LE PETIT VERT

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

N° 131	SEPTEMBRE 2017

Möbius, jusque dans le tricot ! Voir page 68

www.apmeplorraine.fr

N° ISSN : 0760-9825. Dépôt légal : Septembre 2017. Directeur de la publication : Gilles WAEHREN.
Pour les adhérents lorrains de l'APMEP, à jour de leur cotisation, l'abonnement au Petit Vert est gratuit. Il est proposé en version électronique (PDF) a tous les adhérents. Cependant, si vous désirez recevoir une version papier (sans la couleur) par la poste, envoyez une demande en ce sens à jacverdier@orange.fr. Les adhérents qui sont mutés dans une autre académie peuvent demander de continuer à recevoir le Petit Vert quelque temps encore (version électronique PDF uniquement).
Ce numéro a été tiré à 25 exemplaires papier, imprimés au centre de reprographie de l'U.L.

SOMMAIRE

retour au sommaire

édito

SOMMES-NOUS COMPÉTENTS ?

Cette rentrée 2017 amène au lycée le premier lot des élèves issus d'une réforme du collège ambitieuse. Certes, les nouveaux "seconde" n'auront connu qu'un an de changements plus ou moins faciles à gérer et ne seront peut-être pas si différents de ceux de l'année qui vient de se terminer. Pourtant, on est en droit de penser que beaucoup de mutations ont déjà eu lieu avant cette réforme. Les stratégies d'orientation à la fin de la troisième – comme en fin de terminale, d'ailleurs – ne tiennent plus seulement compte des seuls résultats scolaires ou de la réussite, plus ou moins brillante, à un examen. Les attentes, pas toujours explicites, des élèves, de la société, pour le lycée sont de moins en moins en adéquation avec la mission qui lui a été confiée, il y a longtemps déjà : former de futurs étudiants dotés d'un grand capital de connaissances.

Se pose alors la question de savoir ce que signifie « faire des mathématiques ». Est-ce connaitre un grand nombre de résultats ? C'est commode, mais cela ne veut pas toujours dire qu'on les maitrise. Est-ce savoir effectuer des calculs d'une grande complexité avec une grande aisance et une grande rapidité ? Là encore, c'est bien pratique mais encore faut-il appréhender la finalité de ces calculs. La compréhension du problème semble toujours aller de soi pour celui ou celle qui l'a posé. Pourtant, cette étape est essentielle pour que la situation à étudier ait un quelconque intérêt. Gérons-nous toujours les implicites des exercices que l'on donne aux élèves ? Notre façon de nous exprimer en classe, sur feuille, est-elle toujours aussi claire que nous nous l'imaginons ? Ceci étant acquis, que faisons-nous alors pour aider les élèves à progresser dans leur compréhension du discours mathématique ?

La mission bien explicitée, le problème bien cerné, commence alors l'aventure de sa résolution. Les chemins empruntés ne sont pas toujours en ligne droite, ne sont pas toujours les plus courts. Comment tenir la carte pour ne pas s'égarer ? Quand accepter de faire demi-tour, reconnaitre qu'on est dans une impasse ? Le travail de recherche peut s'avérer ingrat en termes de résultats immédiats et rentables. Mais quel était son objectif : arriver au bout du chemin ou suivre ses méandres ? Apprendre à chercher, valider ou invalider ses découvertes est une étape indispensable dans l'apprentissage de la résolution d'un problème. Alors, bien sûr, il pourra être nécessaire de faire des calculs pour produire une réponse, de construire des raisonnements pour justifier sa démarche, convaincre de son bien-fondé et, enfin, exposer tout cela de façon claire dans un texte, une figure, une présentation orale. Toute cette démarche demande un accompagnement. N'est-ce pas ce que nous souhaiterions que nos élèves sachent faire quand ils terminent leur cursus en mathématiques : savoir résoudre des problèmes, raisonner honnêtement, vérifier leurs allégations ? On peut alors se demander si nos modes d'évaluation au lycée le permettent vraiment. Les examens terminaux tendent à l'intégrer davantage chaque année. Malheureusement, la notation en mathématique est souvent perçue de façon assez binaire : juste ou faux. Certes, nous essayons autant que possible de lutter contre cette perception en attribuant des bonus suivant le niveau de réussite.

retour au sommaire

Mais, si l'intervalle des nombres compris entre 0 et 20 est indénombrable, l'ensemble des notes sur 20 est de cardinal fini et, pourtant, encore trop grand.

L'évaluation par compétences a été intégrée au Lycée dans de nombreuses disciplines. Elle se traduit encore par un bilan numérique. Les maths ont une marge de progression dans le domaine. Mais c'est un changement de pratique peu confortable : il va falloir faire un effort d'explicitation de nos intentions aux élèves, les habituer à une nouvelle approche de l'appréciation de leur travail, à une participation plus active dans le bilan de leur activité mathématique. Les méthodes existent, les protocoles ont été éprouvés : le Collège et l'école élémentaires les pratiquent depuis plusieurs années, des professeurs de Lycée (notamment professionnel) les utilisent déjà ; des formations académiques devraient être proposées pour aider les néophytes à les acquérir. Il sera nécessaire de consacrer du temps pour y parvenir. Nous sera-t-il accordé en quantité suffisante ? Des périodes de concertation régulières des équipes, dans les établissements, doivent être instituées et intégrées dans le temps de travail au lycée. Ces moments d'échanges collégiaux existent et sont indispensables mais sont-ils appréciés à leur juste valeur ? Une meilleure prise en compte de cet aspect de notre vie professionnelle est primordiale pour faire évoluer nos pratiques dans l'évaluation et le travail collectif.

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale A.P.M.E.P. Lorraine.
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges "mathématiques" entre les adhérents.
Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à jacverdier@orange.fr .

retour au sommaire

JOURNÉE RÉGIONALE : 21 mars 2018

La prochaine Journée régionale des mathématiques aura lieu le mercredi 21 mars prochain, le matin à la Faculté ses Sciences (campus de Vandœuvre), et l'après-midi au lycée Jacques Callot.

Elle débutera par une conférence de Frédéric Metin et Patrick Guyot (IREM de Dijon) à propos de Didier Henrion, compilateur de récréations mathématiques des années 1620. Elle se poursuivra par l'assemblée générale, les réunions des commissions par niveau, et deux plages d'ateliers.

Pour les enseignants en poste du second degré (public), vous pouvez vous inscrire auprès de la DIFOR, via le logiciel GAIA, afin de bénéficier d'une autorisation d'absence pour cette journée. La procédure est la suivante : se rendre sur pial.ac-nancy-metz.fr. Aller à "*Bouquet de services", "Portail : Arena", "Gestion des personnels", "GAIA - Accès individuel", "Inscription individuelle".* Les journées de l'APMEP sont répertoriées sous le n° de code 17A0120532 : deux actions sont proposées, les Journées nationales de Nantes (module 42613) et la Journée régionale du 21 mars (module 42614). La date limite pour l'inscription sur Gaïa est le 20/09/2017.

Tous les inscrits sur GAIA recevront en janvier 2018 le programme détaillé de cette journée.

Pour les enseignants du privé, l'inscription se fait par l'intermédiaire de FORMIRIS. La démarche doit être faite au niveau de votre établissement : contactez le secrétariat. Les journées de l'APMEP sont répertoriées sous le n° de code 17A0120532 : deux actions sont proposées, les Journées nationales de Nantes (module 42613) et la Journée régionale du 21 mars (module 42614).

Deux ateliers seront proposés spécifiquement aux **enseignants du premier degré** : "Construire, manipuler, jouer et apprendre avec des polyminos" (cycles 2 et 3) et "Entrée dans les problèmes par l'image" (cycle 3).

Les professeurs des écoles de Meurthe-et-Moselle pourront s'inscrire à ces ateliers dès l'ouverture de l'application Circon'script du 18 septembre au 20 octobre 2017 ; ces ateliers seront comptabilisés dans le cadre de leurs 18 heures annuelles de formation (incluses dans les 108 heures dues hors enseignement obligatoire). Pour les professeurs des écoles des autres départements (et les Meurthe-et-Mosellans après la fermeture de Circon'scipt), les inscriptions seront enregistrées via un formulaire qu'ils recevront par l'APMEP au premier trimestre 2018.

APPEL À ATELIERS

Un des temps forts, gage de réussite de cette journée, est la présentation d'ATELIERS. Le but de ces ateliers est de permettre de partager, d'échanger, de transmettre, de susciter la curiosité, d'ouvrir des pistes, de débattre… sur des sujets en rapport avec les mathématiques et leur enseignement.

Ces ateliers doivent être **variés et nombreux** : il serait bon qu'il y en ait une vingtaine, et nous avons déjà quelques pistes. Nous lançons donc un appel auprès de tous les collègues qui voudraient en animer un. Ces ateliers se dérouleront l'après-midi, durant 1 h 20 et pourront rassembler chacun de 20 à 30 participants.

Envoyez vos propositions le plus rapidement possible à valerie.pallez@ac-nancy-metz.fr .

NOUS COMPTONS SUR VOUS !

retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

UN GOUTER DE L'APMEP À ANCERVILLE

Le mercredi 5 juillet 2017, a eu lieu au collège Émilie Carles d'Ancerville, dans le sud meusien, une réunion-goûter autour du thème de la pédagogie inversée. Nous étions huit professeurs de mathématiques, dont les intervenants Fathi DRISSI et Christelle KUNC.
Depuis quelques années, on entend souvent parler de la « classe inversée ». Souvent, les médias la présentent en opposition avec les cours classiques. Mais est-ce vraiment le cas ? Qu'entend-on alors par « cours classiques » ? Et existe-t-il un modèle unique de classe inversée ?

Nos collègues ont donc présenté les origines de cette pédagogie inversée, ses caractéristiques et ses avantages ; ils ont partagé quelques expériences menées en classe et malgré un timing juste, ils nous ont permis une initiation aux différents outils indispensables à la mise en œuvre de celle-ci. Il a ensuite été proposé la création d’un réseau d'échanges d'expériences et d'une banque de capsules vidéo.

Après ce bel après-midi convivial, se terminant par ailleurs autour d'un café, de jus de fruits et de délicieux gâteaux, il ne nous reste plus qu'à nous lancer... après avoir analysé nos pratiques pédagogiques (l'idée étant d'éviter la lassitude de nos élèves pour un apprentissage plus efficace), étudié le degré d'autonomie de nos élèves et, bien sûr, approfondi les outils numériques découverts ce jour ! Bref, quel programme ! Et me voilà à deux jours des grandes vacances avec plein d'idées dans la tête !...

Compte rendu de Thi-Tuong-Vi FABBIAN,
professeure au collège Émilie Carles



Un des animateurs (Fathi), les participants et le goûter proprement dit...

retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

DÉCLICS ! 1er festival du jeu éducatif du Grand Est

Les 17 et 18 mai dernier, l'Atelier Canopé 57 a proposé différentes actions autour du jeu. Au programme : deux journées de rencontres, de découvertes… ou de redécouvertes de ces formidables outils éducatifs que sont les jeux ! Créateurs de jeux, parents d'élèves et professeurs des écoles se sont retrouvés à Montigny-lès-Metz, dans les locaux de l'ÉSPÉ. La régionale Lorraine de l'APMEP s'est fortement impliquée dans ces journées.

Dans son édition du 25 mai dernier, le Républicain Lorrain publiait tout un dossier intitulé « L'école joue le jeu ». Nous en avons extrait l'article ci-dessous, qui illustre les propositions de deux de nos militantes APMEP, que vous avez déjà rencontrées dans notre précédent Petit Vert.

Des dominos pour travailler les additions

Odile aime les Sudokus. Marie-Jo est plutôt espace. Toutes deux ont été professeurs de maths et ont toujours été adeptes du jeu pour apprendre. L'une habite dans les Vosges, à la frontière de la Meurthe-et-Moselle, l'autre à Metz. « *On a exercé en lycée professionnel. Fallait trouver des trucs* ». Ensemble, elles ont créé une quarantaine de jeux, « *certains fabriqués, d'autres détournés* », et elles écument les écoles. « *On intervient beaucoup en primaire ; cinq à six séances en règle générale. Mais on va aussi auprès des anciens, car nos jeux s'utilisent de la maternelle à la maison de retraite* ». Après leur passage, certains professeurs des écoles prolongent et reprennent la méthode à leur compte. D'autres pas. Au moins, Odile et Marie-Jo auront planté leurs petites graines.

Odile et Marie-Jo ont créé ou détourné une quarantaine de jeux, histoire de faire des maths en s'amusant. Les professeurs des écoles ont pu trouver des pistes pour approcher différemment cette matière. Photo RL

« *Avec les Sudokus, il y a de la logique. On peut trouver le résultat par le raisonnement. La logique peut être innée, mais pour les autres, elle s'acquiert en s'entrainant. Et jouer, c'est le meilleur entrainement qui soit* ».

Les deux amies s'amusent à détourner les dominos pour travailler les additions. Les cubes de Marie-Jo lui permettent de travailler les volumes, les plans, les formes dans l'espace. « *Les jeunes manipulent en même temps qu'ils réfléchissent. Ils prennent le temps. Peuvent se tromper et recommencer. C'est ça, jouer* ».

La totalité du dossier publié par le Républicain Lorrain :
http://www.republicain-lorrain.fr/education/2017/05/25/l-ecole-joue-le-jeu

L'APMEP impliquée

Le mercredi après midi, des membres du comité de la régionale ont animé deux ateliers permettant à des professeurs des écoles d'aborder l'utilisation en classe des polyominos (des monominos aux pentaminos) et de découvrir des puzzles géométriques quadrillés tels le « Puzzle à trois pièces » ou le « Carré de Metz ». Ce fut aussi pour ces enseignants un premier contact avec notre association.

Le jeudi, des classes sont venues faire des mathématiques en jouant. Le matin, cinq plages d'atelier ont accueilli des élèves de moyenne section et grande section de maternelle, l'après-midi, c'était au tour de trois groupes de CE2-CM1.

Voir aussi le coin jeux de la régionale.

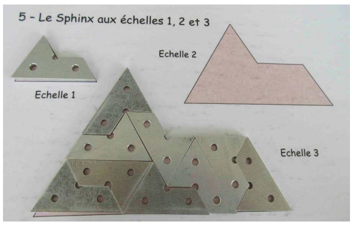
retour au sommaire

À ÉPINAL, AU CONGRÈS DE LA COPIRÉLEM

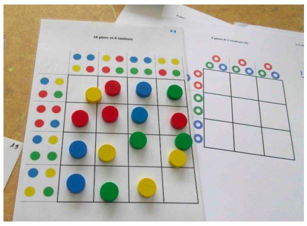
Intervenant dans la formation des enseignants du premier degré, les 180 participants de ce congrès ont réfléchi à propos de ce que « manipuler, représenter, communiquer » pouvait apporter à l'enseignement des mathématiques.

Nos brochures et les « jeux de l'APMEP » étaient présents. Des adhérents de la régionale ont été impliqués dans une communication et l'animation d'ateliers. L'un deux évoquait l'utilisation des puzzles géométriques de la maternelle au CM2.

Un jeu de « Trio » géant à l'entrée du site

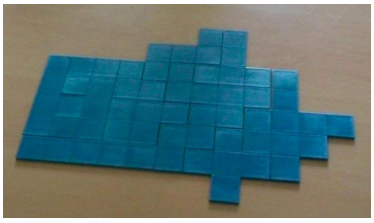


Réussite à un des stands de notre exposition régionale

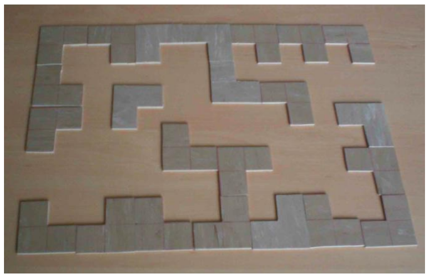


Des compléments qu'il faudra présenter dans un futur Petit Vert.

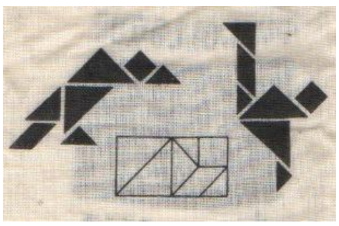
Temps d'appropriation des pièces des puzzles

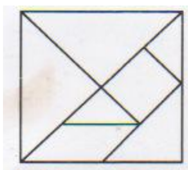


Un dauphin ?

