
A la fin de la séance, tous les élèves avaient trouvé une méthode, mais seul un élève avait écrit une formule.
La mise en commun a lieu sur la méthode, sans lettre. Le dialogue permet de passer de « 1 000, 10 000 » à « n'importe quel nombre » et presque naturellement à l'idée d'introduire une indéterminée. La classe se met d'accord sur le fait qu'il faille écrire une formule pour la prochaine fois.
Au final, le tableau n'a pas été distribué.

Séance 2 : une séance écourtée plus difficile

La séance a débuté par les questions concernant le DM à rendre quelques jours après. Ce temps fut assez long (presque 20 min).
Reprise de l'activité, les élèves rappellent le but et les différentes étapes déjà réalisées : *on veut savoir comment calculer le volume d'une pyramide, à partir du volume du prisme droit de même base, même hauteur. Pour l'instant, on a trouvé une méthode pour calculer le volume d'une pyramide de cubes.*
Le tableau est distribué, il est utile pour se replonger dans les calculs, et ainsi pour l'écriture de la formule. Comme prévu, la conjecture ne donne rien et la nouvelle formule est introduite. Les élèves en perçoivent l'intérêt au vu du nombre d'opérations effectuées. Pour la séance suivante, les élèves doivent tester cette nouvelle formule.

retour au sommaire

Séance 3 : tableur et conjecture

Reprise de l'activité : les rappels sont longs, de plus en plus longs puisque des étapes se sont ajoutées, mais ils apparaissent nécessaires, indispensables pour ne pas perdre le fil rouge.
Correction du test de la nouvelle formule, puis passage sur tableur, en binômes.
Toutes les aides ont été utilisées. La feuille *Formule* est sortie pour certains : se souvenir du signe égal (en général les élèves s'en souviennent bien), de l'intérêt de l'utilisation de formules (calculer plus rapidement avec la recopie des formules). L'intérêt de recopie est vite perçu, mais certains élèves essaient de recopier une valeur numérique sans formule. Avoir sous les yeux cette feuille d'aide permet aux élèves de comprendre leur erreur et le fait qu'ils doivent écrire le nom des cellules.
Tous les binômes ont rédigé une conjecture, mais plus ou moins précise. Un binôme a trouvé le coefficient 1/3.
Problèmes rencontrés

- Compléter le tableau à la main se révèle être long et fastidieux.
- Les élèves et moi-même avons totalement oublié d'arrondir au millième… Le passage à 1/3 s'en est trouvé plus délicat.

Séance 4 : institutionnalisation et prolongement

Comme pour les séances précédentes, un rappel de toutes les étapes est nécessaire. Une feuille de calculs d'un binôme est vidéo projetée, et comme prévu, nous nous concentrons sur la dernière colonne pour que la classe se mette d'accord sur une conjecture, après proposition des différents binômes. Les pyramide et prisme droit non cubique de même base, même hauteur se révèlent bien indispensables pour exprimer correctement le volume d'une pyramide quelconque.
L'annexe 4 est présentée aux élèves : elle leur permet de prendre conscience que les questionnements qui ont lieu dans leur classe de mathématiques existent dans le reste du monde !

Bilan et réajustements proposés

Après les expérimentations, nous nous rendons compte de certains points à améliorer :

- Montrer les cubes et les pyramides de cubes associées est nécessaire, mais il faudrait distribuer aux groupes, pour qu'ils manipulent, uniquement les pyramides de cubes.
- Le dernier tableau ne sert à rien : ils l'ont sur l'écran de l'ordinateur et perdent beaucoup de temps pour le remplir. Il n'y a aucun intérêt à le leur faire recopier, d'autant que les élèves se concentrent sur la copie au lieu de réfléchir à la conjecture. On pourrait imaginer leur imprimer une fois qu'ils l'ont complété sur la feuille de calcul.

Dans l'ensemble, les élèves ont bien compris et surtout retenu la formule avec la division par trois. Notre but est atteint. L'activité a pris du temps, mais elle est très riche et permet de faire le lien entre beaucoup de notions. Elle est utile également pour montrer à quoi peut ressembler une recherche en mathématiques : parfois les premières observations ne mènent pas à une conjecture acceptable, il faut se tourner vers d'autres outils et continuer la recherche en explorant d'autres pistes.

retour au sommaire

Annexe 0 : Document élève, 1ère partie

Construire une vraie pyramide avec des cubes n'est pas possible, mais nous pouvons nous en approcher en construisant des « pyramides » de cubes telles celles dessinées ci-dessous.
Nous allons comparer le volume de la « pyramide » de cubes avec le volume du prisme qui a même base et même hauteur. Nous nous intéressons ici au cas particulier où le prisme est un cube.

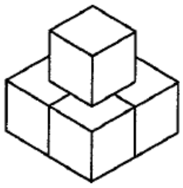


figure 1

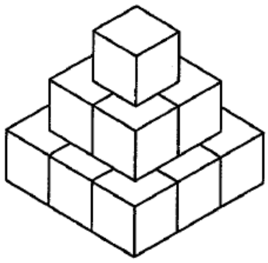


figure 2

La figure 1 montre une « pyramide » de cubes ayant une base carrée de côté 2 et une hauteur égale à 2. La figure 2 montre une « pyramide » de cubes ayant une base carrée de côté 3 et une hauteur égale à 3.

