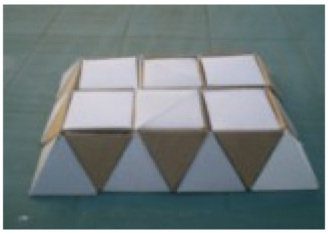
MATHS ET JEUX

DES ASSEMBLAGES DE TÉTRAÈDRES ET DE PYRAMIDES À BASE CARRÉE

Par François DROUIN

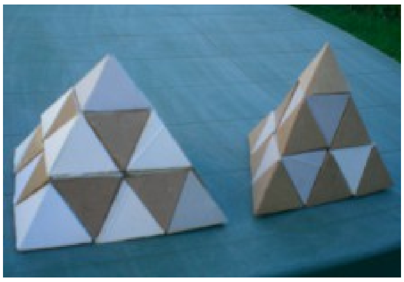
Matériel : une grande quantité de tétraèdres réguliers et de pyramides régulières à base carrée de même longueur d'arête.

Des couleurs différentes pour les deux types de pyramides facilitent les manipulations par de jeunes élèves.



Cette construction permet de comprendre que ces deux types de pyramides assemblés pavent l'espace.

Elle est utilisée dans la réalisation de structures solides, telle celle qui accueillait il a peu de temps les clients d'une chaine d'hypermarchés.



Des tétraèdres réguliers et des pyramides à base carrée aux échelles 1, 2, 3, 4, etc. peuvent être construites.

Un tableau à compléter

	Pour un tétraèdre		Pour une pyramide à base carrée
	Nombre de petits tétraèdres	Nombre de petites pyramides à base carrée	Nombre de petits tétraèdres
Échelle 1	1	0	0
Échelle 2	4	2	4
Échelle 3			
Échelle 4			
…			
Échelle 10			
Échelle *n*			

retour au sommaire

Dans la première brochure d'accompagnement de notre exposition « Objets Mathématiques » était posée la question du nombre de tétraèdres et d'octaèdres réguliers d'arête 1 nécessaires à la construction d'un tétraèdre et d'un octaèdre réguliers d'arête *n*.
Jérôme Cardot nous avait proposé sa démarche, elle est accessible actuellement sur l'ancien site de la régionale.

http://apmeplorraine.fr/old/modules/coinjeux/jeux5/07_tetraedres_et_octaedres/echelle_n_1.jpg

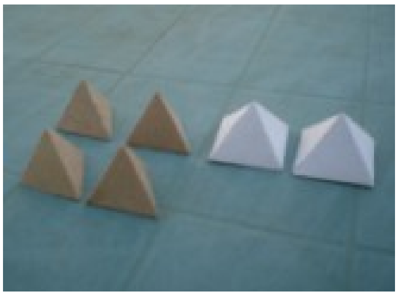
http://apmeplorraine.fr/old/modules/coinjeux/jeux5/07_tetraedres_et_octaedres/echelle_n_2.jpg

Dans un tétraèdre de côté *n*, il y a $\frac{n}{3}(n^2+2)$ tétraèdres de côté 1 et $\frac{n^3-n}{6}$ octaèdres de côté 1.

Dans un octaèdre de côté *n*, il y a $\frac{1}{3}(4n^3+2n)$ tétraèdres de côté 1 et $\frac{1}{3}(2n^3+n)$ octaèdres de côté 1.

L'octaèdre régulier peut être considéré comme un assemblage de deux pyramides à base carrée. Les résultats trouvés par Jérôme seront donc utiles pour nos assemblages de tétraèdres réguliers et de pyramides régulières à base carrée.

Des volumes



Avec deux pyramides à base carrée et quatre tétraèdres d'arête 1, nous construisons un tétraèdre d'arête 2. En fin de collège, un élève sait que si le volume d'un tétraèdre d'arête 1 est pris comme unité, le volume du tétraèdre d'arête 2 est 8. Il lui sera alors aisé de prouver que le volume d'une pyramide carrée d'arête 1 est 2.
Le volume d'un tétraèdre régulier est la moitié du volume d'une pyramide régulière à base carrée de même longueur d'arête.

