DANS NOS CLASSES

DÉMARCHE DE RECHERCHE SUR PROBLÈME OUVERT

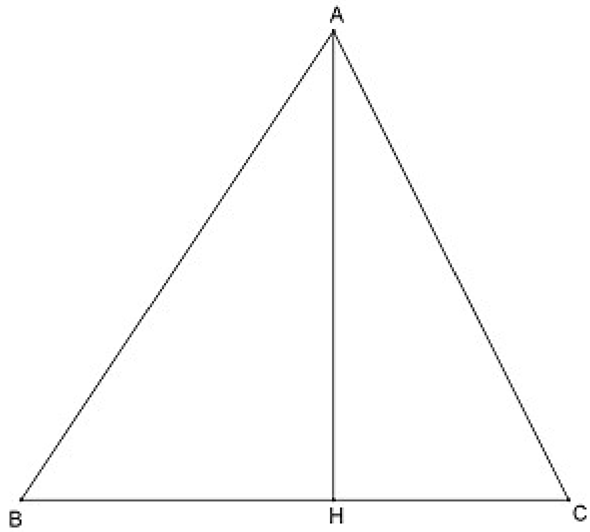
Une bévue source d'apprentissage

par Walter NURDIN, ÉSPÉ Lorraine, site de Nancy
Enseignant formateur pour le premier degré
(étudiants préparant le C.R.P.E.)

Pris par la recherche d'un problème dont les données sont inhabituelles et dont la résolution mélange géométrie et algèbre, j'ai oublié l'un des principes de tout questionnement mathématique : la solution existe-t-elle et est-elle unique … ou pas ?
En oubliant ce fondamental, comme l'assène Bernard Laporte[1], j'ai pu revisiter les avantages du travail de groupe avec mes collègues Renaud et Jacques, me réapproprier des techniques oubliées, découvrir un problème où l'usage des TUIC[2] est indispensable et partager cette démarche de recherche avec des professeurs d'école en formation.

Voici le problème déclencheur trouvé dans la revue tangente n°154.

Dans ce triangle, les mesures des côtés [AB] et [AC] et de la hauteur [AH] (H pied de la hauteur issue de A au côté [BC]) sont trois nombres entiers consécutifs. Les nombres mesurant BH et HC sont également entiers.Quelle est l'aire de ce triangle ?



Jacques m'a fait remarquer qu'il faudrait envisager deux cas suivant que H appartient au segment [BC] ou non. Les formules donnant BH et HC ne vont certes pas changer, cependant il faut bien envisager les deux cas. Ici, comme l'aspect du triangle est donné et que la question semble désigner le triangle ci-dessus, on peut envisager que l'on n'étudie que ce cas.

Le problème présente déjà l'intérêt de rappeler que l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus grand des côtés. Le théorème de Pythagore est utilisé et si l'on veut trouver une solution il est préférable de développer et de simplifier les écritures. Enfin, pour finaliser l'exercice, le plus simple est d'utiliser une méthode par essais systématiques. Les programmes de l'école primaire demandent de présenter cette technique aux élèves. On a donc là un problème adapté aux étudiants, où on peut reprendre des démarches qu'ils auront à enseigner dans les classes.Voici un résumé de la démonstration, agrémenté de remarques.

---

[1] Ancien entraineur et sélectionneur du XV de France (rugby), actuel entraineur du R.C. Toulon.

[2] Techniques usuelles de l'information et de la communication (dans le socle commun des connaissances et des compétences pour les élèves).

retour au sommaire

Le fait de noter a, a+1, a+2 les trois nombres consécutifs n'a pas posé de problème. Un problème arithmétique précédent nous avait obligé à comprendre ces écritures. Il ne faut pas oublier que plus d'un tiers des étudiants préparant le CRPE ont un baccalauréat littéraire et n'ont donc pas en général exercé leurs compétences mathématiques depuis plus de cinq ans et ne sont pas toujours très habiles dans le maniement des formules. Le fait que a soit AH a été plus délicat, mais la petite ritournelle de « l'hypoténuse plus grand des trois côtés d'un triangle rectangle » a bien aidé. Les automatismes et apprentissages par cœur soutiennent parfois les démonstrations.

Pour a+1 et a+2, on a le choix entre AB et AC. Nous avons pris AB = a+2 et AC = a+1. On ne va pas, à cet instant, créer un obstacle en prenant le contrepied de la figure qui semble indiquer que AB est supérieur à AC.

