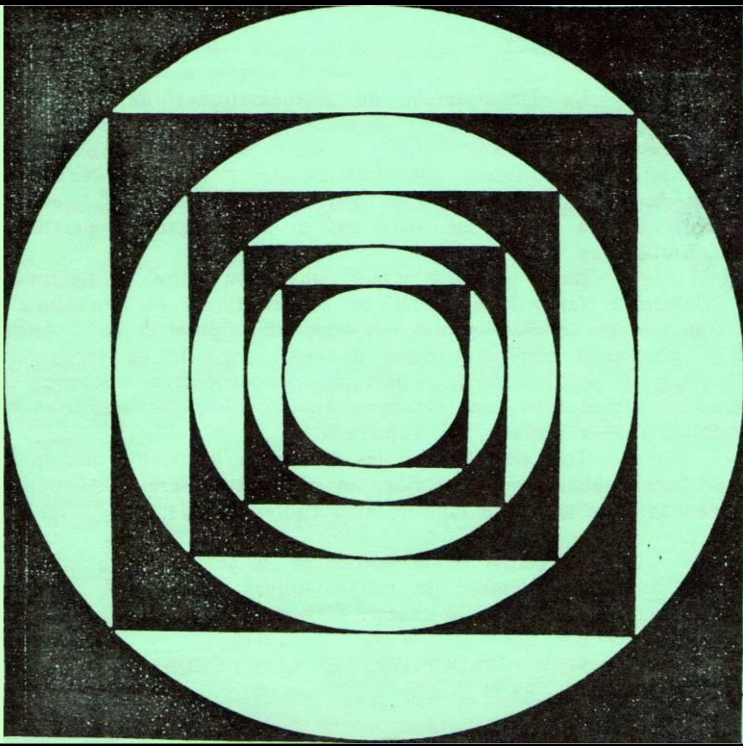
LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 13	MARS 1988	Abonnement 4 nos par an : 30 F



Sur ce dessin, vous avez une suite de 5 cercles et 5 carrés inscrits les uns dans les autres. En prenant le côté du grand carré conne unité, pouvez-vous trouver la surface totale des zones noires ? Et si l'on continuait jusqu'à l'infini ?

UNIVERSITE DE NANCY 1
DEPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES

Vandœuvre, le 23 Février 1988

Le Département de mathématiques de l'Université Nancy I offrira, à partir de la rentrée 88 la possibilité de préparer la licence de mathématiques par correspondance. Cette possibilité est ouverte aux salariés de l'Education Nationale, remplissant les conditions pour pouvoir être inscrits en licence. La scolarité sera étalée sur deux ans et sera organisée par unités capitalisables.

Dans le cadre d'une convention entre le Rectorat et l'Université Nancy I, les PEGC de mathématiques de l'Académie de Nancy-Metz seront dispensés des frais d'inscription et de scolarité ; ils pourraient bénéficier d'une décharge partielle de service se renseigner ultérieurement auprès du rectorat). Des regroupements seront organisés à leur intention environ tous les quinze jours, durant l'année scolaire, les vendredis.

Tout en effectuant les démarches habituelles par le biais de leur établissement d'exercice, les personnes intéressées voudront bien se faire connaître rapidement à l'adresse suivante :

Secrétariat de la licence de mathématiques
Département de mathématiques
Faculté des Sciences - Université Nancy I
B.P. 239
54506 - VANDŒUVRE LES NANCY CEDEX
Tél. 83.91.21.31

éDITORIAL

Un coup de projecteur violent a été donne sur l'enseignement des maths en novembre - décembre 87 : nous en sommes encore tout éblouis.
Le comité régional de l'A.P.M.E.P a étudié les nombreux documents parus suite aux déclarations ministérielles et vous propose quelques pistes de réflexion.

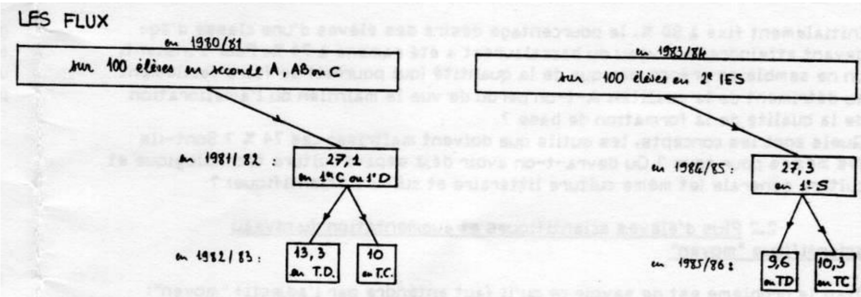
1. Constat

1.1. Les chiffres

Actuellement sur 100 élèves entrant en 6ème dans notre académie, 3 se retrouvent 7 ans après en TC et 3 en TD (pour les filles, 1 seulement en TC et 5 en TD).

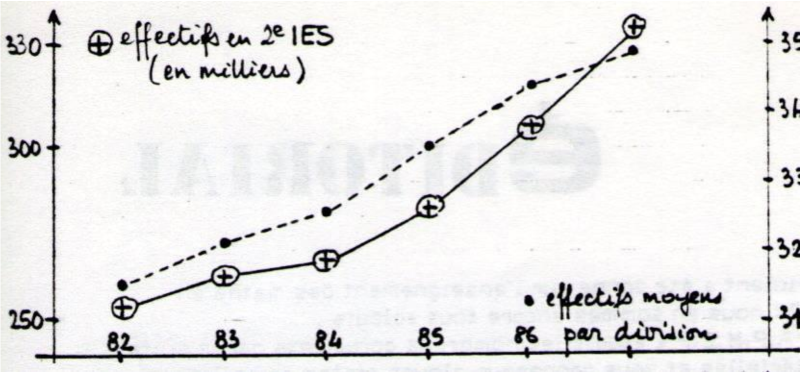
Voici, sous forme de tableaux ou de graphiques,

- les flux de passage en sections scientifiques (vers les terminales C-D) dans l'académie en partant de la seconde :



LES EFFECTIFS	1982/83	1985/86	Variation
T.D	1455	1007	– 31%
T.C.	1097	1083	– 1%
TC+TD	2552	2090	– 18%

- les augmentations d'effectifs en seconde et une projection pour l'an 2000 :



Si ce rythme se poursuivait, il y aurait une moyenne de 44,1 élèves par classe à la rentrée 2000 !

- en annexe, l'insertion professionnelle des jeunes sortant des sections technologiques.

1.2 Les directives actuelles

Il est prévu par le Rectorat de l'Académie ;

- de créer une trentaine de 1ère S dans l'académie,
- d'organiser des heures de soutien en maths et en physique,
- d'orienter, à l'issue de la 1ère S, 30 % des élèves en TC et 20 % en TD,

Cependant, le but de la TC n'est pas de préparer la classe de maths sup.