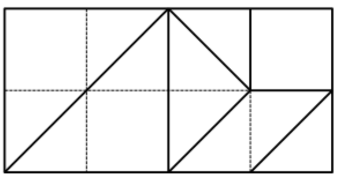


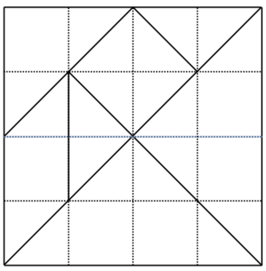
Une utilisation de la communication à propos des labyrinthes : un « Laby-L »





Chaque participant avait dans sa mallette un Tangram en bois. La disposition des pièces dessinées sur le petit sac de tissu est différente de celle de la feuille d'accompagnement.





Le second type de quadrillage est fréquemment utilisé en cycle 3. Le premier ne mériterait-il pas d'avoir également sa chance ? Ne semble-t-il pas plus facile à utiliser ?

retour au sommaire

APMEP & CASNAV-CAREP

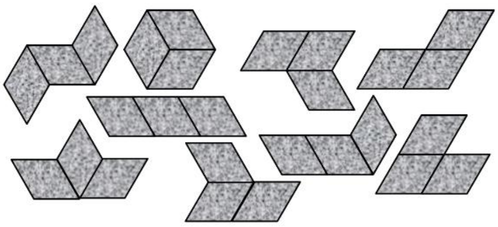
http://www4.ac-nancy-metz.fr/casnav-carep/spip/spip.php?rubrique126

Cinq jeux mathématiques bilingues en douze langues : albanais, allemand, anglais, arabe, arménien, croate, espagnol, italien, portugais, roumain, russe et serbe.
Ces jeux mathématiques ont été créés par l'APMEP.
Les traductions et les adaptations de ces jeux pour une utilisation par des élèves allophones ont été réalisées par le CASNAV-CAREP de l'académie de Nancy-Metz.

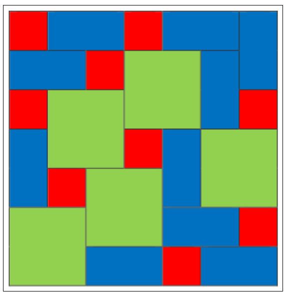
Nos propositions « Losanges », « Trilosanges », « Combis », « Sphinx », « Carrés de Mac Mahon » ont été adaptées pour être directement utilisées par des élèves allophones qui passent un tiers de leur temps de classe en activités autonomes. Ces jeux peuvent être utilisés avec tous les élèves : ils leur permettront de manipuler des objets pour acquérir ou réinvestir des notions mathématiques et seront aussi l'occasion d'un premier contact avec des langues étrangères qui ne nous sont pas toujours familières.

Les cinq jeux sélectionnés par le CASNAV :

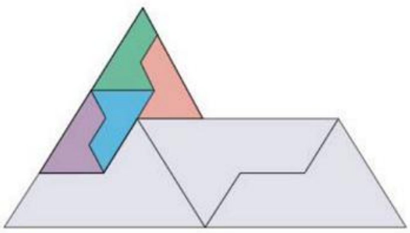
Losanges



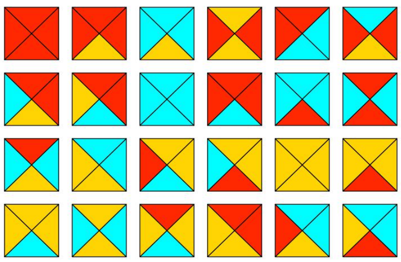
Trilosanges



Combis



Sphinx



Carrés de Mac Mahon

VIE DE LA RÉGIONALE

RÉUNION DE LA COMMISSION LYCÉE, 30 JUIN 2017

Dix personnes ont participé activement aux échanges. Les discussions ont commencé par un rappel du fonctionnement et de l'importance de la commission lycée de l'APMEP.

Rentrée 2017

Nouveaux programmes de Seconde

Évaluation par compétences

Il est clairement mentionné que l'objectif du programme est de former les élèves pour leur faire acquérir les compétences suivantes :
- chercher, expérimenter – en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique…), changer de registre ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer oralement une démarche.

Il est aussi demandé une plus grande transversalité des compétences.
La mise en œuvre possible d'une évaluation par compétences soulève une certaine inquiétude. Une clarification des points suivants serait la bienvenue :
- La définition d'une compétence semble différer d'un professeur à l'autre, d'une discipline à l'autre. Sa différence avec un savoir-faire, une technique, est souvent floue.
- Les professeurs de lycée ont besoin d'une (in)formation sur les compétences qui sont évaluées et sur le contrat d'évaluation à passer avec l'élève, sur l'information à transmettre aux parents, qui n'ont pas de familiarité avec ce mode de fonctionnement, et à l'institution.
- Le collège a mis en œuvre l'évaluation par compétences : la publication d'un bilan sur les améliorations liées à cette mise en œuvre (suivi des indicateurs, progrès observés chez les élèves, vécu des professeurs, parents, élèves,….) pourrait guider les professeurs dans l'acquisition de cette pratique.
- Le relevé des acquis au bac semble encore très anecdotique dans son réinvestissement en classe de terminale.
- La cohabitation entre une évaluation chiffrée et une évaluation par compétences ne semble pas évidente à gérer.
- Plusieurs compétences sont parfois nécessaires dans une même question ; il n'est pas facile de les distinguer lors de l'évaluation.

Les écueils envisagés sont de différents ordres :
- Mettre une note n'est pas toujours évident : sur Pronote, les compétences sont évaluées suivant des niveaux.
- Actuellement le système de compensation des notes permet d'obtenir un bac S avec un niveau de mathématiques très faible. Une meilleure prise en compte des compétences permettra-t-elle de recentrer sur les matières importantes de telle ou telle filière ?
- Les bons élèves veulent des notes sur 20. Ce système d'évaluation ne risque-t-il pas de relativiser les résultats des élèves les plus performants ? Est-il uniquement dédié aux élèves en difficulté ?
- Les élèves ne connaissent pas toujours les compétences évaluées, ils pensent souvent qu'ils sont évalués sur des connaissances ou des « techniques » vues en cours.
- Peut-on valider une compétence de façon « définitive » , alors qu'une compétence peut être acquise seulement dans certaines situations ?
- Faut-il supprimer les notes ? Peut-on se limiter à une note chiffrée par trimestre ?

retour au sommaire

Sur les contenus

- En géométrie dans l'espace, il est demandé d'« entretenir » les connaissances concernant le repérage sur la sphère (cela annonce-t-il un retour des coordonnées polaires ?).
- Les transformations (symétrie, translation, homothétie et rotation) sont étudiées en collège, la translation étant introduite à l'aide du parallélogramme.
- Le calcul numérique figure dans le programme de seconde ; le calcul sur les fractions et les puissances est travaillé en collège, mais seule la définition de la racine carrée d'un réel positif est connue (les règles de calcul avec des racines carrées ne sont plus au programme du collège : elles seront introduites en seconde).
- Les fonctions, linéaires et affines et autres, sont étudiées au collège ; les notions d'image et d'antécédent sont connues mais doivent être revues en seconde.
- La définition de vecteur est modifiée, les fonctions homographiques disparaissent.
- L'arrivée de la notion de « fonction » en algorithmique et la grande hétérogénéité attendue chez les élèves de troisième soulèvent de nouvelles appréhensions dans le traitement de la partie « Algorithmique et programmation » du programme de seconde.

À propos du travail en classe

- La découverte des nouvelles notions par des situations problèmes n'apparait pas suffisamment tôt (c'est dommage ! Les élèves y ont été confrontés de la maternelle au CM2) et les élèves arrivant en lycée ont des difficultés à s'y mettre, pourtant cette approche donne du sens aux notions étudiées.
- Lors de la résolution de problèmes, les élèves sont freinés par les difficultés techniques (calcul numérique, factorisations, recherche de dérivées ou de primitives).
- Au-delà des différences dans les niveaux d'acquisition des élèves, on peut aussi distinguer deux stratégies d'apprentissage : d'une part, des élèves studieux et laborieux essaient d'appliquer des procédures expérimentées en cours et, d'autre part, des élèves qui aiment s'engager pour résoudre des problèmes sont capables de prendre des initiatives. Ces profils différents induisent la nécessité de personnaliser le travail et de pratiquer une différenciation active, entravée par le contenu des attendus en fin de lycée et par les possibilités restreintes d'organisation pédagogique, notamment la conception des espaces de travail et des effectifs, dissuasifs pour une réelle évolution des pratiques.

Conclusion

La mise en œuvre de nouvelles pratiques (évaluation par compétences) ou les modifications de programmes doivent être pensées avec une plus grande implication des partenaires (et en particulier des enseignants qui sont directement en contact avec les public concerné). De plus, des moyens doivent être déployés pour permettre une meilleure efficacité lors de la mise en œuvre : il faudra davantage communiquer avec les élèves sur leur évaluation ; des effectifs réduits sont donc souhaitables.

Sujets du bac

Filière ES

<u>Exercice 1</u> L'expression « <u>Au plus</u> 90% des clients du magasin sont satisfaits » est déroutante pour les élèves : comment penser à l'intervalle de fluctuation ?

<u>Exercice 2 (Spé)</u> La suite n'est définie qu'à partir de $n=1$. L 'expression de a(n), donnée dans l'énoncé, n'a été trouvée que par une portion congrue d'élève ; certains se sont contentés d'écrire la formule (avec un exposant $n - 1$) et n'ont pas su poursuivre le calcul. On trouve même des suspicions d'erreur d'énoncé dans certaines copies.

retour au sommaire

Exercice 4 L'utilisation de la loi de Benford a perturbé les élèves. Dans la question 2a, on attendait la détermination d'un intervalle de fluctuation ; les élèves, en l'absence d'indication, ont parfois simplement comparé des fréquences et sont passés à côté de la prise d'initiative. Ce fut un exercice difficile à corriger (probablement du fait de l'impression d'inachevé de l'énoncé). Les attentes ont été très différentes d'un correcteur à l'autre et il est à craindre une forte dispersion sur la notation de cet exercice.

Conclusion Le sujet est déroutant pour des élèves de terminale ES et les écarts de notations pourraient être importants en fonction des correcteurs.

Filière S

Le sujet est conforme aux attentes d'un candidat en section scientifique.

Exercice 1 Pas de difficulté particulière, mais comprendre le rôle d'un algorithme ne parait pas simple !

Exercice 2 Beaucoup d'élèves sont gênés par les difficultés de calcul (en particulier calcul de la distance) et par la présence de deux paramètres même lorsque la démarche de résolution est à peu près comprise.

Exercice 3 Assez bien réussi, cependant l'interprétation du résultat obtenu pour $P(M < 0)$ n'est pas évidente : on attendait une référence au modèle utilisé, la question aurait pu être rédigée de façon plus explicite (le résultat obtenu permet-il de conforter le modèle choisi ?).

Exercice 4 Des confusions sur les noms des évènements.

Conclusion La formulation de certaines questions n'est pas assez précise au vu des réponses de certains candidats. La consigne « interpréter » est souvent trop floue au regard des productions des élèves par rapport à l'attendu du corrigé. Certains candidats se fourvoient dans des explications trop longues au vu de ce qui est effectivement valorisé ; même si de nombreuses consignes de correction vont dans le sens d'une bonification des réponses bien rédigées. Certains sujets (voir GEPI) sont plus clairs quant aux attendus du concepteur en matérialisant les espaces nécessaires aux réponses des questions.

Filière STI2D

Les personnes présentes n'avaient pas approfondi le sujet. On note tout de même la présence d'un exercice de Vrai-Faux avec justification, relativement novateur puisqu'il n'est apparu que dans les sujets de rattrapage.

Filière STMG

Le sujet est conforme aux attentes des professeurs ; même si l'ensemble du programme n'est pas couvert par le sujet (pas d'intervalle de fluctuations, de fonctions rationnelles).

Conclusion

C'est le sujet du BAC ES qui pose le plus de questions et qui risque de ne pas permettre d'évaluer correctement les capacités des élèves.

Bac 2018

On a pu relever, dans les différents établissements, beaucoup d'appréhension des professeurs de Sciences quant à la gestion des calculatrices « mode examen » : fourniture, consignes de surveillance, méthodes de fraude présentes sur Internet...

REMISES DES PRIX DU RALLYE

Au lycée Fabert de Metz (extraits du Républicain Lorrain du 17 juin)

Fabert a la bosse des maths

108 classes de seconde et 115 classes de troisième des collèges et lycée lorrains ont participé à l'édition 2017 du rallye mathématique proposé par l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public de Lorraine).
Le concept est original : la classe doit s'organiser, se répartir les tâches, échanger, discuter les points de vue, par équipe et en temps limité, les dix problèmes proposés sous forme d'énigmes ou bien de jeux.

Deux classes au top

Sept classes de seconde du lycée Fabert de Metz ont pris le départ du rallye cette année. Deux classes se sont distinguées et ont bien réussi leur rallye : la seconde 8, qui se classe 3e, et la seconde 3, qui se classe 4e.
MM. Nicolas, proviseur adjoint du lycée Fabert, Thierry Ketty, conseiller principal d'éducation et Julien Remier, professeur de mathématiques, ont félicité les gagnants et ont procédé à la remise des récompenses, en présence de Michel Perreux, président de la FCPE, et Michel Rolland, président de l'Association indépendante des parents d'élèves.
Les associations des parents d'élèves et le lycée Fabert ont offert à chaque élève un calendrier mathématique, avec un énigme à résoudre pour chaque jour de l'année.
M. Michel Ruiba, vice président de l'APMEP de Lorraine, et Mme Backscheider ont, quant à eux, remis des puzzles de la ville de Metz.

Note de la rédaction du Petit Vert : le journaliste a manifestement confondu le « puzzle de Metz » (qui avait été créé par la régionale à l'occasion des journées nationales APMEP de 2012) avec un hypothétique puzzle de la ville de Metz... dont nous n'avons jamais entendu parler !

Au lycée Georges de la Tour de Metz

La classe de 2nde 4 décroche la première place des lycées.

retour au sommaire

Mme Aubertin, proviseure adjointe, a félicité la classe pour sa belle performance mais aussi pour la manière dont elle a été obtenue, la collaboration. Un autre élève (à droite sur la photo) a été congratulé pour sa réussite aux Olympiades mathématiques.
Chaque élève a reçu un diplôme nominatif, un puzzle « carré de Metz » (qui a eu un succès immédiat). Un convivial goûter a été offert par l'établissement.

Au lycée Tessier de Bitche

Ce mardi 30 mai, les élèves de 2nde 1 du lycée Teyssier de Bitche ont été récompensés pour leur classement honorable (*ndlr - seconds sur 108*) au rallye des mathématiques de l'académie de Nancy-Metz. Ce rallye s'est déroulé le vendredi 31 mars sous forme de différents problèmes à résoudre, auxquels tous les élèves de la classe ont réfléchi ensemble. Grâce à leur entraide, ils ont réussi à se classer 2e de l'académie. Un diplôme a été remis à chacun d'eux par M. MULLER Pierre-Alain, représentant de l'association des professeurs de mathématiques, ainsi qu'un casse-tête : le carré de Metz ! Et, exposant sur le quotient, euh…, cerise sur le gâteau, ils ont pu profiter d'un gouter offert par l'établissement : de quoi les motiver à faire aussi bien, si ce n'est mieux, l'année prochaine !!!

Compte rendu écrit par C. BOUCHELET, classe de 2nde 1,
publié dans le journal du lycée.

La classe de 2nde 1 du lycée Teyssier. À gauche, Pierre-Alain, le « père » du rallye.

Au collège Nelson Mandela de Verny

Mme Lavallée, principale, et son adjoint, Denis Scheune, ont félicité les quatre classes de troisième de l'établissement ainsi que leurs professeurs pour leur implication au rallye.
La 3B s'est classée seconde et celle de 3C cinquième.
Un goûter a été offert par l'établissement et les élèves de la 3B ont reçu les traditionnels diplôme et puzzle « le carré de Metz ».

retour au sommaire

RALLYE MATHEMATIQUE 2017 - HUMOUR

Une sélection de quelques-unes des réponses fournies par les élèves...
(cliquez ici pour retrouver les énoncés et les solutions sur notre site).