Peux-tu trouver une méthode pour calculer le volume d'une telle « pyramide » de cubes quelle que soit la longueur du côté ?

On revient au but de l'activité : comparer ce volume avec celui du cube qui contient la « pyramide » (même base et même hauteur).

Complète le tableau.

Longueur du côté de la base et hauteur de l'empilement	Volume du cube qui contient la « pyramide » de cubes	Volume de la « pyramide » de cubes	Volume de la « pyramide » divisé par le volume du cube qui contient l'empilement, arrondi au millième
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Peux-tu émettre une conjecture à propos de la comparaison ? ....
....

retour au sommaire

Annexe 0 : Document élève, 2ème partie

Il nous faut continuer les calculs avec des « pyramides » de cubes beaucoup plus grandes.
Si le côté est n, le volume de la pyramide de cubes est obtenu en calculant la somme

……….

Les mathématiciens ont prouvé que cette somme était égale à $\frac{1}{6}\times n\times(n+1)\times(2n+1)$.

C'est-à-dire que $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}\times n\times(n+1)\times(2n+1)$

1. Vérifie pour n = 10 que cette égalité est vraie :

……….

……….

2. A l'aide du tableur, complète le tableau ci-dessous en utilisant la nouvelle formule.
Pour cela, ouvre le fichier *Volume pyramide* dans Commun sur serveur → Math → 4ème → Tableur.
Une fois ouvert, enregistre-le dans Groupes → Travail → Mathématiques en le nommant nom1&nom2_pyramide.

Longueur du côté de la base et hauteur de l'empilement	Volume du cube qui contient la « pyramide » de cubes	Volume de la « pyramide » de cubes	Volume de la « pyramide » divisé par le volume du cube qui contient l'empilement, arrondi au millième
10			
20			
100			
500			
1 000			
5 000			
10 000			
100 000			
1 000 000			

Appelez le professeur.

Quelle conjecture peux-tu émettre ?

……

……

……

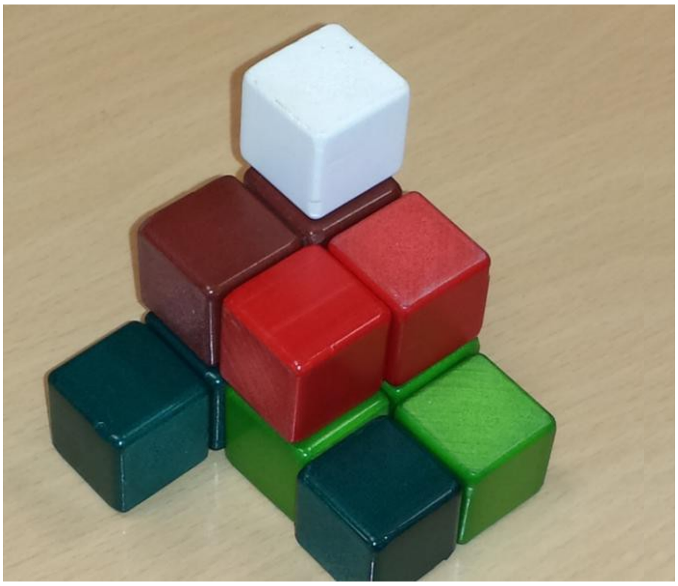
Comment calculer le volume d'une pyramide ?