2. Que -faut-il penser de tout cela ?

2.1 74%

Initialement fixé à 80 %, le pourcentage désiré des élèves d'une classe d'âge devant atteindre le niveau du baccalauréat a été ramené à 74 %. Pour l'instant, on ne semble se préoccuper que de la quantité (qui pourrait se faire facilement au détriment de la qualité). A-t-on perdu de vue le maintien ou l'amélioration de la qualité de la formation de base ?
Quels sont les concepts, les outils que doivent maîtriser ces 74 % ? Sont-ils les mêmes pour tous ? Où devra-t-on avoir déjà séparé culture technologique et culture générale (et même culture littéraire et culture scientifique) ?

2.2 Plus d'élèves scientifiques et augmentation du niveau scientifique "moyen"

Tout le problème est de savoir ce qu'il faut entendre par l'adjectif "moyen": faut-il aller très haut avec quelques-uns ou moins haut avec tous, après mise au point d'un savoir minimal ?
Quel est l'intérêt d'un très haut niveau ?

- quelle part des maths "engrangées" est utilisée par nos ingénieurs ?
- les Américains disent préférer 4 chercheurs moyens ensemble à 1 chercheur génial tout seul !

- l'A.P.M.E.P serait bien inspirée de publier une brochure concernant les niveaux des enseignements mathématiques à l'étranger.

Comment donner une définition "acceptable", consensuelle de la notion de scientifique ? Ne serait-il pas raisonnable de définir un corpus minimal de notions exigibles de tout "scientifique", étant donne que leur enseignement devrait surtout être orienté vers l'utilisation de ces notions ?

2.3 L'orientation

Il a été constate que la plupart des élèves admis en H.E.C viennent de TC alors que l'on manque de profs de maths et de physique et que les écoles d'ingénieurs n'ont pas toutes fait le plein cette année.

Ne faudrait-il pas commencer par rentabiliser les formations données, notamment en orientant prioritairement (voire impérativement) les bacheliers scientifiques vers les cursus ou leurs compétences sont le plus nécessaires ?

3. Que peut faire le prof de maths? Que doit faire l'élève ?

3.1 Un sérieux handicap

Notre matière a une mauvaise image dans l'opinion publique en raison du rôle de sélection qu'on lui fait Jouer. De plus, l'intransigeance des maths rend les verdicts brutaux et indiscutables. L'élève raisonne ou ne raisonne pas (du tout) ou raisonne mal.

3.2 Et la pédagogie ?

Les élèves n'ont-ils pas de bonnes raisons de ne pas aimer les maths ?

Comment leur apprendre à "faire" des maths avec plaisir ? Sont-ils rendus curieux ?

Pourquoi tant d'exigences en terminales scientifiques ? Le raisonnement n'est-il pas oublié derrière la quantité de connaissances ?

En quittant le lycée, ont-ils des méthodes pour se documenter, pour apprendre, mettre en œuvre leurs connaissances ?

3.3 Et les élèves ?

Il faudra qu'ils comprennent que tout cela n'est pas seulement une affaire de statistiques. Il ne s'agit pas d'ouvrir toutes grandes les portes sans veiller à l'acquisition d'un niveau minimal. Le goût de l'effort, la curiosité resteront de rigueur. Comment les convaincre que la réussite est le fruit de l'effort comme chez un sportif de bon niveau ?

4. Une proposition du Comité

Beaucoup d'efforts ont été consacrés à la classe de 2nde (explication de l'"esprit" du programme), aux activités dans cette classe, à la liaison 3ème-2nde (voir le Petit Vert - La Caverne spécial 2nde).

Nous proposons que le même travail soit maintenant fait au niveau de la classe de 1ère S. Toutes les bonnes volontés et les propositions constructives sont les bienvenues !!

Nous vous invitons en particulier à une réunion de travail sur ce thème le mercredi 18 mai 1983 à 14 h 30 dans les locaux de l'I.R.E.M à Nancy.

Le comité régional de mars 1988

Annexe à l'éditorial

OBJECTIF 74 %

QUELQUES CHIFFRES CONCERNANT LES BACHELIERS TECHNOLOGIQUES EN LORRAINE

Source : "L'insertion professionnelle des jeunes en Lorraine", document O.N.I.S.E.P. à consulter dans tous les établissements ; si vous ne le trouvez pas dans votre C.D.I., prenez contact avec le Conseiller d'Orientation).

L'enquête porte, au niveau du Bac Techno (BTn) sur 6 000 élèves environ, dont 300 en Brevet de Technicien (BT).
La répartition est la suivante :

G2	G1	G3	F8	F3	F1	Autres BTn F et BT
20 %	18 %	13 %	9 %	12 %	12 %	16 %
Tertiaire = 60 %				Industriel = 40 %		

A l'issue du BTn, un élève sur quatre seulement se retrouve sur le marché du travail (voir plus bas ce que cela signifie).

★ Poursuites d'études après le BTn :

70 % de ceux qui ont réussi l'examen poursuivent des études. Cela dépend beaucoup des séries :

83 % des élèves de F1
80 % des élèves de F3
| Secteurs à forte population masculine

……………………………..

67 % des élèves de F8
56 % des élèves de G1
| Secteurs à forte population féminine

★ Répartition des élèves qui se trouvent sur le marché du travail (sept mois après leur sortie du système scolaire) :

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>Ont réussi BTn ou BT</td><td>Ont échoué BTn ou BT</td><td>Totalité</td><td>Remarques</td></tr>
<tr><td colspan="2">Occupent un emploi (*)</td><td>53 %</td><td>39 %</td><td>49 %</td><td rowspan="2">Très grande importance de la réussite sur le taux de chômage</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sont au chômage</td><td>19%</td><td>30 %</td><td>22 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Actifs « transi-toires » :</td><td>Stages, c. emploi-formation</td><td>10 %</td><td>12 %</td><td>10 %</td><td></td></tr>
<tr><td>T.U.C.</td><td>19 %</td><td>19 %</td><td>19 %</td><td>Aucune différence entre diplômés ou non</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>100 %</td><td>100 %</td><td>100 %</td><td></td></tr>
</table>

(*) nota : un emploi sur deux est <u>à durée limitée</u>.

Annexe à l'éditorial (suite)

★ Comparaison suivant le niveau de sortie (sortie en juin 1986, situation en janvier/février 1987) :

	C.A.P.	B.E.P.	B.Tn	B.T.S.
population concernée	8 500	8 200	6 000	1 200
poursuivent leurs études	36 %	53 %	71 %	19 %
sont sur le marché du tr.	54 %	40 %	25 %	58 %
service nat[al] . et autres	10 %	7 %	4 %	23 %
	100 %	100 %	100 %	100 %

★ Part des chômeurs parmi les jeunes qui sont sur le marché du travail (on entend par là les "actifs", c'est à dire : ceux qui ont un emploi, définitif ou temporaire, les chômeurs, ceux qui sont en stage ou en contrat emploi-formation, les T.U.C.) suivant le diplôme de sortie :

		% de chômeurs parmi les actifs	
C.A.P.	échec	45 %	On notera l'extrême importance du niveau de formation sur le taux de chômage
	réussite	41 %	
C.E.P.	échec	54 %	
	réussite	34 %	
B.Tn	échec	30 %	
	réussite	19 %	
B.T.S.	échec	16 %	
	réussite	11 %	

Ce qui veut dire qu'environ 23 % des élèves sortant de C.A.P. sont au chômage, contre 6 % de ceux issus du B.Tn.