Exercice 4

Réponse des élèves : « *L'énoncé pouvait laisser croire que l'on pouvait utiliser plusieurs fois les mêmes chiffres* ».

8	1	6
3		6
4	8	3

Un peu de mauvaise foi !

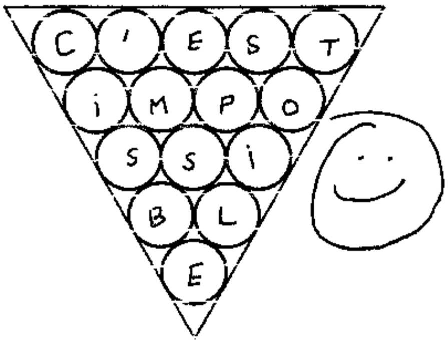
Z	O	N
O		O
N	O	Z

Exercice 4 encore : « *La question était "Sauriez-vous trouver ce mot de passe ?". La réponse est NON* ».

Réponse logique à la question !

Exercice 10

Un peu d'humour, ça ne fait pas de mal !



Question subsidiaire

« *On sait que la 1ère bougie met 5 heures à se consumer, or l'info sur les bougies de durée de trois heures est un leurre pour détourner et déconcentrer. On sait que l'électricité est revenue lorsque la tige de la bougie était cinq fois plus grande qu'au début (bougie de durée cinq heures) donc on sait qu'elle s'est consumée entièrement, donc la panne a duré 5 heures, 300 minutes et 18000 secondes* ».

Au moins, on sait que ces élèves savent convertir les heures en minutes et en secondes !

Encore la question subsidiaire

« *La réponse est : 156 minutes et 19 secondes. J'ai testé la longueur initiale de la bougie. J'ai ensuite calculé le facteur* $\frac{\text{longueur bougie A}}{\text{longueur bougie B}}$ *selon des intervalles de temps réguliers pour ensuite trouver le nombre d'heures, de minutes puis de secondes et en utilisant des fractions de x jusqu'à trouver la seconde par calcul et hypothéticodéduction* ».

Il y avait au moins un hypothéticodéducteur dans cette classe. Il semblerait qu'il soit le seul, car le début de son raisonnement commence par « *J'ai testé...* » puis « *J'ai ensuite...* ».

retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

C'ÉTAIT IL Y A 25 ANS, DANS LE PETIT VERT N°31

UNE CLASSE VERTE EN TERMINALE C

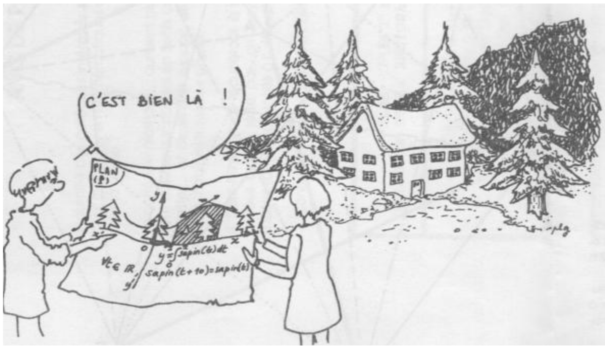
Pourquoi les classes transplantées seraient-elles réservées aux élèves du primaire ? Pourquoi réviser tout seul dans sa chambre plutôt qu'à plusieurs avec des professeurs sous ta main ? Pourquoi l'échéance du bac interdirait-elle de grimper aux arbres ?

En réponse à ces questions, les deux classes de terminale C du Lycée de Rombas se sont permis un long week-end « révision scientifique » dans une colonie de vacances vosgienne, à Yvoux, en compagnie de leurs professeurs de mathématiques et de physique, de leurs livres, de leurs annales, de leurs calculatrices, et aussi ... de cartes de tarot, de raquettes de ping-pong, de guitares, d'un stock d'histoires drôles...

Bilan de l'opération :
- un travail de révision conséquent et sans doute efficace car la situation était fort propice au travail de groupe et à l'intervention différenciée ;
- un moment agréable, un rythme de vie alternant les exercices, le ping-pong, le volley, le tarot, la cuisine... ;
- une ambiance favorisant les échanges détendus entre les participants, permettant aux élèves de voir leurs professeurs sous un autre "jour", et aux professeurs de découvrir les "talents" cachés de leurs élèves.

Bref, une véritable réussite, à reconduire...

Pol le Gall et Daniel Vagost, Lycée de Rombas



UN CALENDRIER DE TOURNOI

Dans un tournoi, chaque équipe rencontre successivement chacune des autres. Établir un « calendrier », c'est prévoir les différentes rencontres qui auront lieu à chaque « journée » du tournoi.
Par exemple, pour quatre équipes (A, B, C et D), on peut prévoir que :
- la première journée A jouera contre B, et C contre D,
- la seconde journée A contre C, et B contre D,
- la troisième journée A contre D et B contre C.
(...)

Le problème consiste à savoir comment élaborer un calendrier pour $n = 2k$ équipes. Il ne sera pas résolu ici dans sa généralité. Quelques indications cependant :
- pour quatre équipes, le calendrier est unique (à une permutation près des « noms » des équipes). La façon la plus simple de s'en persuader est d'observer la description du calendrier sous forme de graphe, en le « lisant » comme étant un tétraèdre.
- pour six équipes, il existe 6 calendriers différents (toujours à une permutation près des « noms » des équipes). Et pour 8 équipes, 120 calendriers différents !
(...)

Claude Pagano, La Seyne-sur-mer

Pour en savoir plus, télécharger le Petit Vert n°31, où vous trouverez les solutions de ce problème : http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=petitvert&page=archive_pv

retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

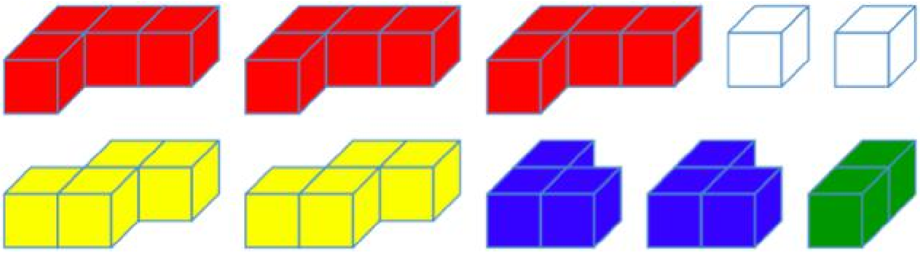
DES DÉFIS EN CLASSE DE CE2

François Drouin

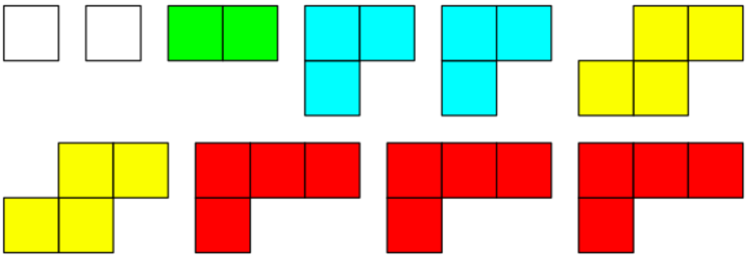
Pendant la semaine des mathématiques 2017, les « défis pour de jeunes élèves » proposés dans le Petit Vert n°129 (pages 64 et 65) ont été mis en œuvre avec des élèves de CE2 d'un cours double.

Le TBI a été utilisé pour présenter les pièces utilisées ainsi que le lien avec celles de la pyramide aztèque utilisée en même temps par les élèves de CM1 de la classe.

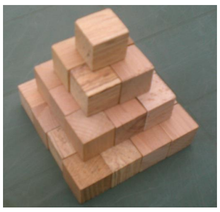
Les pièces de la pyramide aztèque



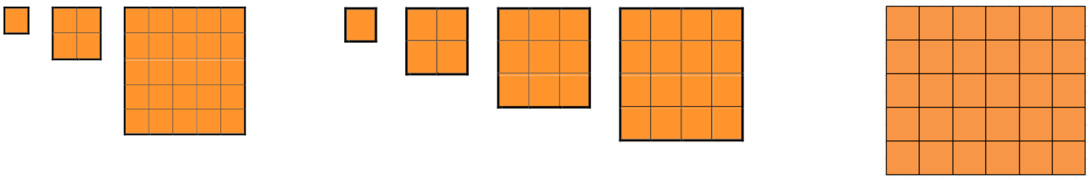
Les pièces du puzzle aztèque



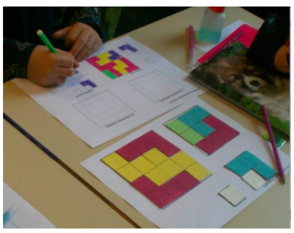
Le nombre de carrés (CE2) et de cubes (CM1) utilisés a été demandé. Les élèves de CE2 en sont restés à un comptage un par un.



Un élève de CM1 a déterminé le nombre de petits cubes en utilisant une photo de la pyramide réalisée (le dénombrement a été correctement fait étage par étage).
Un autre élève a regroupé chaque pièce bleue avec une pièce blanche pour finalement repérer 7 regroupements de 4 cubes (4 carrés pour les pièces des CE2). Le total de 30 a été obtenu en tenant compte de la pièce verte.
Les élèves de CE2 n'ayant pas encore travaillé sur la notion d'aire d'un rectangle, ils n'ont pas su trouver la largeur et la longueur de rectangles pouvant être construits avec 30 carrés.



Les trois défis ont été présentés à l'aide du TBI. Chaque figure à obtenir a été l'occasion de revenir sur le dénombrement des carrés en utilisant les nombres de colonnes et de lignes. Des multiplications ont été utilisées.



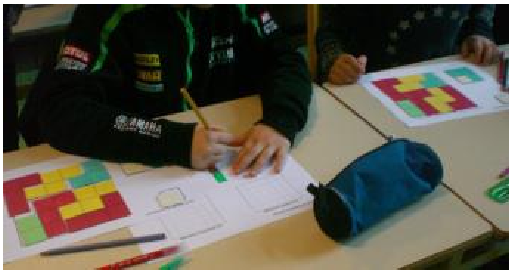
Chaque élève avait à da disposition des pièces en carton peint et des feuilles présentant les formes à recouvrir aux dimensions des pièces. Ils devaient reproduire ce qu'ils avaient trouvé sur une feuille « recueil de solutions ». Le travail s'est fait individuellement, les solutions trouvées ont été comparées avec celles du voisin.

retour au sommaire

L'objectif de la séance était de voir comment les élèves manipulent pour résoudre les défis proposés et comment les solutions trouvées sont recopiées dans le quadrillage de la feuille solution.

Il n'a pas été utile de préciser que les pièces pouvaient être retournées. Il n'y a pas eu d'erreurs dans les dessins des solutions. Les élèves commençaient le plus souvent par le coloriage des zones rouges puis continuaient couleur par couleur. L'utilisation du quadrillage de la feuille solution était une réactivation de tâches abordées dans les classes précédentes.
Les coloriages auraient pu être validés par l'élève voisin.

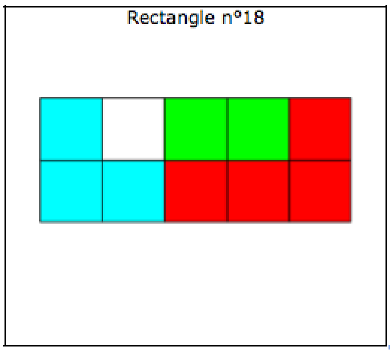
Concernant les deux premiers défis, les élèves commençaient à placer les pièces les plus grandes et se trouvaient bloqués. En aide, il leur a été dit de commencer par les plus petites : ils ont alors tous réussi. Il serait intéressant de tester l'activité en classe de CE1.

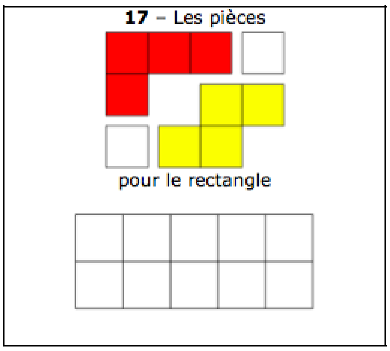


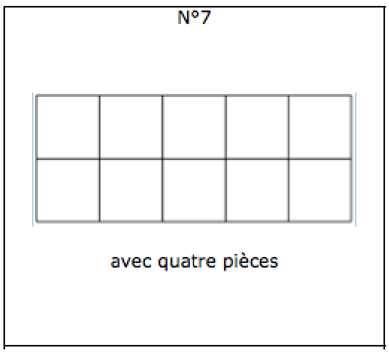
Deux recouvrements différents étaient demandés pour le rectangle. Pour le deuxième, les pièces de même couleur ne devaient pas se toucher. Tous les élèves ont réussi le premier, seuls les plus rapides ont abordé le second. Une élève a eu le temps de trouver un placement avec des pièces ne se touchant que par des sommets. La recherche sera poursuivie plus tard.

Deux autres propositions d'utilisation des pièces
L'activité a duré un plus d'une heure. Avec plus de temps, elle aurait pu être précédée d'un moment de jeu libre avec les pièces. Les réalisations des élèves auraient être prises en photo, puis montrées à des élèves de cycle 1 pour qu'ils les reconstruisent.

Rechercher le plus possible de recouvrements de rectangles formés de 10 carrés, 12 carrés, 15 carrés, etc. Les découvertes des élèves pourront servir à créer des jeux de cartes « défis ».







La carte de gauche est extraite d'un jeu imaginé pour des élèves de moyenne section de maternelle. Au besoin, un rectangle à l'échelle des pièces sera proposé à recouvrir.
La carte centrale est extraite d'un jeu imaginé pour des élèves un peu plus âgés. Les pièces doivent être reconnues et leur assemblage doit être retrouvé. En aide, le rectangle évoqué précédemment sera utilisé.
La carte de droite est extraite d'un jeu de cartes imaginé pour des élèves en début de cycle 2. Des décompositions additives du nombre 10 permettent de retrouver les pièces éventuellement utilisées. Voici un exemple : « 3 + 3 + 4 = 10 », je peux donc essayer avec deux pièces bleues et une pièce jaune ou deux pièces bleues et une pièce rouge.