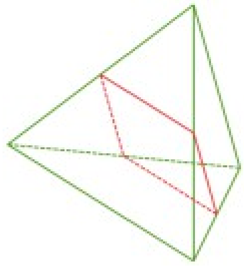
Avec six pyramides à base carrée et quatre tétraèdres d'arête 1, nous construisons une pyramide à base carrée d'arête 2. Si le volume de la pyramide à base carrée d'arête 1 est pris comme unité, le volume de la pyramide obtenue est 8. Le volume des quatre tétraèdres d'arête 1 est 2. Nous retrouvons le fait que le volume d'un tétraèdre régulier est la moitié du volume d'une pyramide régulière à base carrée de même longueur d'arête.

retour au sommaire

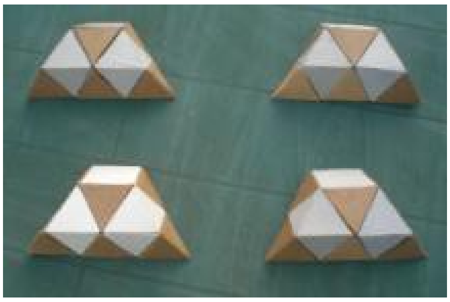
Pour de nouveaux tétraèdres

Deux demi-tétraèdres

Les deux moitiés du tétraèdre d'arête 2 sont obtenues par la coupe dessinée ci-contre (le quadrilatère a pour sommets quatre milieux d'arêtes du tétraèdre).
Nos lecteurs se persuaderont que la section dessinée en rouge est un carré. Leurs élèves sauront dessiner un patron d'un des demi-tétraèdres.



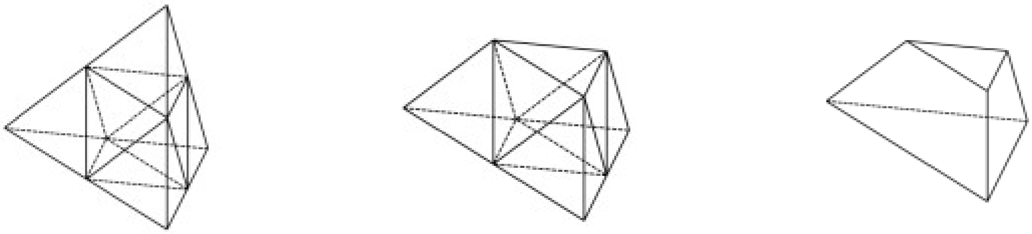
Quatre quarts de tétraèdres



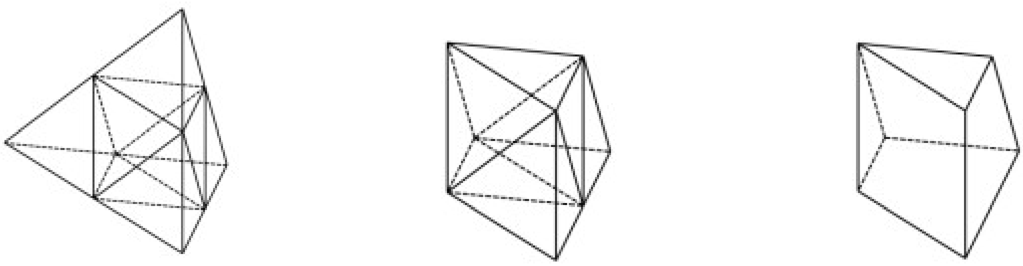
Un tétraèdre régulier d'arête 4 peut être construit avec ces quatre pièces. Ce découpage de tétraèdre est évoqué dans la revue ARCHIMEDES n°3 (Décembre 2003).

Le jeu PYRAMIS

Créé en 1979 par Bernard GIRETTE, il était édité par « Les Jeux du Manoir Imaginaire -Jeux Descartes », il semble ne plus être commercialisé mais se retrouve parfois sur des sites de vente d'occasion.



Un tétraèdre d'arête 1 est retiré du tétraèdre d'arête 2 pour obtenir un tronc de pyramide.



Deux tétraèdres d'arête 1 sont retirés du tétraèdre d'arête 2 pour obtenir un PYRAMIS.