★ Les embauches :

Actuellement, 50 % des embauches se font au niveau IV (fin de terminale, niveau Bac ou B.Tn) ou au dessus ; la majorité des jeunes embauchés au niveau IV sont des employés ou occupent des emplois intermédiaires.

Selon les prévisions du B.I.P.E-, il y aurait, d'ici à quelques années, suppression totale des embauches au niveau VI (aucune formation), et très forte baisse des embauches au niveau V (C.A.P. ou B.E.P.). Le niveau IV sera donc le niveau "normal" de fin d'études, ce à quoi nous ne sommes pas du tout préparés.

★ Il ne faudrait pas que les enseignants soient systématiquement sceptiques quant à l'objectif "80 % au niveau IV en l'an 2000" : il y a déjà une catégorie socioprofessionnelle pour laquelle cet objectif est atteint depuis plus de 10 ans : les enfants d'enseignants !

DIDACTIQUE

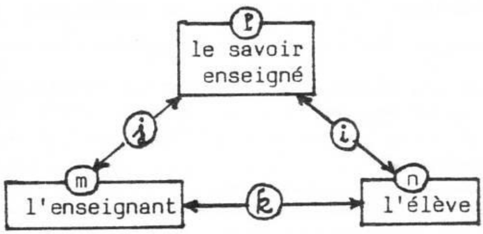
Ayant participé en juillet dernier à l'Université d'Eté « DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET FORMATION DES MAÎTRES », je vais essayer d'exposer ici, assez brièvement, les concepts et les hypothèses actuelles de cette discipline, pour permettre à chacun de faire le lien entre des notions parfois disparates, et pour permettre de "mettre un visage" sur les mots.

Jacques VERDIER

Tout d'abord, qu'est-ce que la didactique ?

D'après Régine DOUADY [1], la D.D.M. « étudie les processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science, particulièrement en situation scolaire.
Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage ».
Pour le didacticien, le problème majeur est celui des conditions dans lesquelles se constitue le savoir des élèves, en vue de leur optimisation, de leur contrôle et de leur reproduction [2].

Les premières recherches de D.D.M., en France, remontent aux environs de 1974, et les I.R.E.M. y ont joué un grand rôle. La D.D.M. s'est tout de suite démarquée de l'optique "mathématicienne", centrée uniquement sur les contenus, pour étudier un système tripolaire, couramment appelé le "triangle didactique" :



C'est l'étude de ce "triangle" qui permettra d'expliquer pour une large part les erreurs faites par les élèves, et de les traiter en termes <u>d'obstacles</u> à l'apprentissage.

(i) la relation élève / savoir enseigné

C'est elle qui a été privilégiée par les didacticiens.
L'hypothèse est faite, déjà formulée par Bachelard [3] que l'élève a, quand il apprend, déjà une "tête pleine", qu'il a déjà une <u>conception</u> de chaque notion, des images (ou représentations mentales), des algorithmes (le plus souvent spontanés et implicites), etc.

Ces connaissances "spontanées" peuvent s'opposer à de nouvelles conceptions visées par l'enseignant. Par exemple, pour certains élèves un nombre décimal c'est une juxtaposition de deux entiers, avec une séparation (la virgule) ; ces élèves écriront alors : $11,8 + 4,5 = 15,13$ ou $7,15 > 7,9$ ou $(2,5)^2 = 4,25$.

Ce n'est bien souvent qu'à l'occasion d'erreurs commises par les élèves que ces représentations peuvent être mises en évidence.

(j) la relation enseignant / savoir enseigné

La conception qu'a le professeur des mathématiques (ce que l'on pourra appeler "l'épistémologie du professeur") joue aussi un rôle important dans l'apprentissage.

En schématisant à l'extrême, il y a ceux pour qui les mathématiques préexistent, sont un "objet" construit une fois pour toutes, et d'autres pour qui les maths sont un objet à construire. On lira à ce sujet [4], [5] et [6], qui sont d'accès très facile, et qui posent bien ces problèmes.

(k) la relation enseignant / élève

C'est G. BROUSSEAU, de Bordeaux, qui a mis en évidence ce qu'il appelle "le contrat didactique" :
« C'est ce qui détermine, explicitement pour un petite part mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire va avoir a gérer et dont il sera, d'une manière au d'une autre, comptable devant l'autre ».

L'hypothèse est faite que toute réponse d'élève est rationnelle par rapport à la situation telle qu'il la perçoit (par exemple, il répondra "en limitant les risques") :
« Prendre en compte cette notion de contrat didactique, c'est souvent éviter une certaine naïveté dans l'analyse des réponses des élèves, naïveté qui consisterait à produire des interprétations purement cognitives (puisque l'enseignant croit questionner l'élève uniquement sur les connaissances) là où le cognitif est modulé par des exigences de cohérence externe souvent déterminantes ». [2]

Un exemple de ces règles implicites qui constituent le contrat didactique :
- tout problème posé a une solution ;
- on doit utiliser toutes les données et elles seules ;
- on doit utiliser les connaissances antérieurement étudiées (généralement celles du chapitre qui vient d'être étudié) ;
- on a tout à gagner à répondre vite ...

Pour mettre en évidence ces règles, il faut des situations en rupture avec la pratique traditionnelle (par exemple le fameux problème de Flaubert, plus connu sous le nom de "l'âge du capitaine", repris par Stella Baruk [7]).
Un résumé très clair de cette notion de Contrat didactique se trouve dans [8].

(l) le pôle "savoir enseigné"

Il y a toujours eu une distorsion très importante entre le "savoir savant" et le "savoir enseigné". La notion de distance, par exemple, est au départ un outil de l'analyse fonctionnelle, et est enseignée en géométrie et dans le domaine numérique.

« La transposition didactique est le processus par lequel un élément du "savoir savant" devient une connaissance à enseigner, puis un objet d'enseignement » (Yves Chevallard, [9])

Cette transposition peut même être tellement poussée qu'elle devient "création didactique" : on enseigne des concepts qui n'ont aucune existence dans le savoir savant, par exemple les ***Cos*** (avec un grand *C*), différents des ***cos*** (avec un petit ***c***), qu'on a trouvés il y a peu dans certains manuels ... et qui n'ont pas eu la vie longue !

Cette dénaturation des contenus mathématiques a conduit au développement d'une nouvelle branche, les "mathématiques scolaires", qui a sa cohérence interne, mais dont les liens avec les Ï(vraies ?) mathématiques sont parfois loin d'être évidents.

L'étude de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques permet également d'expliquer un certain nombre d'obstacles rencontrés par les élèves (car ces obstacles ont déjà joué ce rôle dans la construction de la science).

Il faudra aussi tenir compte du découpage qui est fait de la discipline (la norme légale de progression peut être source d'échecs scolaires), et de l'ordre dans lequel sont présentées les diverses notions (confusion fréquente entre les fondements théoriques de la notion et les premiers apprentissages à présenter).

(m) le pôle "enseignant"

Il a pratiquement été délaissé par les didacticiens dans les dix dernières années ; il sera probablement bientôt étudié, en liaison avec les Sciences de l'Education.