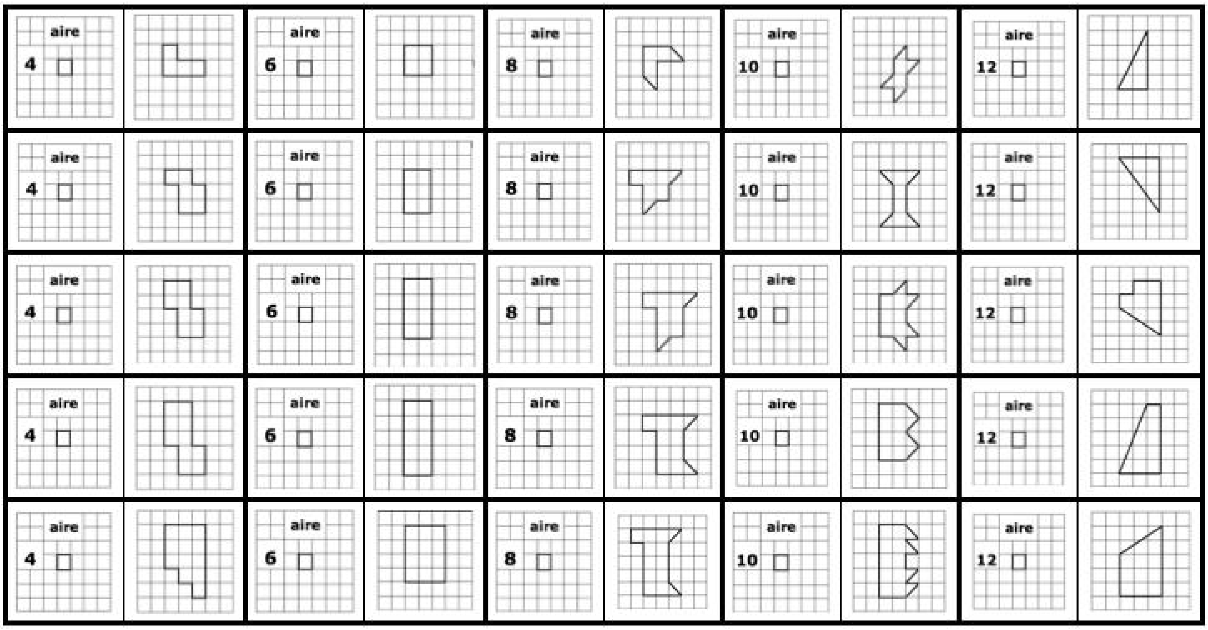
retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

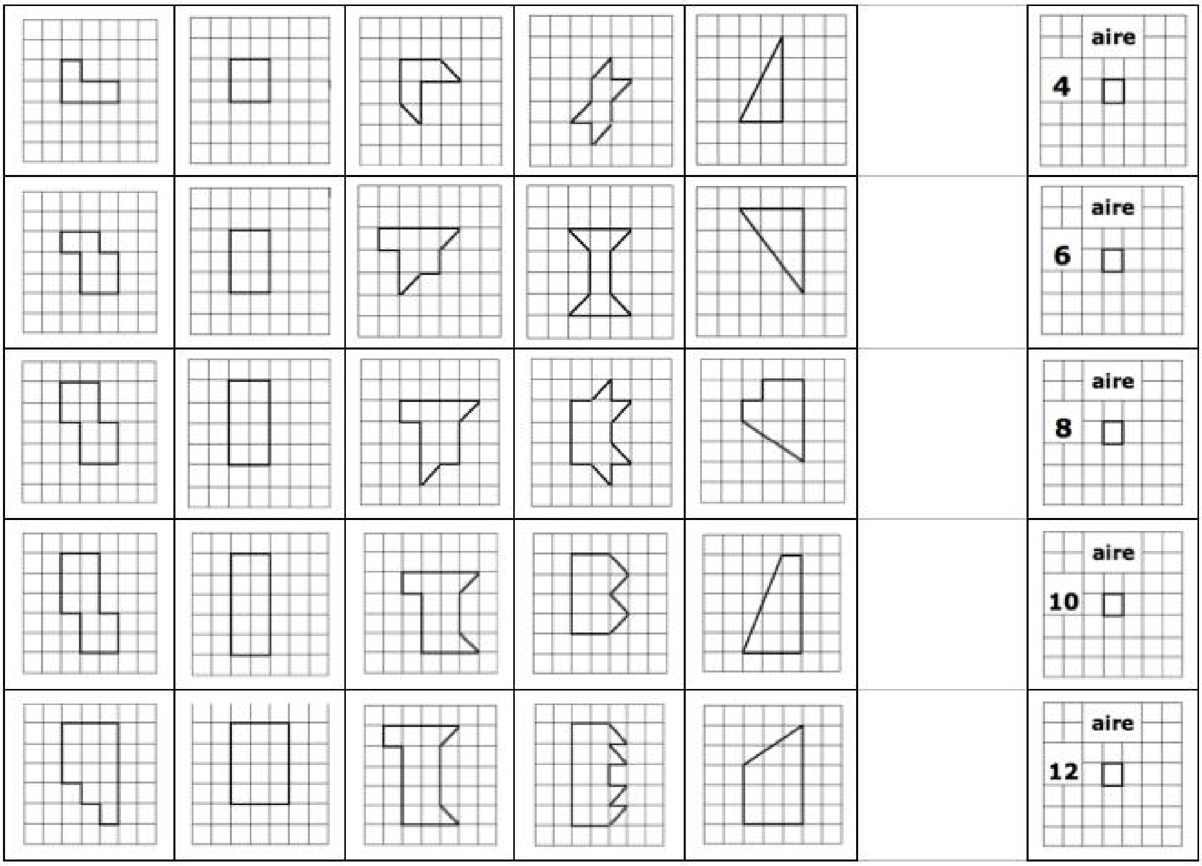
DOMINOS ET AIRES À PARTIR DU CM2

Par François Drouin

Le jeu à dupliquer en agrandissant



Des carrés à utiliser en préalable



retour au sommaire

Ce jeu a été mis en œuvre en 2012 dans une classe de CM2 meusienne en suivant le même protocole que celui décrit dans le PV130.

À propos de sa mise en œuvre en 2012 dans une classe de CM2 meusienne

La règle du jeu et le protocole utilisé sont décrits dans le Petit Vert n°130 (à partir de la page 14). Le tableau de la page précédente a été présenté en utilisant le TBI de la salle de classe (les groupes de deux élèves ont ensuite travaillé sur une version papier) . En prenant un plus de temps, il aurait été intéressant de faire découper les 30 carrés et faire rechercher les familles de polygones de même aire. Cette piste de travail est évoquée dans la brochure « Des tableaux et des jeux numériques – APMEP Lorraine 2009 ».

- L'enseignant

Voici des polygones. Dans la colonne de droites des mesures d'aires sont indiquées. Nous allons en effet travailler à propos des aires de ces polygones. Mais que pourrait-on faire d'autre à propos de ces polygones ?

- Les élèves

Trouver leur périmètre, les dessiner.

- Remarque

N'ont été abordées ni la recherche d'éléments de symétrie, ni la possibilité de reproduire « en plus grand » ces polygones. Ceci pourra être fait à un autre moment.

En classe

Concernant l'aire des rectangles, l'utilisation d'une formule est tout de suite mise en avant. Pour les autres polygones, des dénombrements de carreaux sont privilégiés. Il y a eu des difficultés pour mettre en œuvre le fait que l'aire de deux demis carreaux est égale à l'aire d'un carreau, des procédures de découpage et réassemblage sont a priori mises en œuvre. Des difficultés sont apparues pour ce qui relèverait de l'aire d'un triangle rectangle. La perception « moitié de l'aire d'un rectangle » n'est pas immédiate. En 2012, l'aire d'un triangle rectangle était au programme de CM2, une formule « coté × hauteur » a été mise en avant. Un élève perçoit que la hauteur du triangle rectangle peut être son « côté vertical ». Une intervention de l'enseignant a été nécessaire pour clarifier chez les élèves la notion de hauteur d'un triangle rectangle.

Dans le temps de synthèse, les élèves sont venus expliquer leurs méthodes de calcul de l'aire des polygones en utilisant les possibilités offertes par le TBI. Lorsque cela a été possible, la mise en parallèle de méthodes différentes a été favorisée (les élèves ont su mettre en avant des méthodes de découpage des polygones ou des méthodes de « rangement » du polygone dans un rectangle).

Travail par deux

Les élèves ont indiqué sur la feuille de papier l'aire de chaque polygone (l'unité d'aire est expliquée par l'enseignant). La colonne de droite indiquant les mesures d'aire des polygones, l'enseignant a précisé que chaque mesure d'aire indiquée correspondait à des familles comprenant le même nombre de polygones. Ceci a permis de découvrir deux erreurs dans le jeu proposé et non encore testé (ces erreurs ont été corrigées dans le jeu reproduit dans ce Petit Vert).

La feuille papier avec les mesures des aires des polygones trouvées par les élèves est restée disponible comme feuille de vérification lors de l'utilisation du jeu de dominos.

DANS NOS CLASSES

DU PÉRIMÈTRE D'UN CERCLE À LA VITESSE EN SIXIÈME

par Valérian Sauton,
collège Raymond Poincaré à Bar-le-Duc

Travail préliminaire : Très tôt dans l'année j'ai commencé des problèmes de proportionnalité et ensuite de pourcentages. La plupart des élèves de mes deux classes sont maintenant habitués à manipuler les tableaux de proportionnalité en passant d'une ligne à l'autre en multipliant ou divisant (souvent avec un retour à l'unité).

Objectifs de la séance

A : Développer l'esprit d'initiative, de recherche avec un problème ouvert.

B : Travailler la notion de proportionnalité.

C : Utiliser l'algorithmique au service de la résolution de problème.

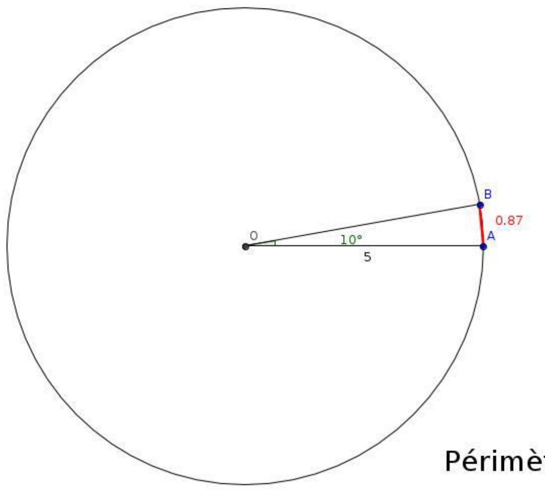
D : Introduire la formule de la longueur d'un cercle.

Mise en situation de la séance

- Première phase

Les élèves sont installés dans une disposition traditionnelle sur table. Je leur demande de chercher individuellement comment on pourrait calculer le périmètre d'un cercle.

Lors de la mise en commun un élève propose cette piste :



On trace un cercle de rayon 5 cm.
On place un point B tel que AÔB = 10°.
On mesure [AB] et on multiplie par 36 pour obtenir le périmètre.

Périmètre = 36×0.87=31.38

- Deuxième phase Par groupes de 4 ou 5, les élèves explorent cette idée avec différentes valeurs de mesure du rayon du cercle.
- Troisième phase en classe entière. Nous regroupons les calculs des périmètres avec des rayons différents dans un tableau et nous constatons qu'à peu de choses près il s'agit d'un tableau de proportionnalité. Les élèves formulent l'hypothèse suivante :« le périmètre du cercle est 6 fois plus grand que le rayon ».

  Je leur affirme qu'en fait, avec des mesures très précises, les mathématiciens ont trouvé que c'était environ 6,28 (je n'ai toujours pas parlé de Pi et hésite encore à le faire).

retour au sommaire

- Quatrième phase
  Sachant comment calculer une valeur approchée du périmètre d'un cercle, avec la méthode précédente, je leur demande dans quelles situations on pourrait être amené à utiliser cette formule.

Voici les propositions des élèves suivies de leur exploitation dans des exercices (cf. annexes) :

- calculer le périmètre d'une piste d'athlétisme :
  je propose un exercice portant sur l'entraînement d'un coureur ;
- construire une tour circulaire de château :
  il s'agit de calculer le nombre de pierres nécessaires à la réalisation de cette tour ;
- calculer le périmètre d'une roue de vélo, de voiture :
  nous travaillons sur les mesures des pneus (annexe 1) et un exercice sur le rouleau de scotch pour les plus rapides.

Séance suivante

Défi : Déterminer les périmètres de 160 pneus dont les caractéristiques sont données.
Répartis en groupes, les élèves devaient trouver le plus de périmètres possibles !
Rapidement les élèves ont bien compris la démarche algorithmique.

Remarques

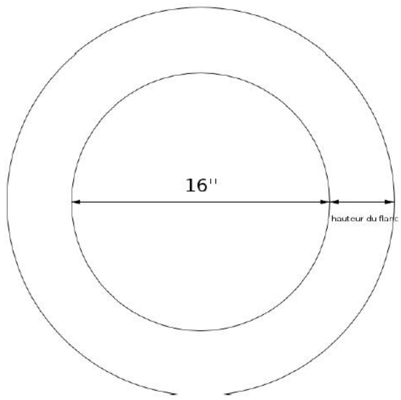
Il m'a fallu donner quelques coups de pouces de temps en temps bien sûr, notamment au sujet des pneus, afin d'expliquer qu'après un tour de roue la voiture a avancé d'une distance égale au périmètre de la roue.

Les exercices sur les vitesses et le tour de stade ont été assez facilement réalisés après avoir montré un exemple. Beaucoup me disaient "Monsieur, on n'a pas vu les vitesses. (Dans le programme 2015 du cycle 3, on peut lire : *Proportionnalité : Reconnaitre et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée. Par exemple, situations permettant une rencontre avec des échelles, des vitesses constantes*…). Il m'a suffi de leur demander "qu'est-ce que ça veut dire courir à 12 km/h ?" pour avoir en réponse "en une heure on court 12 km", faire un tableau de proportionnalité distance (km)/temps (min) et entendre des "aaaah c'est facile en fait". Ces exercices m'ont permis aussi de travailler la division en convertissant des durées de minutes en jours-heures-minutes.

Annexe 1

Une histoire de pneus

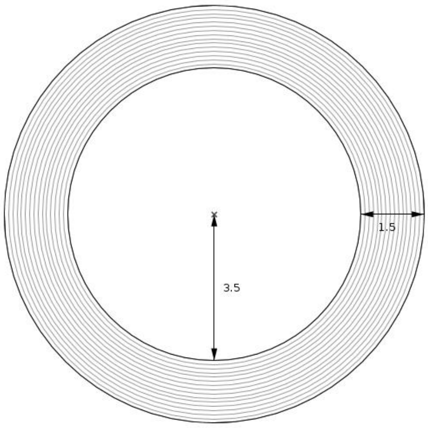
La voiture de Laure est équipée de pneus 205 55 R 16 91 V
Le premier nombre indique la largeur, en millimètres de ses pneus.
Le deuxième indique la hauteur du flanc du pneu par rapport à la largeur. Ici la hauteur du pneu est égale à 55% de la largeur du pneu.
Le diamètre intérieur du pneu est donné par le nombre 16, exprimé en pouces.
Indication : 1 pouce = 2,54 cm



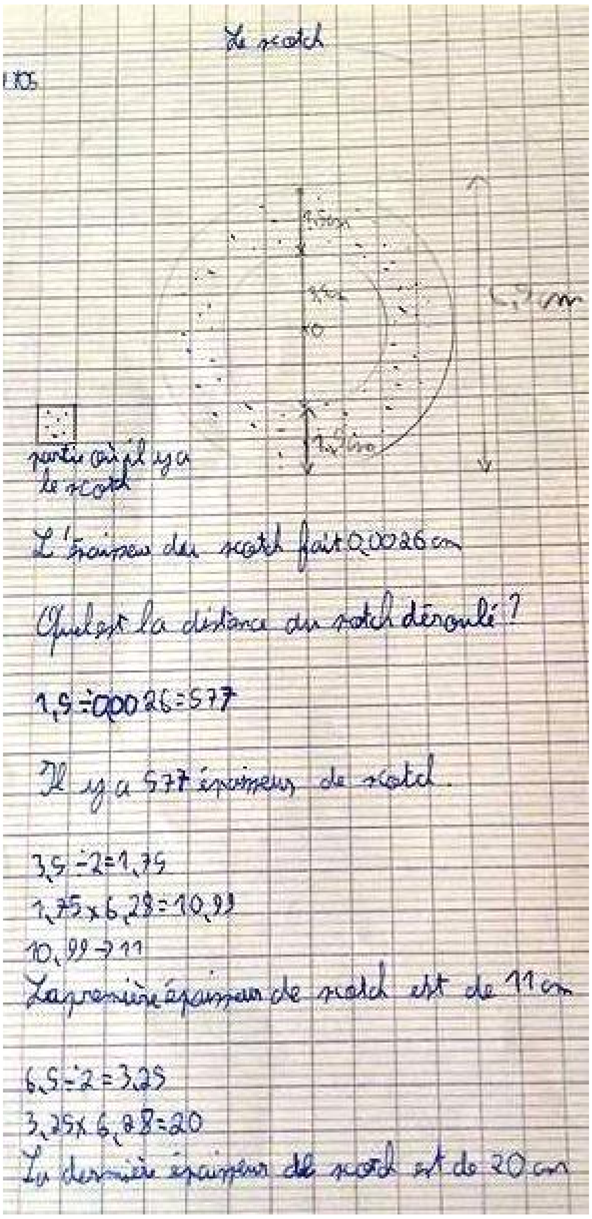
1. Calculer le périmètre des pneus de la voiture.
2. Si ses roues font 10 tours complets, de quelle distance a-t-elle avancé ?
3. Si elle roule à 50 km/h, combien de tours fait sa roue en une minute ?
4. Pendant les vacances, Laure se rend à Toulouse pour rendre visite à sa famille. Elle effectue le trajet depuis Bar-le-Duc avec une étape à Limoges pour une séance de natation. Elle part de Bar-le-Duc à 6h22 et arrive à Limoges à 11h03. Elle repart de Limoges à 14h34 et roule 2h51 avant d'arriver dans la ville rose, distante de 290 km. Combien de tours ses roues ont-elles fait sur l'ensemble du trajet ?

retour au sommaire

Les plus rapides ont eu droit à un exercice sur le scotch ! Connaissant l'épaisseur du film, le diamètre du rouleau vide et l'épaisseur totale de film, calculer la longueur totale du scotch !



