DANS NOS CLASSES

DIFFÉRENCE ENTRE CARRÉS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS

Par Valentin Buat-Ménard,
Collège de Douvaine (Haute-Savoie)

Note de la rédaction : Valentin était professeur-stagiaire à Metz en 2002

Un problème de démonstration avec du calcul littéral : où l'on voit que le formatage des questions et des approches de démonstrations nous ferment bien des portes.

Niveau : 3ème
Prérequis : factorisation

La question du manuel : Prouver que la différence entre le carré d'un nombre entier et le carré du nombre entier qui le précède est un nombre impair.

La question modifiée : Que peut-on dire de la différence entre le carré d'un nombre entier et le carré du nombre entier qui le précède ?

Modalités : Les élèves travaillent en ilots, les échanges sont autorisés, encouragés, mais la recherche peut-être personnelle.

- Temps de reformulation
- Recherche de conjectures
- Mise en commun des conjectures
- Temps de recherche des démonstrations

La classe : c'est une classe de troisième à faible effectif et d'un excellent niveau (et oui ça existe, c'est une aberration, mais pour les cours c'est top !)

Déroulement de la séquence

- La reformulation de la question ne pose pas trop de problème. Une élève est tout de même partie sur les racines au lieu des carrés et découvrira d'elle même la relation $\left(\sqrt{50}\right)^4 = 50^2$ ce qui paraitra complètement logique aux autres (nous n'avons pourtant pas étudié les racines carrées en détail).
- La recherche est dynamique car il est assez facile de faire les calculs (même sans calculatrice).

- Pour la mise en commun, presque chaque ilot a au moins une proposition. Il en émerge deux :
  * La différence augmente de 2 à chaque fois qu'on passe au couple d'entiers suivant.
  * La différence des carrés est égale à la somme des deux nombres.

A noter que la conjecture de la question initiale n'est pas proposée. Avec du recul, elle me semble moins riche, voire plus anodine que celles des élèves. Je ne m'attendais pas à leurs réponses (voir pourquoi plus loin).

retour au sommaire

Question
Que peut-on dire de la différence du carré d'un nombre entier et du carré du nombre entier qui le précède ?

2^2	3^2	4^2	5^2	6^2
4	9	16	25	36
+5	+7	+9	+11	
	+2	+2	+2	

Il faut multiplier le nombre de départ par 2, le soustraire à son carré, et ajouter 1 pour trouver le carré de l'entier précédent.

Prenons 2 inconnues entières x et y.
On appelle z la différence entre leurs carrés.
On a alors, quels que soient x et y : $z = x + y$, où y précède x.

(N.d.l.r. : les réponses des élèves ont été retranscrites)

- Pendant la phase de démonstration peu d'élèves arrivent à démarrer. A noter que j'ai imposé qu'on s'attaque à la démonstration de la deuxième proposition. Je vois une élève qui se lève pour regarder le cahier d'une autre, puis se rassoit en disant « ah oui ça marche ! » (voir ci-dessous). Une autre élève est partie sur même piste, sans lettre, mais la généralisation pourra paraître évidente vu la présentation de son calcul.

Voici les deux démonstrations :

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 1 \text{ x } (x + y)$
↑ *puisqu'on enlève le chiffre précédent.*

$10^2 - 9^2 = 19$
$(10 + 9)(10 - 9) = 19 \text{ x } 1 = 19$
$(x + y)\ (x - y) = (x + y) \text{ x } 1 = (x + y)$ *donc* $x^2 - y^2 = x + y$

x et y sont les deux entiers qui se suivent : $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ et $(x-y) = 1$ puisqu'ils se suivent, donc $x^2 - y^2 = x+y$.

Ce qui est très intéressant, c'est qu'un prof de maths bien formaté, va se débarrasser de la deuxième variable, entamer sa démonstration par $(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$ et ne verra pas apparaître la conjecture des élèves.

On peut ensuite aisément utiliser cette première propriété démontrée pour démontrer l'autre conjecture : soit x, y et z trois entiers consécutifs dans l'ordre décroissant :
$(x^2 - y^2) - (y^2 - z^2) = (x + y) - (y - z) = x - z = 2$ puisque x et z sont nécessairement séparés de deux unités.

retour au sommaire