Ce qui caractérise - au point de vue didactique - l'enseignant, c'est que ce dernier doit <u>prendre constamment des décisions</u> (c'est à dire qu'il doit faire des choix, le plus souvent implicites) dans des classes où la situation est d'une extrême complexité. Il n'a donc ni le temps ni la disponibilité d'esprit pour rationaliser ces choix : si la didactique pouvait permettre de comprendre (au moins en partie) ce qui se passe dans la classe, alors peut-être l'enseignant pourrait-il devenir <u>conscient</u> de ses choix.

Un autre caractéristique de l'enseignant est qu'il nie (le plus souvent) la pertinence de toute <u>théorie</u>. Les seules informations qui sont pertinentes à ses yeux doivent répondre à quatre critères :

- être utilisables immédiatement (recettes) ;
- avoir été validées dans une classe "normale" (et non expérimentale) ;
- être reliées aux systèmes de valeurs au aux idéaux pédagogiques auxquels il adhère ou pour lesquels il milite (ex : l'autonomie de l'élève) ;
- être "particularisables" (c'est à dire adaptables à la situation de <u>sa</u> classe, qui est particulière par nature).

(n) le pôle élève

Les références aux théories Piagétiennes sont constantes en D.D.M., mais celles-ci se révèlent vite insuffisantes.
(On n'a pas oublié la façon dont la réforme dite "des maths modernes" des années 70 avait déformé les théories de Piaget, de sorte que les structures logiques de l'enfant correspondent exactement aux structures logiques de la construction Bourbakiste).

Quatre hypothèses font actuellement l'unanimité :

- l'acquisition des connaissances passe par une <u>action</u> de l'élève (cf. infra) ;
- les connaissances ne s'empilent pas (le passage d'un niveau à un autre se fait par des phases de régression et de rééquilibrage [10] ;
- l'acquisition des connaissances se fait <u>contre</u> des connaissances antérieures [3] ;

- la mise en place de conflits socio-cognitifs favorise les situations d'apprentissage [11] [12].

*****

Les didacticiens, en se basant sur les hypothèses énoncées plus haut, construisent des "situations didactiques" (c'est à dire toute situation où il y a volonté de faire acquérir quelque chose aux élèves).

L'hypothèse (ou l'idéal ?) étant : pour que l'élève donne un sens à une notion, il faut qu'elle lui apparaisse comme un outil indispensable (c'est à dire qu'il n'y en a pas d'autres pour le remplacer), qu'il doit construire, pour résoudre un problème qu'il s'est approprié.
La recherche de telles situations se nomme "l'ingénierie didactique".

Pour G. BROUSSEAU, quatre étapes sont nécessaires à la construction d'un avoir nouveau par l'élève :

- une phase d'ACTION (et de DÉCISIONS) : l'élève, confronté à un problème, le prend en charge et produit des actions génératrices d'un savoir faire ;
- une phase de FORMULATION (et de COMMUNICATION) : échange d'informations, et construction d'un langage pour assurer cet échange ;
- une phase de VALIDATION (au sens de PREUVE) : l'élève doit prouver ce qu'il affirme autrement que par l'action ; il doit justifier sa solution CONTRE d'autres ;

Ces trois premières phases sont dévolues à l'élève.

- une phase d'INSTITUTIONNALISATION, dévolue à l'enseignant, où celui-ci reconnaît le concept construit, le nomme, et en fixe conventionnellement et explicitement le statut.

Michèle ARTIGUE ajoute ([2] page 78) une cinquième étape nécessaire :

- une phase d'EXERCICES, où l'élève aura l'occasion de faire fonctionner et de mettre à l'épreuve les connaissances acquises.

C'est dans une large mesure l'élève lui-même qui a la responsabilité de la construction de son savoir. Or les situations d'enseignement traditionnelles fonctionnent rarement sur ce schéma.

Une situation didactique, cependant, n'est pas nécessairement une situation de recherche ; elle peut aussi être une situation d'enseignement (j'allais écrire "normale" !). Elle fonctionne alors ainsi :

- s'appuyant sur des hypothèses de la théorie didactique, le professeur prévoit le comportement des élèves dans la situation proposée : cette analyse a priori prétend que telle ou telle chose peut se passer ;
- l'expérimentation en classe permet de confirmer ou d'infirmer ces prévisions.

Une des notions importantes de cette analyse a priori est celle de "variable didactique", variable sur laquelle l'enseignent peut agir, et dont un changement de valeur peut entraîner une modification des processus de résolution chez l'élève.

Par exemple l'élève utilisera-t-il la même procédure pour résoudre $x^2+2x-3=0$ et $0,785x^2-135,268x+0,0255=0$? utilisera-t-il la même procédure si le temps est limité ou s’il est libre ? s’il doit travailler seul au avec un groupe ? si les informations sont proposées par le prof dans un ordre différent ? etc.

On trouvera une aide à la construction et à la réalisation de telles situations (au collège surtout) dans l’article de Michel MANTE paru dans [13] , et un exemple (pour la classe de cinquième) dans un article de Michel CLINARD paru dans [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Régine DOUADY, Didactique des mathématiques, article Mathématiques de l’Encyclopedia Universalis, 1984.

[2] Michèle ARTIGUE et Régine DOUADY, "La didactique des mathématiques en France", in Revue Française de Pédagogie, n°76, juil/sept 1986, INRP

[3] G. BACHELARD, "La formation de l’esprit scientifique", librairie Vrin, Paris, 1977.

[4] Jacques NIMIER, "Les maths, le français, les langues... à quoi ça me sert", Cédic/Nathan, 1985.

[5] Jacques NIMIER, "L’enseignant et la représentation de sa discipline", in Recherches et Formation, n°1, 1987, INRP.

[6] Bernard CHARLOT, "Qu’est-ce que faire des maths ?", in Bulletin APMEP n° 359, juin 1987 (p. 263).

[7] Stella BARUK, "L’âge du capitaine (de l’erreur en mathématiques)", Ed. du Seuil, 1985.

[8] Le contrat didactique, in "Didactique des mathématiques : le dire et le faire", Cédic/Nathan, 1987, p.491

[9] Yves CHEVALLARD, "La transposition didactique", Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985. Cet ouvrage très dense est de lecture assez difficile ; on pourra lui préférer : "Les programmes et la transposition didactique" du même auteur, in Bulletin APMEP n° 352, février 1986, p. 32, voire même : Transposition didactique in [8] p.497.

[10] Alain BOUVIER, "Apprentissage et didactique", in Document n° 51 de l’IREM de Lyon, mai 1985.

[11] Anne-Nelly PERRET-CLERMONT, "La construction de l’intelligence dans l’interaction sociale", Ed. Peter Lang, Berne (lecture assez ardue).

[12] Yves PRETEUR, "Les conflits socio-cognitifs", in Cahiers Pédagogiques n’ 218-219, nov-déc 1983, p.45.

[13] Autour le la notion de situation problème, in "Suivi scientifique 1985-1986 des nouveaux programmes de sixième", bulletin inter-IREM, 1986, p.226.

[14] Le jeu de la botte noire : une approche de la formulation en algèbre, in "Suivi scientifique 1986-1987 des nouveaux programmes de cinquième", bulletin inter-IREM, 1987, p.247.