Proposition d'élève :



Le scotch

partie où il y a le scotch

L'épaisseur du scotch fait 0,0026 cm

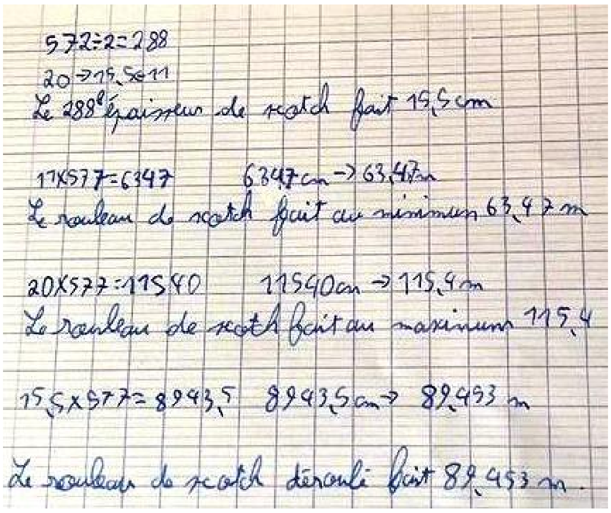
Quelle est la distance du scotch déroulé ?

1,5 ÷ 0,0026 = 577

Il y a 577 épaisseurs de scotch.

3,5 ÷ 2 = 1,75
1,75 x 6,28 = 10,99
10,99 → 11
La première épaisseur de scotch est de 11 cm

6,5 ÷ 2 = 3,25
3,25 x 6,28 = 20
La dernière épaisseur de scotch est de 20 cm



577 ÷ 2 = 288
20 → 15,5 ← 11
La 288e épaisseur de scotch fait 15,5 cm

11 x 577 = 6347 6347 cm → 63,47 m
Le rouleau de scotch fait au minimum 63,47 m

20 x 577 = 11540 11540 cm → 115,4 m
Le rouleau de scotch fait au maximum 115,4

15,5 x 577 = 8943,5 8943,5 cm → 89,435 m

Le rouleau de scotch déroulé fait 89,435 m.

Annexe 2

Exercice n° 1

On cherche à calculer le périmètre de tous les pneus suivants :

1. 205/45 R 14	33. 205/45 R 15	65. 205/45 R 16	97. 205/45 R 17	129. 205/45 R 18
2. 205/50 R 14	34. 205/50 R 15	66. 205/50 R 16	98. 205/50 R 17	130. 205/50 R 18
3. 205/55 R 14	35. 205/55 R 15	67. 205/55 R 16	99. 205/55 R 17	131. 205/55 R 18
4. 205/60 R 14	36. 205/60 R 15	68. 205/60 R 16	100. 205/60 R 17	132. 205/60 R 18
5. 205/65 R 14	37. 205/65 R 15	69. 205/65 R 16	101. 205/65 R 17	133. 205/65 R 18
6. 205/70 R 14	38. 205/70 R 15	70. 205/70 R 16	102. 205/70 R 17	134. 205/70 R 18
7. 205/75 R 14	39. 205/75 R 15	71. 205/75 R 16	103. 205/75 R 17	135. 205/75 R 18
8. 205/80 R 14	40. 205/80 R 15	72. 205/80 R 16	104. 205/80 R 17	136. 205/80 R 18
9. 210/45 R 14	41. 210/45 R 15	73. 210/45 R 16	105. 210/45 R 17	137. 210/45 R 18
10. 210/50 R 14	42. 210/50 R 15	74. 210/50 R 16	106. 210/50 R 17	138. 210/50 R 18
11. 210/55 R 14	43. 210/55 R 15	75. 210/55 R 16	107. 210/55 R 17	139. 210/55 R 18
12. 210/60 R 14	44. 210/60 R 15	76. 210/60 R 16	108. 210/60 R 17	140. 210/60 R 18
13. 210/65 R 14	45. 210/65 R 15	77. 210/65 R 16	109. 210/65 R 17	141. 210/65 R 18
14. 210/70 R 14	46. 210/70 R 15	78. 210/70 R 16	110. 210/70 R 17	142. 210/70 R 18
15. 210/75 R 14	47. 210/75 R 15	79. 210/75 R 16	111. 210/75 R 17	143. 210/75 R 18
16. 210/80 R 14	48. 210/80 R 15	80. 210/80 R 16	112. 210/80 R 17	144. 210/80 R 18
17. 215/45 R 14	49. 215/45 R 15	81. 215/45 R 16	113. 215/45 R 17	145. 215/45 R 18
18. 215/50 R 14	50. 215/50 R 15	82. 215/50 R 16	114. 215/50 R 17	146. 215/50 R 18
19. 215/55 R 14	51. 215/55 R 15	83. 215/55 R 16	115. 215/55 R 17	147. 215/55 R 18
20. 215/60 R 14	52. 215/60 R 15	84. 215/60 R 16	116. 215/60 R 17	148. 215/60 R 18
21. 215/65 R 14	53. 215/65 R 15	85. 215/65 R 16	117. 215/65 R 17	149. 215/65 R 18
22. 215/70 R 14	54. 215/70 R 15	86. 215/70 R 16	118. 215/70 R 17	150. 215/70 R 18
23. 215/75 R 14	55. 215/75 R 15	87. 215/75 R 16	119. 215/75 R 17	151. 215/75 R 18
24. 215/80 R 14	56. 215/80 R 15	88. 215/80 R 16	120. 215/80 R 17	152. 215/80 R 18
25. 220/45 R 14	57. 220/45 R 15	89. 220/45 R 16	121. 220/45 R 17	153. 220/45 R 18
26. 220/50 R 14	58. 220/50 R 15	90. 220/50 R 16	122. 220/50 R 17	154. 220/50 R 18
27. 220/55 R 14	59. 220/55 R 15	91. 220/55 R 16	123. 220/55 R 17	155. 220/55 R 18
28. 220/60 R 14	60. 220/60 R 15	92. 220/60 R 16	124. 220/60 R 17	156. 220/60 R 18
29. 220/65 R 14	61. 220/65 R 15	93. 220/65 R 16	125. 220/65 R 17	157. 220/65 R 18
30. 220/70 R 14	62. 220/70 R 15	94. 220/70 R 16	126. 220/70 R 17	158. 220/70 R 18
31. 220/75 R 14	63. 220/75 R 15	95. 220/75 R 16	127. 220/75 R 17	159. 220/75 R 18
32. 220/80 R 14	64. 220/80 R 15	96. 220/80 R 16	128. 220/80 R 17	160. 220/80 R 18

Je sais comment calculer le périmètre de chacun de ces pneus, j'ai une . . . .

Le faire pour tous ces pneus est, par contre, très . . . .

J'ai une vie à côté et n'ai pas des heures à perdre.

Je vais donc utiliser un . . . .

Pour cela je dois bien identifier toutes les . . . . de mon raisonnement.

retour au sommaire

Exercice n° 2 – Un exemple d'algorithme

Variables

largeur : *l'utilisateur indique dans cette variable la largeur du pneu, en millimètres*

pourcentage_hauteur : *l'utilisateur indique dans cette variable le pourcentage*

diamètre_intérieur : *l'utilisateur indique dans cette variable le diamètre intérieur, en pouces*

diamètre_roue : *pour l'instant on n'y touche pas*

hauteur_flanc : *pour l'instant on n'y touche pas*

périmètre_roue : *pour l'instant on n'y touche pas*

D'abord je convertis la . . . . en centimètres à l'aide du calcul : largeur = ... ÷ . . . .

Ensuite je calcule la . . . . à l'aide de la formule :

hauteur_flanc = (largeur÷ . . . .)× . . . .

Puis je calcule le diamètre de la roue en utilisant la formule :

diamètre = ... +2× . . . .

Finalement je calcule le périmètre de la roue en utilisant la formule

. . . . = ...

× . . . .

Exercice n° 3 – Scratch

retour au sommaire

SEMAINE DES MATHS À SARREBOURG

Stéphanie Waehren nous relate ici son expérience relative aux énigmes que la rédaction du Petit Vert avait proposées dans son n°129 de mars dernier.

Mise en place

Lors de la semaine des maths, les élèves du collège Messmer de Sarrebourg ont été informés par les enseignants ou par voie d'affichage que des défis (1 par jour) seraient proposés sous le préau. Les réponses étaient attendues sous forme d'un papier accompagné du nom du ou des participants, à déposer dans une urne avant 17h le jour même.
Nous avions déjà proposé des énigmes deux ans plus tôt, et avions laissé jusqu'à midi le lendemain (énigmes déposées également sur Pronote et dont la lecture est possible par la famille).
Nous voulions éviter cette fois trop de réponses données par les parents (surtout éviter l'utilisation intensive d'internet, notamment pour les anagrammes).
Des récompenses étaient attribuées aux deux meilleures réponses du jour.

Choix des énigmes

Comme les élèves avaient peu de temps, nous avions choisi des énigmes qui ne demandaient pas un investissement trop important. Ci-dessous, les défis retenus et le nombre de réponses reçues.

Lundi	Annagrammes	8 réponses
Mardi	Shadoks	20 réponses
Mercredi	De klääne Griene	6 réponses
Jeudi	Poète et géomètre : Eugène Guillevic	9 réponses
Vendredi	Braille	4 réponses

Le nombre de réponses ne tient pas compte du fait que, souvent, les élèves s'étaient en fait mis par deux pour chercher. Souvent déçus par la participation assez faible en apparence, nous avons, cependant, constaté que beaucoup d'élèves lisaient quand même les énigmes et commençaient à les chercher dans les couloirs. Certains n'ont pas rendu le fruit de leurs recherches (souvent des 6èmes), probablement parce qu'elles n'étaient pas assez « abouties » à leur goût.
Il faut préciser que même les ébauches de solution ont été prises en compte.

Amélioration possible de l'activité

Un système de distribution des énigmes format papier peut aussi être envisagé (pour éviter que les élèves n'aient à recopier, notamment les mots de l'énigme « anagrammes »).
Un peu de publicité en amont dans les classes permettrait peut-être de toucher un plus grand nombre d'élèves. Une annonce avait été postée dans l'hebdo du collège, mais n'avait pas forcément été lue à temps.

Conclusion

Cette action a permis aux élèves de travailler différemment : en groupe, dans la cour, en utilisant leurs compétences dans la langue française, et sans le jugement du groupe classe.
C'est une opération que j'espère renouveler l'an prochain, d'autant que la lecture des solutions est agréable, les réponses sont parfois accompagnées de dessins géométriques et peuvent se révéler surprenantes.

Les prix qui furent distribués étaient des casse-têtes en bois achetés pour une somme modique sur internet et qui sont très appréciés des élèves. Des portes-clé à Led ont permis de varier les prix pour deux élèves qui ont été primés deux fois.

retour au sommaire

*** Les énigmes proposées ***

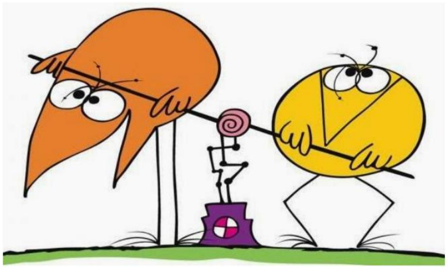
L'énigme du lundi

Anagrammes
Tout le monde connait les anagrammes : des mots qui s'écrivent avaec les mêmes lettres, comme par exemple « chien » et « niche », « utile » et « tuile », … Voici une liste de termes, sauriez-vous en donner des angrammes qui soient des termes mathématiques ?
Récent ; rétine ; linge ; rempiéter, pari, intégral ; piton ; sorti ; méditera ; larguer ; mômes ; glacèrent ; taperez ; pacsée ; fronçait ; égalons ; réunifier ; résumé.
(on ne tiendra pas compte d'éventuelles différences d'accents).

Les gagnants avaient toutes les bonnes réponses. Pour les départager, nous avons pris en compte l'orthographe et la présentation.

L'énigme du mardi

Shadocks
Pour compter, les Shadocks ne disposent que de quatre chiffres : GA (qui correspond au zéro), BU (un), ZO (deux) et MEU (trois).
On compte ainsi : GA, BU, ZO, MEU, BUGA, BUBU, BUZO, BUMEU, ZOGA, etc.
En numération Schadock, combien y a-t-il d'élèves dans ta classe ? Et comment s'écrit 2017 ?



Aucun élève n'a correctement interprété l'énoncé et trouvé comment écrire en base 4, mis à part un élève qui n'est pas allé au bout de sa réflexion, mais a approché l'idée de l'écriture en base 4. Il a été le seul récompensé.
La plupart des élèves s'étaient contentés d'écrire chaque chiffre de 2017 sous forme Shadock dans un mélange de méthodes positionnelle et additive.

L'exemple de Bérénice : GA=0, BU=1, ZO=2, MEU=3 , BUGA=10 (et non 4), BUBU=11 (et non 5) et ainsi de suite d'où l'écriture erronée de 2017 = ZOGA (BUGA + MEU+ MEU + BU) qui traduit 2017 = 2 0 (10 + 6 + 6 + 1).

L'énigme du mercredi

De kläane Griene
Francis hadd 830g Mähl un 720g Zugga.
Er baggt ä Kuche.
Fer dene Kuche broucht ma so vill Zugga wie Mälh.
Er hadd donn noch 250g Zugga iwerich.
Konn er donn noch Ponnekuche mache, fer die 350g Mähll netig sin ?

La barrière de la langue a été un vrai frein dans une région où l'on pratique de moins en moins le patois local. Peu d'élèves ont cherché de l'aide auprès de collègues pour obtenir une traduction.
Un élève méritant a répondu en patois, mais n'a, hélas, pas effectué la bonne opération. Le duo gagnant était composé d'élèves de 5ème qui ont répondu de façon complète en français.

retour au sommaire

L'énigme du jeudi

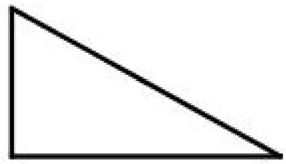
Eugène Guillevic est un poète français, né en 1907 et mort en 1997. Il a l'art de rendre fériques les objets. Dans un recueil intitulé « Euclidiennes » (1967), il décrit des objets géométriques. En voici deux exemples. À vous d'en proposer d'autres...

Perpendiculaire :

Facile à dire
Que je tombe à pic.
Mais c'est aussi sur moi
Que l'autre tombe à pic.

Triangle rectangle :

J'ai fermé l'angle droit
Qui souffrait d'être ouvert
En grand sur l'aventure.
Je suis une demeure
Où rêver est de droit.



C'est le défi qui a donné les réponses les plus réjouissantes, du fait de la grande variété de solutions possibles et du penchant que ces élèves ont pour la poésie.

En voici une de Nathanaël (5ème) :

Pavé droit
Souffrait d'être comparé
Aux pierres qui couvraient la chaussée
Mais lorsqu'on est un pavé,
On a comme seul droit,
Celui d'être marché dessus.

Et le poème de Nathan (4ème) :

Nous nous suivons
A travers l'espace.
Reliant les étoiles comme de simples points.
A nous regarder à l'infini.
Et jamais on ne se croisera
Toujours à la même distance.
Mais nous ne sommes qu'en papier.
L'univers n'est pas pour nous.
Nous nous limitons à cette feuille.

(poème accompagné du tracé de deux droites parallèles qui traversent la page de part en part)

Celui de Maryne :

<u>Cercle</u>
Je suis une prison,
où est enfermé mon centre.
Et partout il rayonne,
cherchant une corde,
pour arquer mon arc,
mais il n'en trouvera point.

Encore un poème de Nathanaël :

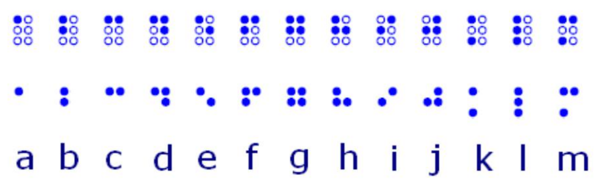
<u>Triangle quelconque</u>
Triangle quelconque
souffrait d'être oublié de tout le monde.
Pourtant il avait de belles arêtes blondes.
Mais qui pense à vous lorsque vous êtes quelconque ?