Le théorème de Pythagore appliqué aux deux triangles rectangles AHB et AHC nous apprend que $BH=2\sqrt{a+1}$ et $HC=\sqrt{2a+1}$

Pour beaucoup, ces écritures ne sont pas aisées à obtenir. Chaque étape doit être explicitée comme on a pu le faire en troisième.

Il faut alors trouver un entier a qui permette d'obtenir BH et HC.

Les étudiants rechignent en général à tester systématiquement des valeurs. Ils pensent que cela n'est pas « mathématique ». Surtout lorsque l'on commence par $a = 0$, valeur qui donne certes des nombres entiers acceptables mais un triangle aplati. Ils ont alors concédé qu'une autre valeur doit être trouvée.

Les difficultés en calcul mental vont alors surgir. Multiplier par 2, ajouter 1, et chercher si c'est un carré, n'est pas une tâche aisée pour les M1. J'en profite pour justifier le quart d'heure réglementaire de calcul mental à l'école primaire, pour entre autre provoquer ultérieurement cette familiarisation avec les nombres. Puisque le calcul mental n'est pas aisé, on continue pas à pas dans un tableau. On retrouve ainsi une méthode de raisonnement qu'ils pourront mettre en place dans leur classe de primaire.

Heureux hasard, nous allons voir pourquoi, c'est la fin du cours. Je leur demande évidemment de continuer le tableau pour trouver éventuellement une valeur.

Il faut arriver jusqu'à a = 24 pour trouver BH = 10 et HC = 7. Une étudiante proche du résultat qui venait de tester 20 me demande s'il fallait encore aller plus loin. En lui disant oui et en ajoutant que parfois cela demande de longs calculs, je me rends brusquement compte que rien ne me dit qu'il n'existe qu'une seule solution, sinon le singulier dans l'énoncé de la question.

Oubli impardonnable !

Après le départ de l'étudiante, seul, je teste sur un tableur les 500 premiers nombres.

C1 =RACINE (2*A1+1)

	A	B	C	D
1	1	1,414213562	1,732050808	
2	2	1,732050808	2,236067977	
3	3	2	2,645751311	
4	4	2,236067977	3	
5	5	2,449489743	3,31662479	
6	6	2,645751311	3,605551275	
7	7	2,828427125	3,872983346	
8	8	3	4,123105626	
9	9	3,16227766	4,358898944	
10	10	3,31662479	4,582575695	
11	11	3,464101615	4,795831523	
12	12	3,605551275	5	
13	13	3,741657387	5,196152423	
14	14	3,872983346	5,385164807	
15	15	4	5,567764363	
16	16	4,123105626	5,744562647	
17	17	4,242640687	5,916079783	
18	18	4,358898944	6,08276253	
19	19	4,472135955	6,244997998	
20	20	4,582575695	6,403124237	
21	21	4,69041576	6,557438524	
22	22	4,795831523	6,708203932	
23	23	4,898979486	6,8556546	
24	24	5	7	
25	25	5,099019514	7,141428429	
26	26	5,196152423	7,280109889	
27	27	5,291502622	7,416198487	
28	28	5,385164807	7,549834435	
29	29	5,477225575	7,681145748	
30	30	5,567764363	7,810249676	
31	31	5,656854249	7,937253933	

Feuille1 Feuille2 Feuille3

retour au sommaire

Aucune solution visible. Je n'y crois pas, je persiste.
Jacques, de son côté, a prolongé son tableau jusqu'à 1000 et trouve une nouvelle valeur : a=840.
Ignorant à cet instant son travail, un programme sur AlgoBox me permet d'en trouver une autre : a = 28560.

Résultats

```
***Algorithme lancé***
0
24
840
28560
***Algorithme terminé***
```

Nous voici avec quatre valeurs ; trois si l'on ignore le zéro.
Le singulier vole alors en éclat, il y a plusieurs aires possibles. Une infinité est probable mais la démonstration ne m'était pas disponible à cet instant.
Jacques observe dans son tableau que les écarts entre les valeurs entières successives de BH et HC forment une suite arithmétique.
Le soir, je trouve que les nombres doivent vérifier : $BH^2 = 2HC^2 + 2$ et quelques propriétés de divisibilité. Mais j'en reste là.