Que tous ceux que ces problèmes intéressent prennent contact avec la Régionale : un petit groupe de recherche pourrait se mettre en place, par exemple sur l'analyse des erreurs rencontrées par les élèves dans les situations d'apprentissage.
(contacter directement J. Verdier).

Note de la rédaction en 2008 :

Cet article date d'il y a plus de 20 ans. On peut aussi consulter :

http://www.edunet.tn/maths/Inspect/didac.htm
http://www2.uqtr.ca/hee/site_1/index.php?no_fiche=1629
http://www.inrp.fr/Didactique/Unite/Didmaths

Gilbert ARSAC, *Les Maths en collège et lycée. Didactique des mathématiques et théories de l'apprentissage*, pp. 298-315, Ed. Hachette Éducation Paris, 1997

Jean BRUN, *Didactique des mathématiques*, Ed. Delachaux et Niestlé, Lausanne, 1996.

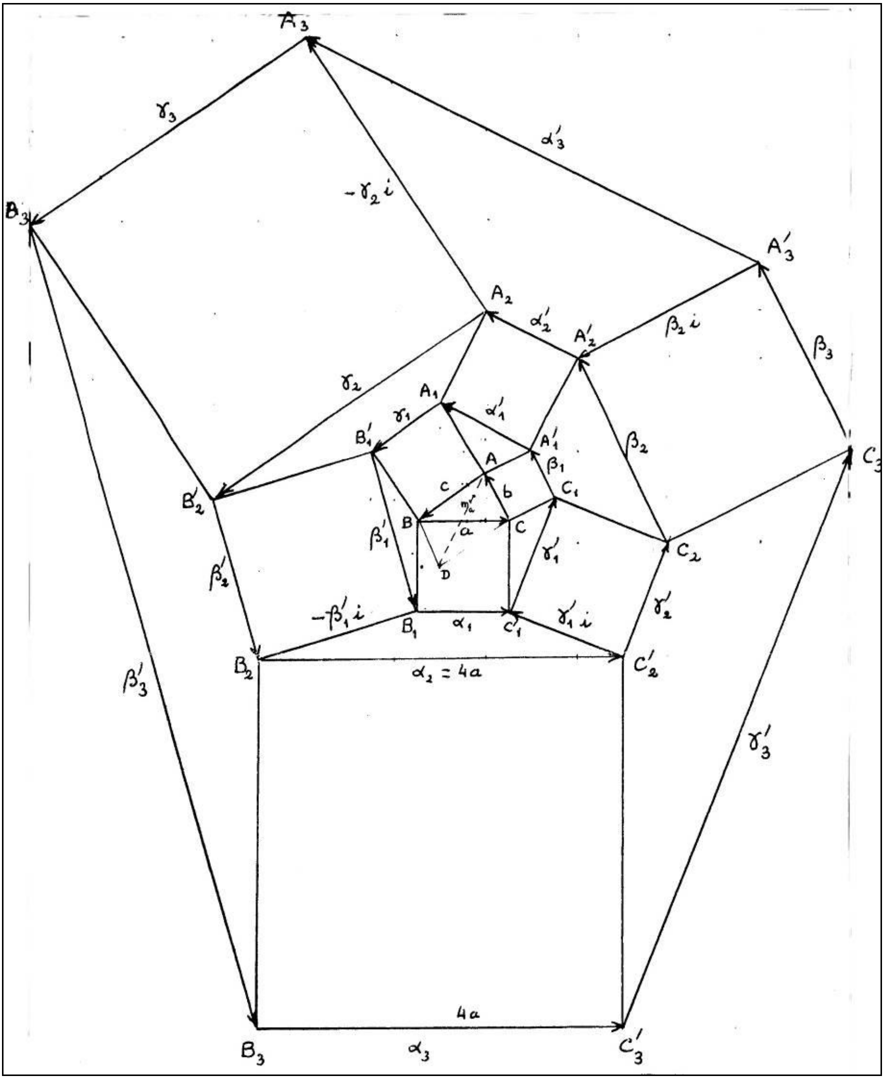
Etc. etc.

Problème du trimestre n°13

proposé par Marc **SERAY DE WOUSTVILLER (57)**

On considère $2n+3$ points du plan ($n \in \mathbf{N}$) tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés, et que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas cocycliques.
Peut-on trouver un cercle passant par 3 de ces points, et séparant les $2n$ points restants en n points situés à l'intérieur du cercle et n points à l'extérieur ?
Ce problème est accessible à des élèves de terminale C ou E.

Solution du problème n°12



Rappel de l'énoncé :

Dans un cadre de 18 cm sur 24 cm on place les points A (10 ; 14), B (8,5 ; 13) et C (10,5 ; 13).

N.B. Les dimensions proposées permettent l'obtention d'une figure correcte sur une page de format A4, en prenant comme unité le *cm* et l'origine dans le coin en bas à gauche.

On pose BC = a, CA = b et AB = c.

On construit sur chacun des côtés du triangle ABC, vers l'extérieur, un carré. Les sommets nouveaux sont les sommets d'un hexagone H_1.
Sur les côtés de H_1 qui n'appartiennent pas aux carrés précédents on construit des carrés vers l'extérieur. Les sommets nouveaux sont les sommets d'un hexagone H_2.

Et ainsi de suite…
Exprimer le périmètre de H_k en fonction du périmètre *p* du triangle ABC et de la somme *m* des longueurs de ses médianes.
Exprimer l'aire de H_k en fonction de l'aire *s* du triangle ABC et de la somme *t* des carrés de ses côtés.

Solution de l'auteur, André VIRICEL, DE VILLERS-LES-NANCY (54)

I. Notations

H_1, le premier hexagone, s'appelle $B_1\,C'_1\,C_1\,A'_1\,A_1\,B'_1$
H_k, le $k^{\text{ème}}$ hexagone, s'appelle $B_k\,C'_k\,C_k\,A'_k\,A_k\,B'_k$.
a est la longueur BC, $\vec{a}$ le vecteur $\overline{BC}$ noté aussi $\overrightarrow{\alpha_1}$; de même pour *b* et *c*.
Le côté $\overline{B_kC'_k}$ de H_k est $\overrightarrow{\alpha_k}$; les suivants sont $\overrightarrow{\gamma'_k}, \overrightarrow{\beta_k}, \overrightarrow{\alpha'_k}, \overrightarrow{\gamma_k}$ et $\overrightarrow{\beta'_k}$, dans cet ordre.
Les $\overrightarrow{\alpha_k}$ sont parallèles à $\overrightarrow{\alpha_1}$; $\overrightarrow{\alpha_{2p}} = \overrightarrow{\alpha_{2p+1}}$; posons $\overrightarrow{\alpha_{2p}} = u_{2p}\vec{a}$.
Les $\overrightarrow{\alpha'_k}$ sont parallèles à $\overrightarrow{\alpha'_1}$; $\overrightarrow{\alpha'_{2p-1}} = \overrightarrow{\alpha'_{2p}}$; $\overrightarrow{\alpha'_1} = (\vec{b}-\vec{c})i$; posons $\overrightarrow{\alpha'_{2p-1}} = v_{2p-1}(\vec{b}-\vec{c})i$.