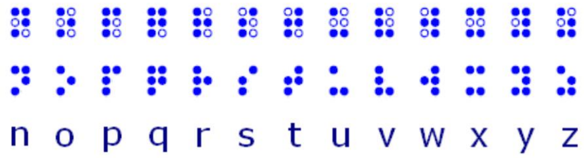
L'énigme du vendredi

En braille standard, un caractère est représenté dans une matrice de six points sur deux colonnes, chaque caractère étant formé par un à six points en relief.
A gauche, voici cet alphabet (pour les caractères de "a" à "z").

Outre ces 26 caractères, il en existe d'autres permettant de coder les lettres accentuées, etc. Combien de caractères en tout peut-on coder ?

Parmi les lettres de notre alphabet, combien sont codées par un caractère à 1 point ? à 2 points ? à 3 points ? … à 6 points ?





Nous avons obtenu peu de réponses, notamment en raison du nombre important de classes qui n’avaient pas cours le vendredi après-midi.
Cette énigme s’adressait aussi davantage à des élèves de troisième qui semblaient peu motivés dans l’ensemble par le principe des énigmes.

Les élèves n’ont pas répondu pas à la question « Combien de caractères en tout peut-on coder ? ». Ils ont compris la question ainsi : « Combien de caractères est-il utile de coder ? » et ont recensé les lettres accentuées qui n’apparaissaient pas dans l’alphabet présenté.

retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

UNE SÉANCE DE JEUX EN SECONDE

Céline Boudin

Résumé : Le Petit Vert donne la parole à Céline Boudin, jeune professeure de mathématiques. Elle nous relate une séance qu'elle a mise en œuvre dans sa classe de seconde l'an dernier alors qu'elle était professeure stagiaire. Il s'agit d'un travail par groupes autour de trois jeux mathématiques. Dans cet article, le jeu « du pouilleux » est présenté de façon détaillée en annexe, les deux autres jeux seront bientôt téléchargeables sur notre site.

Présentation de la séance

En concevant cette séance, je voulais faire travailler les élèves en autonomie, repérer leurs points forts/faibles en les observant, aider individuellement les élèves en difficulté, le tout lors une séance qui sorte de l'ordinaire.

Il s'agissait de revoir plusieurs notions de collège (géométrie plane, racines carrées, fonction affine) ainsi que les notions abordées dans les chapitres précédents (fonctions, repères et coordonnées, vecteurs, géométrie dans l'espace).

J'ai choisi d'organiser des ateliers tournants autour de trois jeux : Le Pouilleux, décrit en annexe, Trifonc et Vectominos. J'ai conçu moi-même toutes les questions des cartes du Pouilleux et extrait les deux autres jeux du site de l'IREM de Caen http://www.math.unicaen.fr/irem/j2m/ .

J'ai constitué sept groupes de quatre personnes et deux groupes de trois. Je me suis arrangée pour avoir des groupes homogènes dans leur ensemble avec une ou deux personnes ayant un bon voire très bon niveau, une personne possédant niveau moyen et/ou une personne ayant des difficultés.

Voici comment j'ai imaginé ma séance :

- cinq à dix minutes d'installation des élèves et d'explications ;
- trois ateliers tournants, chacun durant dix minutes environ ;
- cinq minutes pour le rangement de la salle.

Sur chaque îlot, chaque groupe d'élèves disposera d'un jeu de cartes, du règlement du jeu, des trousses et calculatrices, d'une feuille de brouillon sur laquelle je demande d'écrire les noms, tous les détails des calculs effectués, ainsi qu'une note sur cinq s'ils ont aimé ou non le jeu.

Déroulement

La sonnerie retentit à 16h00. Les élèves attendent rangés devant la porte de la salle. Je leur demande de se placer au fond de la salle afin que je puisse indiquer leur place respective. Une fois tout le monde installé, j'explique le déroulement de la séance et lance le début du premier roulement.

Je passe dans les rangs afin de m'assurer que les élèves comprennent les règles du jeu. Je remarque alors que les parties des jeux du Pouilleux et des Vectominos sont lancées rapidement alors que le jeu Trifonc a nécessité un peu plus d'explications. Les élèves sont dans l'ensemble motivés et même très excités de jouer. Ma petite victoire personnelle a été de voir les élèves en difficulté, ceux qui ne sont jamais volontaires, participer aux jeux de manière active voire même de gagner des parties. Le temps défilant à toute allure, je n'ai pensé qu'à faire le second roulement au bout d'un quart d'heure. Les élèves jouant au Pouilleux se sont déplacés aux ateliers du jeu Trifonc, ceux jouant au Trifonc se sont déplacés aux ateliers des Vectominos et les trois derniers groupes se sont dirigés vers le Pouilleux. La mise en route a été plus rapide que la première fois, les élèves étant fort curieux de découvrir le nouveau jeu devant eux. Au bout de dix minutes, je remarque qu'il ne reste qu'un petit quart d'heure avant la fin de la séance. Je décide donc de les laisser jouer encore cinq bonnes minutes avant de tout ranger. Ensuite, je leur explique que pendant le temps qui reste avant la fin de l'heure, je veux que chaque groupe compte les cartes des jeux afin de vérifier qu'il n'en manque aucune et de les ranger dans les enveloppes que je leur fournis. Je leur dis également que je ramasse toutes les feuilles de brouillon et qu'il faut remettre les tables à leur place initiale.

retour au sommaire

16h53 : toute la salle est rangée correctement, les feuilles de brouillon et les jeux sont sur mon bureau, et tous les élèves sont prêts à partir. Il ne reste que deux minutes avant la fin de l'heure, je décide donc de les laisser sortir.

Analyse à posteriori

Après le déroulement de cette séance, voici d'abord quelques remarques en vrac.

- Dans la salle, il y avait un vidéoprojecteur mais pas d'ordinateur : je n'ai pas pu projeter le plan de la classe. J'ai donc dû placer les élèves moi-même un par un, ce qui nous a fait perdre du temps.
- La salle étant exiguë, lors du roulement les élèves se marchaient dessus pour changer de pôle d'activité. Il y a eu également un problème de place : sur les deux îlots de trois places, il manquait une chaise pour les groupes de quatre élèves.
- Je n'ai eu le temps de faire que deux ateliers tournant sur les trois, peut-être à cause d'une mauvaise organisation de la séance.
- Cette heure de cours a été mon premier travail de groupes en classe entière, elle a donc été un peu trop bruyante à mon goût. Les élèves ne sachant pas chuchoter et excités comme ils étaient (à fond dans les jeux), ils parlaient fort.

Cependant, je suis satisfaite de ma séance.

- Les élèves révisaient les notions abordées depuis le début d'année tout en s'amusant.
- Les élèves en difficulté et/ou discrets pendant les cours ont été volontaires et actifs pendant les jeux.
- Malgré le brouhaha général, il y a eu une très bonne ambiance dans la classe.
- En passant dans les rangs, j'ai pu aider individuellement les élèves en difficulté.

Si je devais réitérer cette séance, voici ce que je modifierais :

- Le jeu du Pouilleux (54 cartes : 27 questions mathématiques) possède trop de cartes. En effet, j'ai remarqué qu'en quinze minutes, personne n'avait découvert le Pouilleux. Les élèves avaient trop de cartes dans les mains, trop de calculs à effectuer. Je pense qu'en séparant le jeu en deux (26 cartes : 13 questions mathématiques), les élèves auraient le temps de faire au moins une partie.
- J'effectuerais les ateliers tournants d'une autre manière. En effet, faire déplacer les élèves d'une activité à une autre, dans une salle étroite, crée trop de bazar.
- J'essaierais de disposer d'une plage de 2h ou je me limiterais au jeu du Pouilleux en 1h.
- La prochaine fois, je déplacerai plutôt les jeux de cartes.
- Il faudrait également trouver un moyen de faire baisser le bruit ambiant.

Dans l'ensemble, malgré le temps important de préparation, j'ai passé un super moment avec mes élèves. Je les ai vus motivés tout au long de la séance. En fin d'heure, plusieurs m'ont demandé si on pouvait refaire une séance comme celle-ci.

Je leur avais demandé de noter sur leur feuille de brouillon s'ils avaient aimé ou non les jeux (0/5 = « j'ai détesté le jeu » ; 5/5 = « j'ai adoré le jeu »). Tout le monde n'a pas donné son avis, mais voici les résultats de ceux qui ont répondu à la question : le Pouilleux a obtenu une note moyenne de 3,2/5 (quatorze notes dont quatre « 5/5 ») ; le Trifonc 3,8/5 (huit notes dont deux « 5/5 ») et le Vectominos une moyenne de 2,8/5 (huit notes).

retour au sommaire

Annexe : Présentation du jeu « Le Pouilleux

Matériel

54 cartes allant par paires, contenant les unes, des questions, les autres, les réponses correspondantes. On retire une question, la réponse correspondante sera le pouilleux.

But

Se débarrasser de toutes ses cartes.

Nombre de joueurs : 4

Déroulement d'une partie

Les cartes sont réparties entre les joueurs.

Chaque joueur pose devant lui les paires qu'il possède en lisant la question et la réponse correspondante. Les autres doivent valider.
Ensuite, à tour de rôle, chaque joueur tire une carte du jeu de son voisin de droite.
S'il peut faire une paire, il pose les cartes et lit.

Sinon il présente ses cartes à son voisin de gauche et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule carte : celle du « Pouilleux ».

Celui qui la possède a… perdu !

Les 54 cartes

$\sqrt{(36 \times 49)}$	42	$\sqrt{72}$	$9\sqrt{2}$
$5\sqrt{18} - 3\sqrt{8}$	$6\sqrt{2}$	$(3\sqrt{5})^2$	45

retour au sommaire

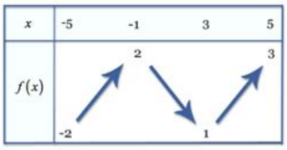
<table>
<tr>
<td>

$(3+\sqrt{5})^2$

</td>
<td>

3

</td>
<td>

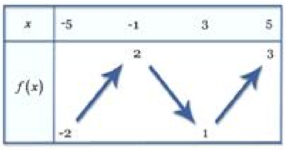


Combien $\frac{3}{2}$ a-t-il d'antécédents ?

</td>
<td>

$14 + 6\sqrt{5}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

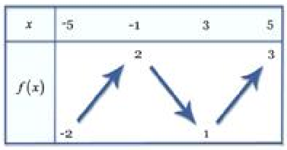


Le minimum de *f* sur [-5 ; 5] est ...

</td>
<td>

1

</td>
<td>

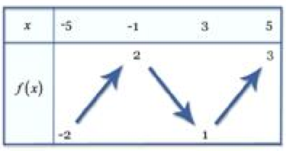


Le maximum de *f* sur [-5 ; 3] est ...

</td>
<td>

Non monotone

</td>
</tr>
<tr>
<td>

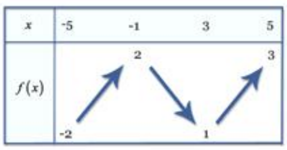


Sur [-5 ; 5], la fonction *f* est ...

</td>
<td>

2

</td>
<td>

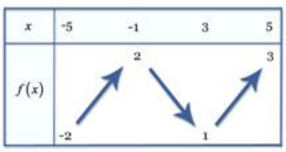


Sur [-1 ; 3], la fonction *f* est ...

</td>
<td>

Décroissante

</td>
</tr>
<tr>
<td>



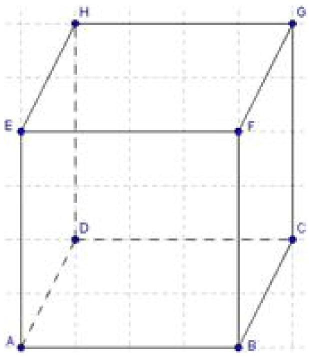
Sur [-3 ; 5], la fonction *f* est ...

</td>
<td>

$4\sqrt{2}$

</td>
<td>

ABCDEFGH est un cube de côté 4 cm



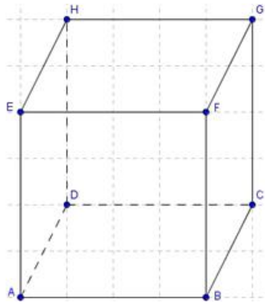
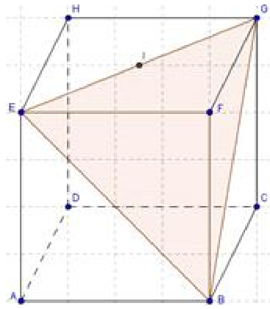
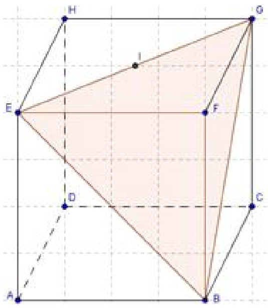
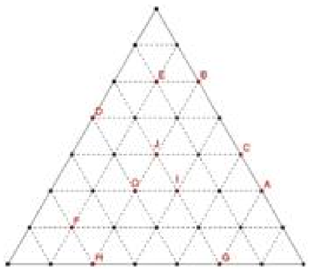
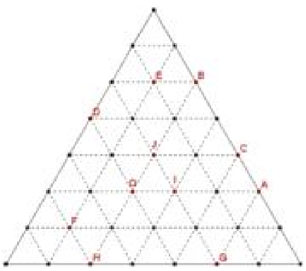
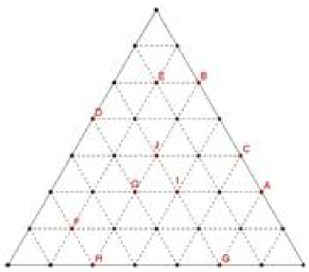
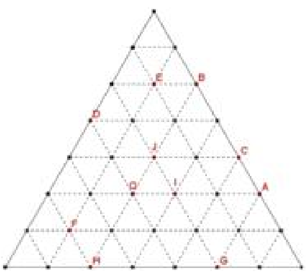
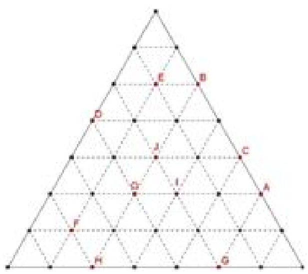
AF = ... cm

</td>
<td>

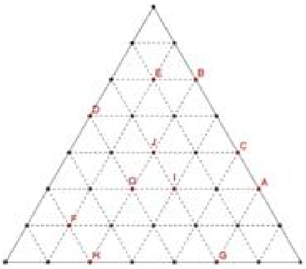
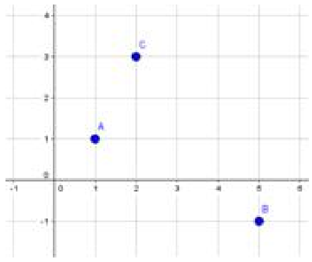
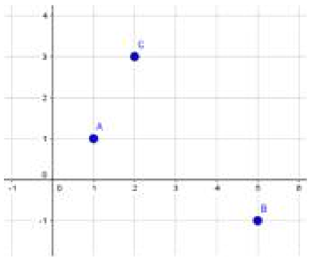
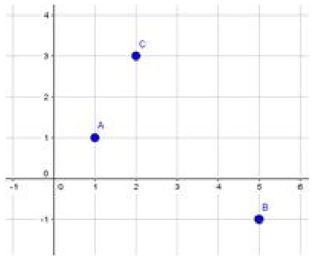
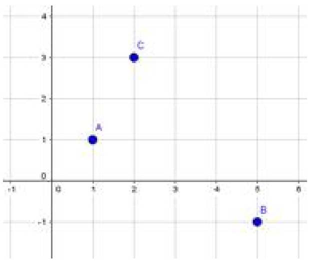
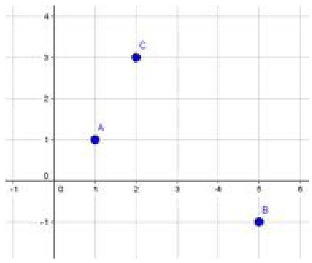
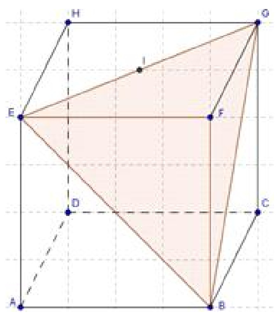
Croissante

</td>
</tr>
</table>

retour au sommaire

ABCDEFGH est un cube de côté 4 cm  L'aire du triangle EFB est égale à … cm²	**8**	ABCDEFGH est un cube de côté 4 cm  On note I le milieu de [EG], BI = … cm	$\frac{32}{3}$
ABCDEFGH est un cube de côté 4 cm  L'aire du triangle EBG est égale à … cm²	$\mathbf{8\sqrt{3}}$	Dans le repère (O ; I ; J),  Les coordonnées du point B sont …	**(2 ; 1)**
Dans le repère (O ; I ; J),  Les coordonnées du point C sont …	**(0 ; 3)**	Dans le repère (O ; I ; J),  Les coordonnées du point D sont …	**(-2 ; 2)**
Dans le repère (O ; I ; J),  Les coordonnées du milieu de [AG] sont …	**(0 ; -1)**	Dans le repère (O ; I ; J),  Les coordonnées du milieu de [OH] sont …	**(3 ; -1)**

retour au sommaire

Dans le repère (O ; I ; J),  Les coordonnées du milieu de [EF] sont ...	**(-1 ; 1)**	On considère les points A(1;1), B(5;-1) et C(2;3)  Les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme sont ...	**$2\sqrt{5}$**
On considère les points A(1;1), B(5;-1) et C(2;3)  AB = ... cm	**(6 ; 1)**	On considère les points A(1;1), B(5;-1) et C(2;3)  BC = ... cm	**5**
On considère les points A(1;1), B(5;-1) et C(2;3)  Les coordonnées du point D tel que ADBC soit un parallélogramme sont	**$\sqrt{5}$**	On considère les points A(1;1), B(5;-1) et C(2;3)  AC = ... cm	**(4 ; -3)**
$2\sqrt{6}$	ABCDEFGH est un cube de côté 3 cm  On note I le milieu de [EG], BI = ... cm		

retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

L'ARBRE DE PYTHAGORE EN PREMIÈRE S

Par Serge Ermisse

Résumé : Cette séquence de travaux pratiques met en œuvre différents outils et différents champs pour répondre à un problème géométrique ouvert.