Bien entendu, le lendemain, les étudiants ont eu le compte rendu de la recherche et l'historique de la démarche. J'ai mis alors en œuvre une des phases de l'*enseignement explicite*[3] en mettant « un haut parleur » sur mes pensées.
J'ai profité de cette résolution pour présenter une utilité des moyens informatiques et les savoirs à connaitre pour le concours.
Il me restait une dernière interrogation, toujours donnée aux étudiants, y-a-t-il une infinité de solutions ?
Le travail de groupe va m'aider à répondre à la question.

Une première recherche par Renaud Dehaye, collègue de l'ESPE à qui j'avais également proposé le problème, a permis d'orienter une recherche commune.
Il se souvenait de l'algorithme de Théon qui permet de résoudre l'équation $x_n^2 = 2y_n^2 +/- 1$ proche de l'équation attendue.
La résolution reprise, on s'engage tous les deux dans l'adaptation de la méthode.
Si on reprend les deux égalités de BH et HC on obtient :
$BH^2 = 4(a+1)$ et $HC^2 = 2a + 1$
Et donc on a bien: $BH^2 = 2HC^2 + 2$.
On peut déjà remarquer que BH et HC ne peuvent pas être nuls.
Réciproquement, si on a des entiers BH et HC qui vérifient l'égalité ci-dessus, cela signifie que BH^2 est divisible par 2, donc que BH est divisible par 2. Ainsi BH^2 est divisible par 4. Je retrouvais là une de des conclusions de ma première recherche et de celle de Jacques. On peut donc écrire qu'il existe un entier p tel que : $BH^2 = 4(p+1)$
L'égalité fait que $4(p+1) = 2HC^2 + 2$, donc $HC^2 = 2p + 1$.
Ainsi, si on trouve une suite d'entiers qui vérifie l'égalité précédente, on aura une infinité d'entiers qui répondent au problème.
On a alors imité la démarche de Théon pour trouver une suite x_n qui représente des BH possibles et y_n des HC également possibles vérifiant : $x_n^2 = 2y_n^2 + 2$
Il restait désormais à trouver une double suite de récurrence qui se présente ainsi :

$$x_{n+1} = ax_n + by_n$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n$$

[3] www.3evoie.org/

Les valeurs trouvées avec Algobox, indispensable à ce moment de la démonstration pour l'accélérer, vont permettre de déterminer *a, b, c* et *d*.

$x_1 = 10$ et $y_1 = 7$, puis $x_2 = 58$ et $y_2 = 41$ enfin $x_3 = 338$ et $y_3 = 239$

Les égalités posées on trouve :

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$$
$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

La récurrence peut débuter.

Montrons que ces suites satisfont à l'égalité $x_{n+1}^2 = 2y_{n+1}^2 + 2$.

L'égalité est évidement vérifiée aux rangs 1 et 2 puisqu'on l'a construite ainsi.

L'hérédité peut débuter.

On suppose qu'au rang *n* l'égalité est vérifiée.

Étudions $x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 - 2$

$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 - 2 = (3x_n+4y_n)^2 - 2(2x_n+3y_n)^2 - 2 = x_n^2 - y_n^2 - 2 = 0$.

Ainsi on a donc une double suite qui vérifie l'égalité précédente pour tout entier supérieur ou égal à 1.

Ces suites, non constantes, évidement strictement croissantes, prouvent qu'il existe une infinité de nombres vérifiant l'égalité et donc le problème.

J'ai simplement évoqué en cours que nous avions prouvé qu'il existait une infinité de solutions et insisté uniquement sur la coopération et le travail en commun, compétences attendues dans les « *compétences communes à tous les professeurs et personnel de l'éducation*[4] ».

Et dit qu'il restait désormais une dernière question mathématique que l'on pouvait se poser :

Les solutions sont-elles toutes atteintes par ces formules ?

A vous !

N.d.l.r. La brochure « Travail de groupe en séquences longues : démarche de recherche sur problèmes ouverts », publiée par la régionale en 1986 est désormais téléchargeable en ligne sur [Ressources numérisées des IREM]

En supplément, un problème trouvé sur le net...

Dans un triangle ABC (non isocèle), on définit A' et A" comme intersections des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A avec BC ; de même pour B', B", C', C".

On considère 12 segments : les 3 côtés, les 3 hauteurs, les 6 bissectrices AA', AA", BB', BB", CC', CC", et 5 rayons : ceux des cercles circonscrit au triangle, inscrit et exinscrits.

On demande de construire un triangle où les 17 longueurs de ces segments et de ces rayons sont mesurées par des nombres entiers.

■

[4] http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=73066

retour au sommaire