II. Détermination de u_{2p} et v_{2p-1}

1°. La chaîne des vecteurs $B_{2p-1}\,B_{2p}\,C'_{2p}\,C'_{2p-1}\,B_{2p-1}$
donne $-\overrightarrow{\beta'_{2p-1}}i + \overrightarrow{\alpha_{2p}} + \overrightarrow{\gamma'_{2p-1}}i - \overrightarrow{\alpha_{2p-1}} = \vec{0}$,
$-v_{2p-1}(\vec{c}-\vec{a})i^2 + u_{2p}\vec{a} + v_{2p-1}(\vec{a}-\vec{b})i^2 - u_{2p-2}\vec{a} = \vec{0}$;
mais $u_{2p-2} = u_{2p-1}$ et $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$,
donc $v_{2p-1}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{a}-\vec{a}) + (u_{2p}-u_{2p-2})\vec{a} = \vec{0}$, et $\boxed{u_{2p} - u_{2p-2} = 3v_{2p-1}}$ (relation $\mathbf{U}_{2p}$).

2°. La chaîne de vecteurs $A_{2p}\,A_{2p+1}\,A'_{2p+1}\,A'_{2p}\,A_{2p}$

donne $-\overrightarrow{\gamma_{2p}}\mathrm{i}-\overrightarrow{\alpha'_{2p+1}}+\overrightarrow{\beta_{2p}}\mathrm{i}+\overrightarrow{\alpha'_{2p}}=\vec{0}$,

$-u_{2p}\vec{c}\mathrm{i}-v_{2p+1}(\vec{b}-\vec{c})\mathrm{i}+u_{2p}\vec{b}\mathrm{i}+v_{2p}(\vec{b}-\vec{c})\mathrm{i}=\vec{0}$

d'où $\boxed{v_{2p+1}-v_{2p-1}=u_{2p}}$ (relation $\mathbf{V}_{2p+1}$).

3°. Reste à exprimer les u sans les v et les v sans les u.

a) La combinaison symbolique $U_{2p+1}-U_{2p}=3V_{2p+1}$ conduit à

$(u_{2p+1}-u_{2p})-(u_{2p}-u_{2p-2})+3(v_{2p+1}-v_{2p-1})=3(v_{2p+1}-v_{2p-1})+3u_{2p}$

donc $u_{2p+2}-5v_{2p}+u_{2p-2}=0$.

b) La combinaison symbolique $U_{2p}+V_{2p+1}-V_{2p-1}$ conduit à

$(u_{2p}-u_{2p-2}-3v_{2p-1})+(v_{2p+1}-v_{2p-1}-u_{2p})-(v_{2p-1}-v_{2p-3}-u_{2p-2})=0$

donc $v_{2p+1}-5v_{2p-1}+v_{2p-3}=0$.

c) Recherche des premiers termes u_1, v_1, u_2, v_2 :

$u_1 = 1$. La chaîne $B_2\,C'_2\,C'_1\,B_1\,B_2$ conduit à $u_2 = 4$ $\left(\overrightarrow{\alpha_2}=4\overrightarrow{\alpha_1}\right)$

$v_1 = 1$. La chaîne $A_2\,A_3\,A'_3\,A'_2\,A_2$ conduit à $v_2 = 5$ $\left(\overrightarrow{\alpha'_3}=5\overrightarrow{\alpha'_2}\right)$

Ainsi $u_{2p+2}-5u_{2p}+u_{2p-2}=0$ avec « u_0 » = 1, $u_2 = 4$ (**U'**)

et $v_{2p+1}-5v_{2p-1}+v_{2p-3}=0$ avec $v_1 = 1$ et $v_3 = 5$ (**V'**).

On peut ainsi :

* Soit calculer de proche en proche

rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
u	**1**		**4**		**19**		**91**		**436**		**…**
v		**1**		**5**		**24**		**115**		**551**	

* Soit appliquer l'une des méthodes classiques de résolution des équations (**U'**) et (**V'**).

Tous calculs fait, on trouverait $u_{2p}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{\sqrt{21}}\right)\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^p+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\sqrt{21}}\right)\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^p$, et une formule de même allure pour les v_{2p+1}.

III. Périmètre des hexagones

Dans le parallélogramme ABDC, le vecteur $(\vec{c}-\vec{b})$ a pour module le double de la médiane m_a issue de A, donc $\alpha'_{2p+1} = v_{2p-1} \times 2m_a$.

Or $\alpha_{2p-1} = \alpha_{2p-2} = u_{2p-2} \times a$, donc :

$\mathscr{P}(H_{2p-1}) = u_{2p-2}(a+b+c) + 2v_{2p-1}(m_a + m_b + m_c)$,

$\mathscr{P}(H_{2p-1}) = u_{2p-2} \times P + 2v_{2p-1} \times M$.

De même $\mathscr{P}(H_{2p}) = u_{2p} \times P + 2v_{2p-1} \times M$ et

$\mathscr{P}(H_{2p+1}) = u_{2p} \times P + 2v_{2p+1} \times M$.

Il y a une sorte «d'escalade» : un des deux termes ne change pas, l'indice de l'autre augmente de 2.

IV. Aires des hexagones

L'hexagone H_1 comporte trois carrés et trois triangles équivalents à ABC (d'aire S) :

Aire(H_1) = $a^2 + b^2 + c^2 + 3S$.

On l'entoure successivement « couronnes » formées de trois carrés et de trois trapèzes.

<u>Côtés des hexagones</u>

1°) α_0,α_1 α_2,α_3 ...... $\alpha_{2k},\alpha_{2k+1}$

$u_0 \times a$ $u_2 \times a$ ...... $u_{2k} \times a$

2°) Dans le parallélogramme ABCD, le vecteur $(\vec{c}-\vec{b})$ a pour module le double de la longueur de la médiane m_a issue de A.

α'_1,α'_2 α'_3,α'_4 ...... $\alpha'_{2k-1},\alpha'_{2k}$

$v_1 \times 2m_a$ $v_3 \times 2m_a$ ...... $v_{2k-1} \times 2m_a$

<u>Périmètre des hexagones</u> (voir § **III**)

Il comprend les trois côtés des carrés qu'il contient et les trois grandes bases des trapèzes.

$\mathscr{P}(H_{2k-1}) = \Sigma\, \alpha_{2k-1} + \Sigma\, \alpha'_{2k-1}$

$\mathscr{P}(H_{2k}) = \Sigma\, \alpha'_{2k} + \Sigma\, \alpha_{2k}$

Donc $\mathscr{P}(H_{2k-1}) = u_{2k-2} P + 2v_{2k-1} M$
$\mathscr{P}(H_{2k}) = u_{2k} P + 2v_{2k-1} M$
$\mathscr{P}(H_{2k+1}) = u_{2k} P + 2v_{2k+1} M$

<u>Aire des hexagones</u>
L'aire des hexagones comprend le triangle ABC qu'on retrouvera ultérieurement, la somme des carrés des côtés α_1, α_3, …, α'_1, α'_3…, la sommes des trapèzes classés en deux catégories (ceux dont les grandes bases ont des indices impairs, et ceux dont les grandes bases ont des indices pairs).
Il y a deux cas.