……

……

……

Annexe 1

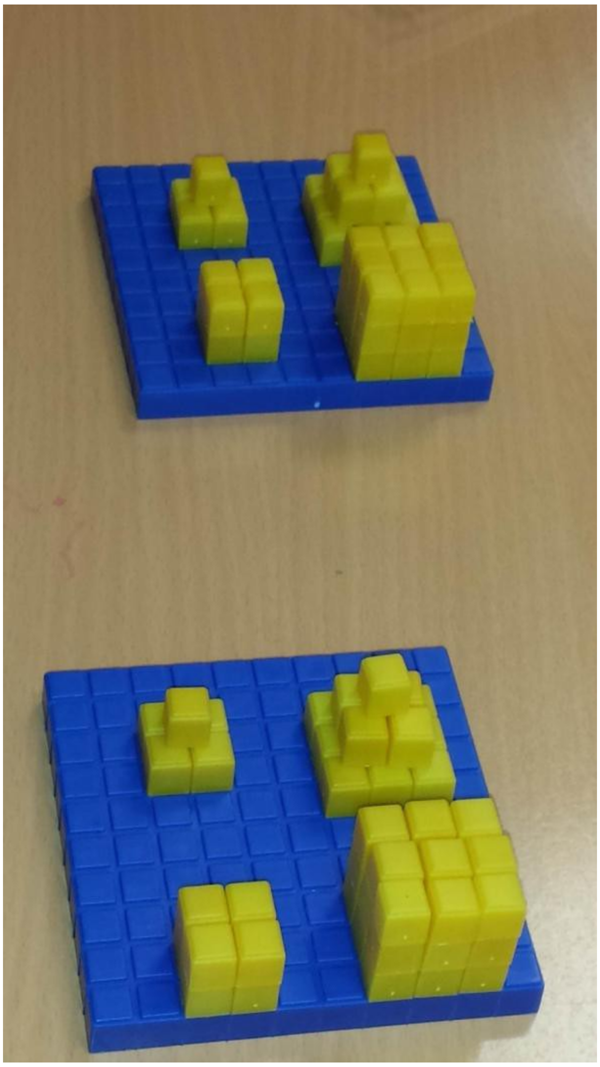


« Pyramide » de cubes de base un polygone non carré

Prisme droit non cubique qui contient cette « pyramide » de cubes.

Annexe 2

« Pyramides » de cubes distribuées aux groupes

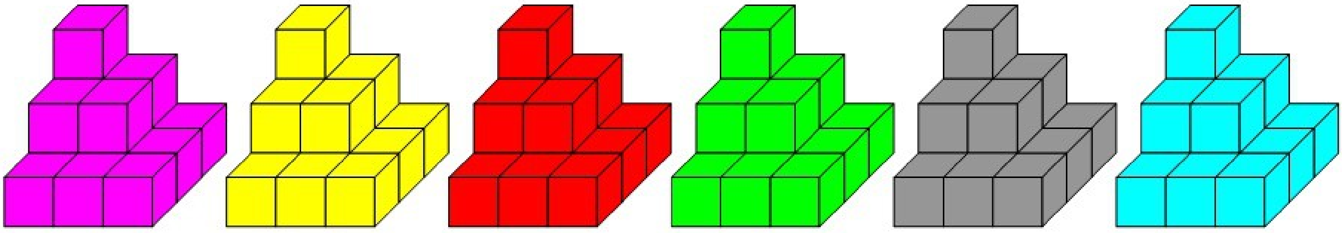


retour au sommaire

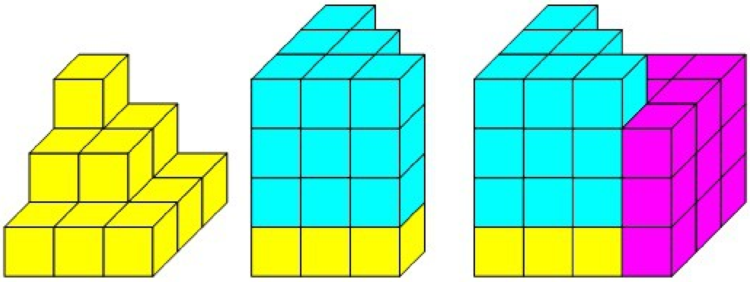
Annexe 3 : Pour comprendre une origine possible de la formule utilisée

(merci à François Drouin)

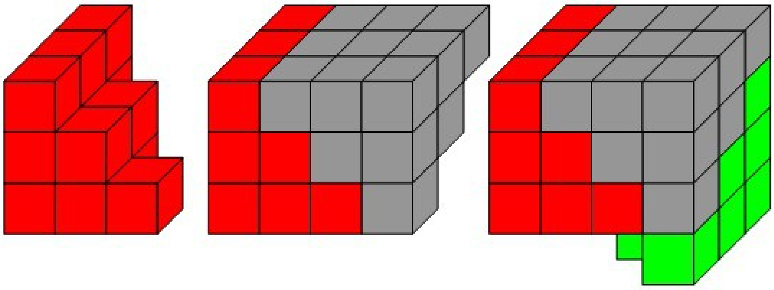
Les six pièces



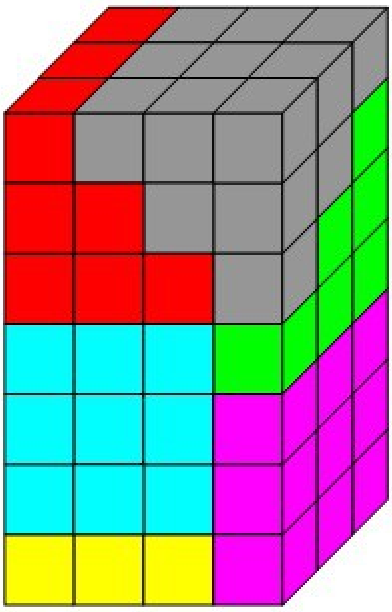
Assemblage de trois pièces



Assemblage des trois autres pièces



Assemblage des six pièces



Cet assemblage m'aide à me persuader que

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}\times n\times(n+1)\times(2n+1)$$

Annexe 4 : En liaison avec notre étude

Cette annexe était la copie de l'article « *Empilements de balles et de litas lituaniens* » publié dans la rubrique Maths&Médias du Petit Vert n°121 (mars 2015), pages 25-26. Elle est télé-chargeable sur http://apmeplorraine.fr/pv/PV121.pdf.

retour au sommaire