A L'ORIGINE…

Adhérent APMEP, j'ai la chance de recevoir le bulletin vert. A la lecture de « Un arbre Pythagoricien » de Catherine Combelles (extrait du n° 505), cela m'a donné envie d'exploiter cette situation avec mes élèves.
Étant également enseignant de la spécialité ISN de terminale S, j'y ai également vu des réminiscences de récursivité vue en formation. J'ai d'ailleurs commencé par réaliser, pour mon plaisir, un programme en langage Python qui dessine cette figure pour une étape *n* donnée.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

Développer l'esprit d'initiative, de recherche avec un problème ouvert.

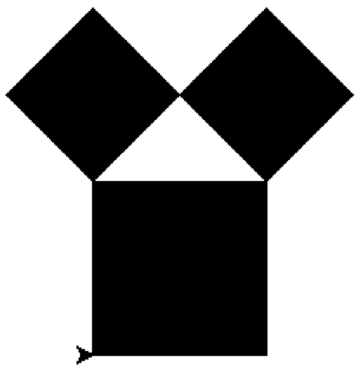
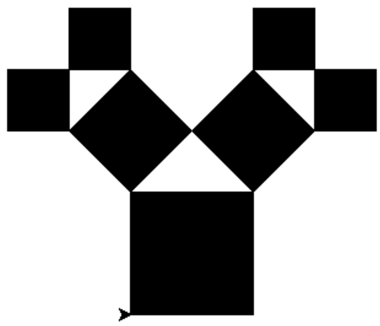
Travailler, sans le dire, la notion de convergence d'une suite ainsi que de la somme de ses premiers termes.

Réinvestir le tableur ou l'algorithmique au service de la résolution de problème.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ

Énoncé

A partir d'un carré de côté 4 cm, on construit sur le côté supérieur deux carrés plus petits qui délimitent un triangle rectangle isocèle. A l'étape suivante, on réitère la construction à l'extérieur sur chacun des carrés construits précédemment.

		
Étape n°0	Étape n°1	Étape n°2

Problème :

Aura-t-on assez de place sur notre feuille pour n'importe quelle étape de construction ?

Aides fournies par le professeur :

Aide 1 : Faire une figure en grandeur réelle.

L'objectif est de pouvoir contrôler les premières valeurs. Cette aide a été donnée à un groupe qui obtenait des valeurs fausses.

Aide 2 : Considérer plutôt la hauteur ajoutée à chaque étape.

Cette aide a été fournie à deux groupes qui ne trouvaient pas le processus de récurrence.

Aide 3 : Utiliser des outils numériques.

Mise en situation de la séance

Les élèves se sont installés dans une disposition traditionnelle sur table. Je leur ai présenté le sujet du TP en vidéoprojetant l'énoncé ci-dessus.

Déroulement de la séance et stratégies des élèves

- ### Première phase : Recherche individuelle (10 min)

C'est pour moi une phase essentielle afin de m'assurer que chacun s'est approprié l'énoncé et puisse participer aux échanges lors de la mise en commun en groupe.

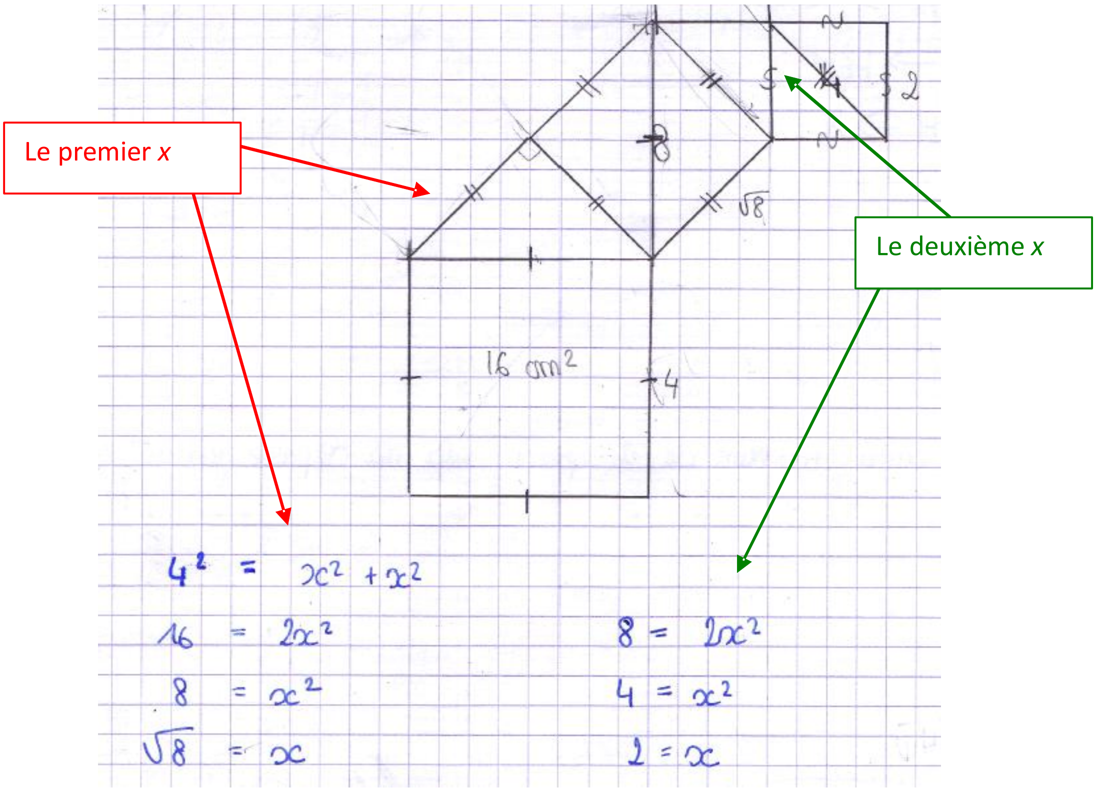
Tous représentent les premières étapes de la construction de la figure en grandeur réelle ou à main levée.

En passant dans les rangs, je constate que pour les élèves qui répondent sur leur feuille, **c'est l'aire qui est en jeu** dans la problématique (cela me semble induit par le coloriage en noir de ma figure) et que peu quantifient cette grandeur, la plupart restant sur des intuitions du type :

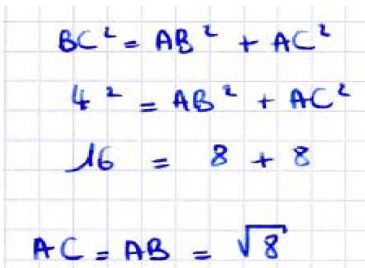
« NON, on n'aura pas assez de place car l'aire devient de plus en plus importante »

« OUI, on aura assez de place car cela devient de plus en plus petit »

Seuls quelques élèves essayent de calculer des longueurs.



Une version moins experte



- ### Deuxième phase : Recherche en groupe (40min)

Je les arrête dans leur recherche individuelle pour orienter la problématique. Je vidéoprojette la figure où il y a chevauchement des surfaces coloriées en noir pour justifier qu'on laisse de côté cette idée : D'autorité, je leur dis que l'on va commencer par étudier la hauteur de l'arbre. Je demande aux élèves de constituer des groupes de 3 ou 4 élèves. Ils doivent résoudre le problème expérimentalement. Contrairement à l'adage, les opposés ne s'attirent pas et la formation des groupes est plutôt homogène. Il est demandé un compte rendu des recherches par groupe.

retour au sommaire

Tous les groupes partent alors sur le théorème de Pythagore, même un groupe d'élèves faibles qui avaient pourtant l'arbre de Pythagore de l'étape n°4 en grandeur réelle. Est-ce que par contrat tacite, une réponse non prouvée ne correspond pas à l'attente du professeur ? Ils calculent ensuite avec des valeurs approchées (les racines carrées ne sont pas des nombres, c'est bien connu …).

Des groupes cherchent à modéliser par une suite la hauteur totale, d'autres la hauteur ajoutée à chaque étape **(c'est d'ailleurs le conseil que je donne discrètement aux 2 groupes qui n'arrive pas à trouver le processus de récurrence (aide 2))**

	Hauteur qu'on ajoute
Etape 0 : 4 cm de haut	
Etape 1 : 4 + 4 = 8 cm de haut	+ 4
Etape 2 : 10 cm de haut	+ 2
Etape 3 : 12 cm de haut	+ 2
Etape 4 : 13 cm de haut	+ 1
Etape 5 : 14 cm de haut	+ 1
Etape 6 : 14,5 cm de haut	+ 0,5
Etape 7 : 15 cm de haut	+ 0,5
Etape 8 : 15,25 cm de haut	+ 0,25
Etape 9 : 15,5 cm de haut	+ 0,25

Après un temps cumulé de 25 minutes, 3 groupes sur 8 n'ont que quelques valeurs (les 3, 4 ou les 5 premières), les 5 autres ayant ont déjà conjecturé un processus de récurrence.

On a cherché les suites aussi comme :

U_0

U_1 $U_0 + 4$

$U_2 =$ $U_1 + U_0 : 2$

$U_3 =$ $U_2 + U_0 : 2$

$U_4 =$ $U_3 + U_0 : 4$

U_5 $U_4 + U_0 : 4$

La hauteur est composée successivement de carré d'un côté plus d'un diagonal d'un carré

Le diagonal est égale à la longueur du côté du carré précédent

La hauteur est désignée par h_{n-1}

VRAI

Un ça donne la dimension d'un côté d'un carré

etape 2 → 10) U_{n-1}
3 → 12
4 → 13) $+U_n$
5 → 14) $+U_{n-1}$
6 → 14,5

$h_n = h_{n-1} + U_{n-1}$

FAUX

Étape 2 = $8 + \sqrt{4} = 10$.
Étape 3 = $10 + \sqrt{4} = 12$.
Étape 4 = $12 + \sqrt{1} = 13$.
Étape 5 = $13 + \sqrt{1} = 14$.
Étape 6 = $14 + \frac{\sqrt{1}}{2} = 14{,}5$.
Étape 7 = $14{,}5 + \frac{\sqrt{1}}{2} = 15$.

Pas sûr de la compréhension

On peut remarquer que lorsque l'on passe d'une étape paire à une étape impaire, on ajoute la même hauteur à l'arbre que côté de l'étape précédente. Pour passer d'une étape impaire à paire, on ajoute la moitié de la hauteur de l'étape précédente

Certains ont essayé de conjecturer des formules (du terme général) :

formule explicite = $4 + \frac{4}{2} \times n$.

$U_n = \frac{U_{n-1}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}^n}$ Un ça donne la dimension d'un côté d'un carré

On a pu ainsi en déduire que la hauteur était :
$= 4\times 2 + 2\times 2 + 1\times 2 + 1 + 0{,}5 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} \ldots$

retour au sommaire

Après un temps cumulé de 35 minutes,

On aura assez de place sur la feuille, car au bout de beaucoup d'étapes, la hauteur ajoutée est tellement petite qu'elle ne dépassera pas 16.

10 étapes

Je vais essayer de « casser » cette image mentale avec la série harmonique.

2 groupes ont trouvé la limite de la hauteur de l'arbre mais uniquement avec quelques étapes à l'aide **d'addition faites à la calculatrice.** Je décide de préciser oralement à tous que l'on est en salle info et qu'ils peuvent se servir des ordinateurs **(aide 3).**

On peut remarquer que lorsque l'on passe d'une étape paire à une étape impaire, on ajoute la même hauteur à l'arbre que l'étape précédente. Pour passer d'une étape
celle de
impaire à paire, on ajoute la moitié de la hauteur de l'étape précédente

Après un temps cumulé de 50 minutes, voici des productions obtenues :

Exemple sur Excel (4 groupes):

On a utilisé excel mais nous n'avons pas vraiment réussi à l'utiliser.

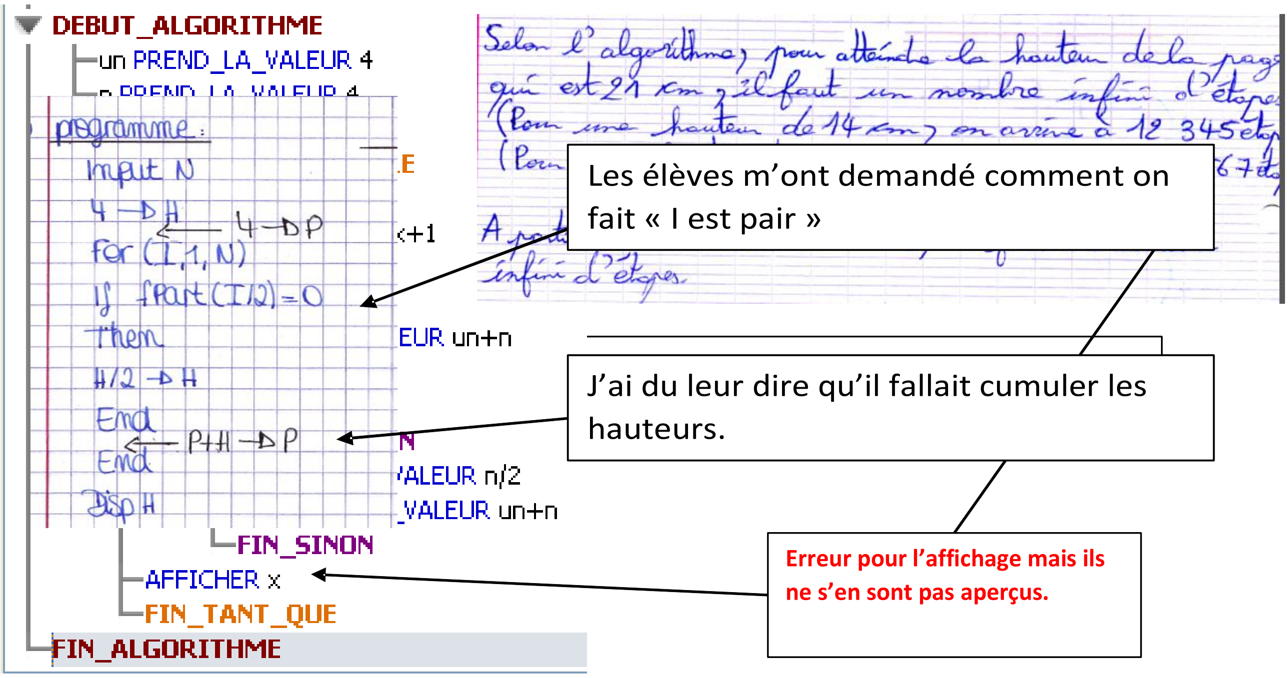
À l'aide du tableur, on a pu en conclure que cette hauteur ne dépassait pas 16 cm et par la même méthode on a pu

	A	B	C	D
1	4	8		
2	2	4		
3	1	2		
4	0,5	1		15,9999695
5	0,25	0,5		
6	0,125	0,25		
7	0,0625	0,125		
8	0,03125	0,0625		
9	0,015625	0,03125		
10	0,0078125	0,015625		
11	0,00390625	0,0078125		
12	0,00195313	0,00390625		
13	0,00097656	0,00195313		
14	[illegible]	[illegible]		

J'ai dû pour 2 groupes donner l'idée du double. Un groupe a trouvé seul et un n'a pas abouti.

retour au sommaire

Exemple sur algobox (3 groupes) :



$$Hauteur = 4+4+2+2+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+4\times\frac{1}{2^{n-1}}+4\times\frac{1}{2^{n-1}}+4\times\frac{1}{2^{n}}+4\times\frac{1}{2^{n}}$$

-

$$\tfrac{1}{2}\times Hauteur = 2+2+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+4\times\frac{1}{2^{n}}+4\times\frac{1}{2^{n}}+4\times\frac{1}{2^{n+1}}+4\times\frac{1}{2^{n+1}}$$

.... =

En déduire, en passant à la limite lorsque *n* tend vers +∞, la hauteur de l'arbre.