- Hexagones d'indices impairs

Somme des carrés de côtés α_1, α_3, …, α_{2k-1} : $\sum_{p=1}^{p=k} u_{2p-2}^2 \times \sum a^2$

(posons $\sum a^2 = T$)

Somme des carrés de côtés α'_1, α'_3, …, α'_{2k-1} : $\sum_{p=1}^{p=k} v_{2p-1}^2 \times \sum (2m_a)^2$

avec ($4\sum m_a^2 = 3T$)

Somme des trapèzes dont les grandes bases ont des indices impairs :
En accolant les premiers en commençant par les plus petits, on obtient le triangle $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$ (qui a pour côtés les doubles des médianes, son aire est 3S), puis les trapèzes de bases α'_3, β'_3, γ'_3 on obtient en tout le triangle $\alpha'_3\beta'_3\gamma'_3$, puis … les trapèzes de bases α'_{2k-1}, β'_{2k-1}, γ'_{2k-1} , on obtient en tout le triangle $\alpha'_{2k-1}\beta'_{2k-1}\gamma'_{2k-1}$, ce dernier semblable à $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$, le rapport de similitude étant v_{2k-1}, donc l'aire totale des trapèzes accolés est $v_{2k-1}^2 \times 3S$.
Somme des trapèzes dont les grandes bases ont des indices pairs :
Autour du « noyau » ABC qu'on utilise ici, les trois premiers trapèzes accolés donnent le triangle $\alpha_2\beta_2\gamma_2$. Les trois trapèzes suivants mènent à $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, … et enfin on obtient le triangle $\alpha_{2k-2}\beta_{2k-2}\gamma_{2k-2}$. Ce dernier est semblable à ABC, le rapport de similitude étant u_{2k-2}, donc l'aire totale de ces nouveaux trapèzes est $u_{2k-2}^2 \times S$.

L'aire de H_{2k-1} est $\sum_{p=1}^{p=k} u_{2p-2}^2 \times T + \sum_{p=1}^{p=k} v_{2p-1}^2 \times 3T + v_{2k-1}^2 \times 3S + u_{2k-2}^2 \times S$,

ou $\left(\sum_{p=1}^{p=k} u_{2p-2}^2 + 3\sum_{p=1}^{p=k} v_{2p-1}^2 \right) \times T + \left(3v_{2k-1}^2 + u_{2k-2}^2 \right) \times S$.

- Hexagones d'indices pairs

On montrerait d'une manière analogue que l'aire de H_{2k} est :

$$\left(\sum_{p=1}^{p=k} u_{2p}^2 + 3\sum_{p=1}^{p=k} v_{2p-1}^2 \right) \times T + \left(3v_{2k-1}^2 + u_{2k}^2 \right) \times S.$$

Dans chacun des coefficients de T ou de S, on reconnaît la montée en alternance quand on passe d'un hexagone au suivant.

BREVE THÉORIE MATHÉMATIQUE

Proposition n° 1 :

II existe au moins un adhérent de la Régionale qui n'a pas encore écrit "quelque chose" pour le PETIT VERT (un article, un compte rendu d'expérimentation en classe, une solution ou un énoncé de problème, un commentaire sur nos positions, etc.).

Proposition n°2 :

Toute personne a le droit de proposer "quelque chose" pour le PETIT VERT (un article, un compte rendu d'expérimentation en classe, une solution ou un énoncé de problème, un commentaire sur nos positions, etc.).

Corollaire :

D'avance, MERCI !

À VOS COMPAS ...

Par Michel FRIRY
Collège de Rambervillers

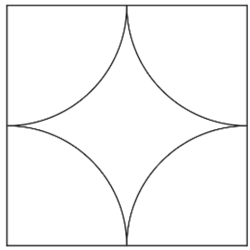
Objet un peu mystérieux dans des doigts encore malhabiles, le compas doit être réhabilité, et son usage recommandé dans l'exécution des exercices concrets réalisés en mathématiques en sixième et cinquième.

Cet objet est multifonctionnel puisqu'il permet presque simultanément de tracer des courbes, de tracer et de comparer des secteurs angulaires, de vérifier des mesures de segments, de graduer ...

La liste des utilisations en classe n'est pas limitative : elles permettent aux élèves de se familiariser avec cet instrument. Bien sûr, il s'emploie avec autant de bonheur que la "règle à trous" ou la ficelle tendue.

Et il n'est pas interdit de faire preuve d'imagination ....

OBJECTIFS en 6ème et en 5ème



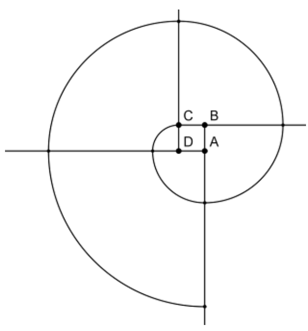
- l'instrument (connaissance, et choix du modèle)
- utilisation : dominer l'instrument, le rendre indispensable
- tracés possibles
- soin et exactitude des tracés, présentation d'un travail
- propriétés du cercle et du disque

1. Cercle et disque de rayon constant

1.1 Report de longueur dans tous les sens autour d'un point : utilisation d'une barre rigide à trous (meccano), d'une ficelle,

1.2 Compas : ouverture variable avant utilisation
Compas à balustre : - branches égales
- réglage du crayon
- tenir le compas

1.3 Cercle et disque le cercle frontière du disque ;
ex : la chèvre au piquet qui pâture



2. Utilisation du compas

2.1 Report de longueurs
2.2 Tracé d'un cercle (centre et rayon donné)
2.3 Report d'un secteur angulaire organigramme du tracé
2.4 Exemples de tracés de cercle
- cercle et droite (différents cas)
- position relative de deux cercles

2.5 Tracés à l'intérieur du cercle
- tracés de rosaces
- secteurs égaux ; hexagone régulier ; triangle équilatéral

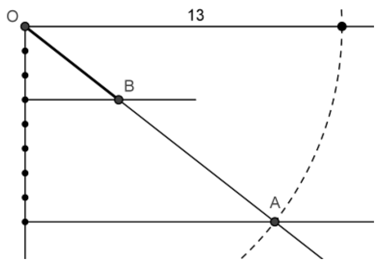
2.6 Tracés de "spirales" avec différentes portions de cercle (en déplaçant le centre et en faisant varier le rayon)

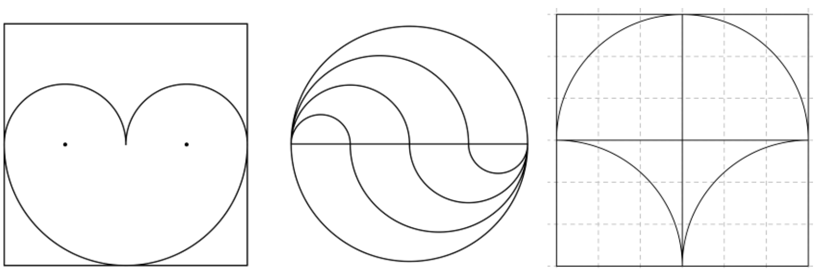
3. Tracés de lignes et de figures (écrire l'organigramme)

3.1 Médiatrice d'un segment (substitution au pliage)
3.2 Bissectrice d'un angle (variation de la médiatrice)
3.3 Triangle régulier (partage du disque en 6)
3.4 Angles de 60°, 30°, 120°, 90° (60° + 30°), 45°, 180°
3.5 Fabrication d'un rapporteur simplifié
3.6 Utilisation de la symétrie orthogonale
3.7 Construction de figures (triangles, carrés, rectangles)
3.8 Bissectrices dans le triangle ; cercles inscrit et exinscrits
3.9 Vérification des égalités de langueurs (diagonales, médianes…)
3.10 Détermination d'une fraction d'un segment en utilisant les lignes du cahier comme parallèles équidistantes.