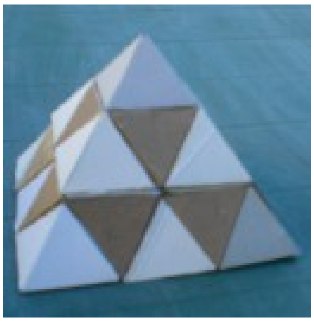
retour au sommaire

Le créateur du jeu a d'abord imaginé la réalisation de tétraèdres ayant autant de cavités intérieures que d'étages (les chambres secrètes des pyramides), puis d'autres entièrement pleines sont apparues possibles.

Constructions à réaliser	Solides utilisés Tronc de pyramide
Tétraèdre de côté 3 (avec trois trous)	0
Tétraèdre de côté 3 (avec un trou)	2
Tétraèdre de côté 4 (avec quatre trous)	0
Tétraèdre de côté 4 (sans trou)	4
Tétraèdre de côté 5 (avec cinq trous)	0
Tétraèdre de côté 5 (sans trou)	5
Tétraèdre de côté 6 (avec six trous)	0
Tétraèdre de côté 6 (sans trou)	6

Voici les dix pièces permettant la réalisation d'un tétraèdre d'arête 4 « sans trou ». La construction de ce solide ne présente pas de grande difficulté.

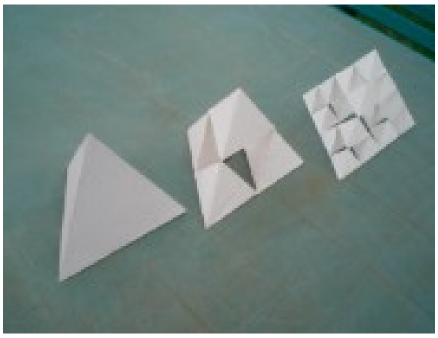
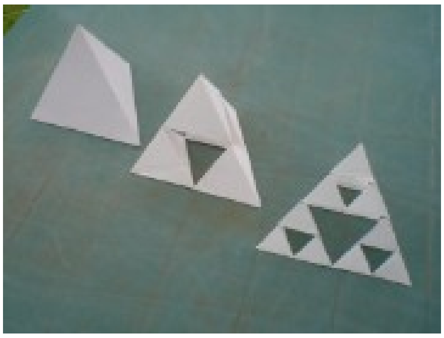
Pour une pyramide à base carrée



Une pyramide régulière à base carrée d'arête 3 peut être construite avec ces quinze pièces. Il y a quelque temps, un collègue m'en avait donné des exemplaires en carton unicolores. Réalisé en bois, il semble avoir été commercialisé chez « Hachette Collections ». http://collection.cassetete.free.fr/1_bois/puzzle_pyramide/puzzle_pyramide.htm

retour au sommaire

Comme Sierpiński.

Le tétraèdre d'arête 1 est un assemblage de quatre tétraèdres d'arête et de deux pyramides à base carrée d'arête . À chaque étape, le tétraèdre est évidé, les pyramides à base carrée sont retirées. Se construit petit à petit une des structures fractales imaginées par le mathématicien polonais **Wacław Franciszek Sierpiński**.
https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle
Les deux images ci-dessus montrent les trois premières étapes de la réalisation.

Un tableau à compléter (le volume du premier tétraèdre est pris comme unité)

Étape de la construction	1	2	3	4	10	*n*
Volume du solide	1					

Les résultats écrits dans le premier tableau à compléter seront utiles.

À Bottrop, ancienne cité houillère de la Ruhr, l'architecte Wolfgang Christ a réalisé une telle structure. Les trois plateformes culminent à 18 m, 32 m et 38 m. Ces renseignements ainsi que la taille des visiteurs au pied de l'escalier permettent de trouver une approximation des dimensions de l'œuvre.

https://de.wikipedia.org/wiki/Tetraeder_%28Bottrop%29

Stella Octangula

Un lien peut être fait avec la Stella Octangula évoquée dans le Petit Vert 123 : c'est un assemblage de huit tétraèdres et d'un octogone de même arête, donc de huit tétraèdres et de deux pyramides à base carrée de même arête.
http://www.apmeplorraine.fr/pv/PV123.pdf (pages 24-26).

retour au sommaire