Voici l'organigramme de la construction du 3.10. Exemple ci-dessous : 3/8 d'un segment de longueur 13 cm.

1. Quart de cercle de centre 0 et de rayon la mesure du segment.
2. Tracé de OA (A est sur la ligne correspondant à la valeur du dénominateur).
3. B est sur OA, déterminé par la ligne correspondant à la valeur du numérateur.





N.B. Cet article est illustré par des figures réalisées par des élèves de sixième.

NOUS AVONS ÉCRIT…

... à Monsieur le Recteur, pour lui faire part de nos craintes devant la menace qui pèse sur certains P.E.G.C. enseignant actuellement les mathématiques, et qui consisteraient en un « glissement » vers l'incompétence. Voici un extrait de notre lettre :

(…) Mais certains de nos collègues P.E.G.C. "Maths-Physique", qui effectuaient alors leur service entièrement ou principalement en mathématiques, ont appris qu'on leur demanderait, à la rentrée prochaine, de « basculer » vers la physique. Nous estimons qu'une telle situation, si elle se réalisait, équivaudrait à un gaspillage des compétences et des savoir-faire de ces enseignants, ce qui ne nous parait pas acceptable en cette période de crise de recrutement de « mathématiciens ». D'autant qu'il faudrait former (dans quelles conditions ? et avec quelle rapidité ?) les collègues qui les remplaceraient.

… à Madame et Monsieur I.P.R. pour lancer un « cri d'alarme » sur les tendances inflationnistes de certains collègues vis-à-vis des programmes et instructions (en citant un certain ombre d'exemples dont nous avions eu connaissance), et les listes de « savoirs minima à l'entrée en seconde », publiées par certains lycées, et qui dépassent largement la mesure.
Nous avons reçu la réponse que voici :

Nous accusons réception de votre lettre du *22* février 1988. Les problèmes que vous évoquez ne sont pas nouveaux pour nous et nous avons déjà eu à constater des exemples encore plus criants que ceux que vous nous soumettez.

Nous avons eu d'autre part l'occasion de discuter avec Monsieur le Recteur et avec l'Inspection Générale des documents produits par certains lycées.

Chaque fois que nous en avons l'occasion, et en particulier à chacun de nos passages en lycée, nous dénonçons de telles pratiques et essayons d'obtenir plus de modération dans les aspirations des professeurs et l'application stricte des programmes.

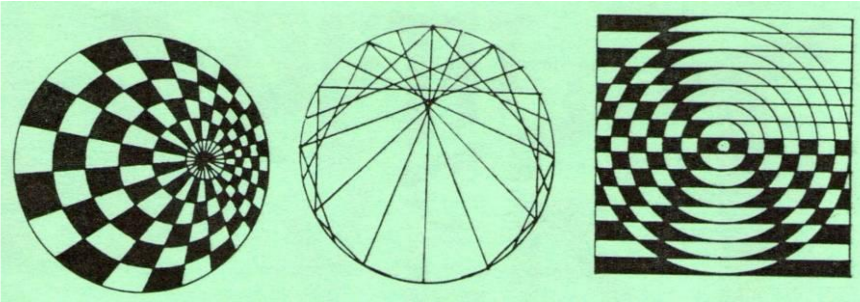
Nous avons d'autre part demandé à l'IREM de bien vouloir prévoir des actions de formation concernant la liaison 3^e-seconde.

Quant au premier cycle, deux professeurs de chaque collège de l'académie sont convoqués à des réunions dans lesquelles nous expliquons les objectifs de chacun des nouveaux programmes et fixons les bornes à ne pas dépasser.

Nous espérons que cette lettre répond à votre attente et vous prions d'accepter nos salutations cordiales.

SUR VOTRE CALENDRIER

Mercredi 18 mai à 14 h. 30, locaux de l'I.R.E.M., réunion de travail sur la liaison seconde/$1^{ère}$ S (voir fin de l'éditorial)



BACCALAUREAT PROFESSIONNEL

"MAINTENANCE DES SYSTEMES BIODYNAMIQUES"

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET DE SCIENCES (Durée : 1 heure)

(calculatrices et tous instruments de calcul autorisés)

Les Patafias sont des globelles gigouillant. La gigouille statique d'un Patafia (mesurée en artémis) s'exprime par la formule :

$$G = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{F_i \times q_i^3}{f^2 \sqrt{49}}$$

F_i : (mesurée en caracoiles) mesure la fidélité d'une Bérouche à l'égard d'un Patafia ;
q_i : (mesurée en verstes) mesure la distance d'une Bérouche au Patafia correspondant.
f : (mesuré en burufes) indique le flux de jawal du Patafia.

La gigouille statique $\boldsymbol{G}$ exercée par un Patafia en milieu vaseux devient une gigouille dynamique $\mathscr{G}$. Cette gigouille dynamique est mesurée en artémis bis.

La gigouille dynamique $\mathscr{G}$ est égale au quotient de la dactilité de la vase $\mathscr{D}$(mesurée en floques) par le cosinus de l'angle de pénétration du Patafia dans la vase.

Un Patafia gigouille dynamiquement à $\mathscr{G}$ =26,2 artémis bis. Sachant qu'il maintient pendant tout son parcours une distance avec chacune des Bérouches et que celles-ci sont caractérisées par :

	F_i	q_i
B_1	7	2
B_2	2	3
B_3	12,5	5
B_4	4	8

Sachant par ailleurs que la dactilité de la vase est de 8 floques et que le Patafia considéré a un flux de jawal de 1/7 burufe, calculer l'angle de pénétration du Patafia dans la vase.

SOMMAIRE

Le magnifique dessin de la page 1 de couverture peut servir de support à un exercice.

SUR VOTRE CALENDRIER

Mercredi 18 mai à 14 h. 30, locaux de l'I.R.E.M., réunion de travail sur la liaison seconde/1ère S (voir fin de l'éditorial)

LE PETIT VERT n° 13
(BULLETIN DE LA REGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N° CPPAP 2 814 D 73 S. N° ISSN 0760-9825. Dépôt légal : 1988
Imprimé au siège de l'Association :
IREM (Faculté des Sciences), B.P. 239. 54506-VANDŒUVRE

Ce numéro a été tiré à 550 exemplaires

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 30 F
L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P. à jour de leur cotisation.

NOM :
ADRESSE :

Désire m'abonner pour 1 an (année civile) au PETIT VERT

Joindre règlement à l'ordre de APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)