Évaluation

2 groupes ont conjecturé la hauteur limite de l'arbre sans aucune aide.

3 groupes ont conjecturé la hauteur limite de l'arbre avec un peu d'aide (numérique).

3 groupes n'ont pas abouti.

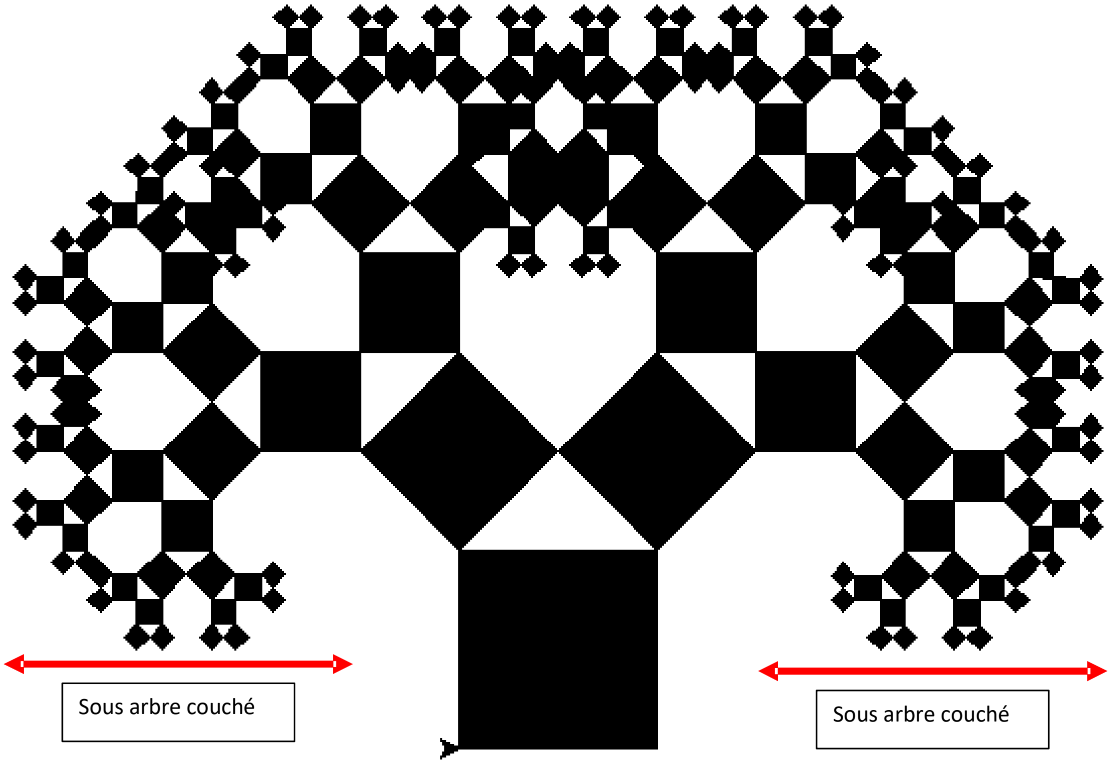
Mais on peut dire qu'ils ont tous :

- Développé leur esprit d'initiative, de recherche.
- Travaillé la notion de convergence d'une suite ainsi que celle de la somme de ses premiers termes.
- Réinvesti le tableur ou l'algorithmique au service de la résolution de problème.

Remarque : 1 groupe a même conjecturé la largeur.

Un bilan sera fait au prochain TD (souvent, je le fais en classe entière l'heure suivante) ainsi que la démonstration de la somme (3ème phase).

retour au sommaire



BROCHURES EN LIGNE

Un certain nombre de nos anciennes brochures régionales sont épuisées. Nous n'avons pas prévu de les rééditer en version papier. Par contre, nous avons décidé de mettre à votre disposition des versions PDF, téléchargeables sur notre site http://apmeplorraine.fr/.

« Travail de groupe en séquences longues (démarche de recherche sur problèmes ouverts) avec un index des fiches et des mots clés (76 pages).

« Maths et arts » : réédition en couleurs (l'original était en noir et blanc) avec quelques compléments et une sitographie très étoffée (138 pages).

« Avec des pentaminos », de François Drouin, avec un peu de couleur et une table des matières interactive (133 pages).

Et aussi « Le nombre d'or et la cathédrale de Metz » : une reprise d'une partie d'une publication de l'IREM de Lorraine (99 pages).

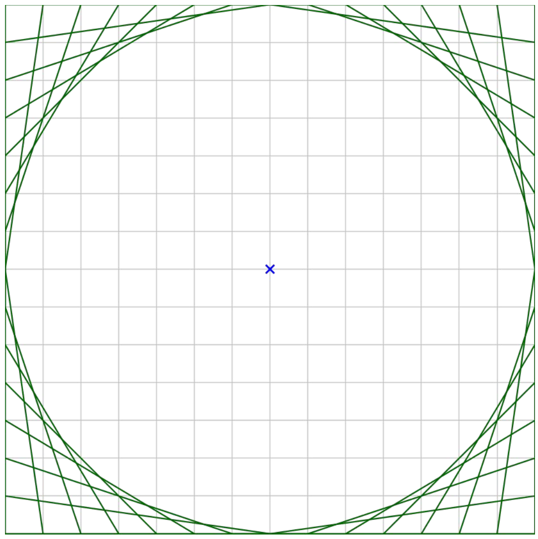
retour au sommaire

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

NON, CE N'EST PAS UN CERCLE !

Zoltán Kovács
The Private University College of Education of the Diocese of Linz
zoltan@geogebra.org

Ce document a été adapté et traduit par Noël Lambert. L'original est disponible ici.



Résumé : Une telle courbe, présentée dans des manuels scolaires, semble être un cercle. Mais c'est en fait une courbe différente. Cet article traite de certaines approches élémentaires pour cataloguer l'objet géométrique, y compris les nouvelles technologies en utilisant GeoGebra. Nous argumentons de deux manières pour réfuter cette impression erronée, puis via deux suggestions nous établissons une conjecture correcte, qui va être confirmée, démontrée de façon rigoureuse suivant quatre démarches.
Tous ces travaux peuvent être introduits dans les classes aux différents niveaux du collège et du lycée.

Mais elle ressemble à un cercle !

Une possible activité anti-ennui est d'imiter à l'art du fil sur une feuille quadrillée, comme ce qui est affiché ci-dessus.
Ce type d'activité est relativement simple pour permettre de le faire pratiquer très tôt, même par un enfant pendant les premières années scolaires.
La courbe qui en résulte, le contour des « fils », ou plus précisément, la courbe dont les tangentes sont les fils, s'appelle une *enveloppe*.
Selon Wikipedia [[1]], l'*enveloppe d'une famille de courbes dans le plan* est une courbe qui est tangente à chaque élément de la famille en un point donné[2].

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Enveloppe_(géométrie)

[2] Cette définition est cependant polysémique : la page Wikipedia énumère d'autres méthodes non équivalentes pour introduire la notion d'enveloppes. La consulter pour une analyse plus détaillée des différentes définitions.

retour au sommaire

Laissez-nous supposer que l'enveloppe étudiée – en dessous du titre de cet article –, définie de la même manière que dans l'activité de l'apprenant, illustrée par la Fig. 1, est un cercle.

Dans l'enveloppe étudiée, il est clair qu'est utilisée la combinaison de 4 constructions simples, les axes sont perpendiculaires, et les sommes des nombres reliés est 8. Pour généraliser, ces sommes peuvent être changées en des nombres différents (mais fixés). Ces sommes seront notées *d* pour rappeler la *distance* à l'origine du point le plus éloigné pour les fils extérieurs.

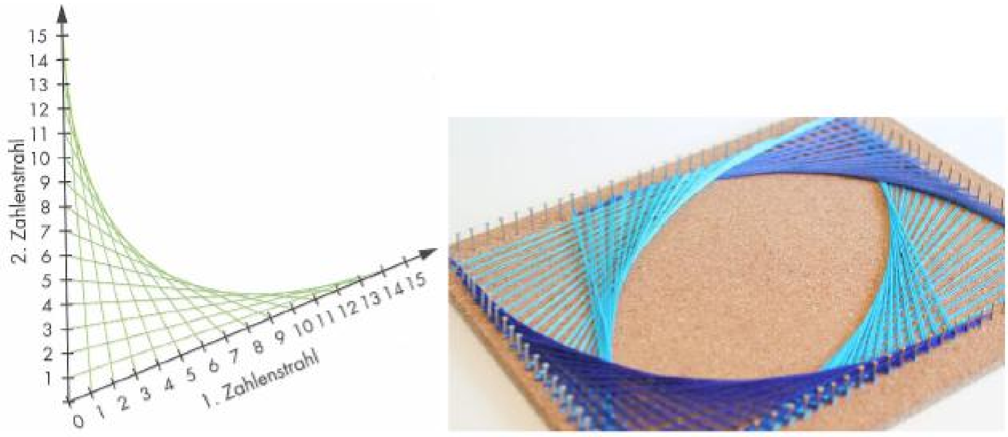


Fig. 1

Une activité pour de jeunes élèves (à gauche): rejoindre les nombres de chaque demi-droite pour obtenir la somme de 16 [3]. De telles activités sont associées aux 'tableaux de fils' qui peuvent être réalisés avec des fils de couture ou autres matériaux (à droite). Il y a combinaison de 4 constructions simples, mais le résultat donne un aspect différent de celui affiché au début de cet article [4].

Dans notre *supposition* de cercle, la famille des fils doit être à une égale distance du centre du cercle. Ceci est obligatoire car le cercle est l'unique courbe dont les tangentes sont équidistantes du centre. En raison de la symétrie des 4 parties, le seul centre possible est le centre de la figure.

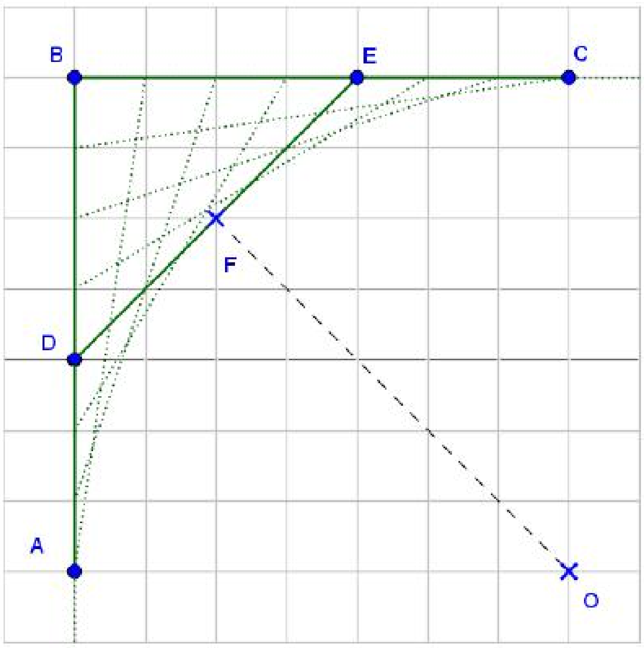


Fig. 2: Considérons trois fils de la famille et leur distance au centre présumé.

[3] Boxhofer, E., Hubert, F., Lischka, U., Panhuber, B. : mathematiX. Veritas, Linz (2013)

[4] Morgan, S. : Math + art = string art. eHow Mom Blog (2013)

retour au sommaire

Considérons la partie supérieure gauche de la figure étudiée. Sur la gauche et le haut, les fils *AB* et *BC* sont à la distance *d* = *OA* = *OC* du centre *O*. D'autre part, le fil en diagonale *DE* est à la distance $OF = \frac{3}{4}.d.\sqrt{2}$ du centre présumé, d'après les théorèmes de Pythagore et de Thalès.
Cette dernière distance est d'environ 1,06 *d,* c'est-à-dire plus grande que *d*. En conséquence, la courbe ne peut pas être exactement un cercle. Autrement dit, ce n'est donc pas un cercle.

Dans de nombreux systèmes scolaires, les théorèmes de Pythagore et de Thalès sont habituellement enseignés tardivement, alors que les élèves sont déjà capables de mesurer simplement les longueurs *OA* et *OF* en utilisant une règle graduée. Cependant, il leur faudra dessiner une figure assez grande parce que la différence entre *OA* et *OF* n'est que d'environ 6%.
En fait, les deux méthodes « prouvent » évidemment que la courbe est différente d'un cercle, et la deuxième peut être débattue dès le début du collège.

OK, ce n'est pas un cercle, mais c'est quoi alors ?

Continuons avec une éventuelle solution en classe du problème. Puisque les fils sont plus faciles à observer que l'enveloppe, il semble logique de collecter plus d'informations à leur sujet.
Étendons la définition de l'enveloppe étudiée en ajoutant de plus en plus de fils dans les deux sens, nous apprendrons comment les pentes des fils varient (Fig. 3). Ici, nous remarquons que la partie supérieure-gauche de l'enveloppe étudiée à sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses (cf. Fig 1), il s'ensuit que, non seulement les sommes, mais aussi les *différences* doivent être constantes, soit *d* = 10.

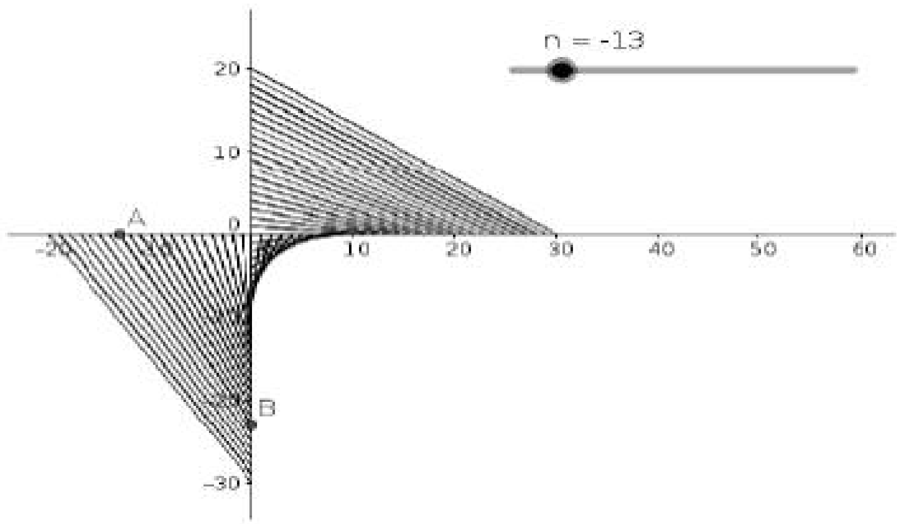


Fig. 3

Supposons que *d* = 10 et créons une appliquette GeoGebra comme indiqué dans la figure.
(Il est évident, qu'une valeur quelconque de *d* peut être choisie, sans amoindrir la généralisation.)
Soit un curseur *n* entier dans l'intervalle [-20 ; 30] et les points *A*(*n* ; 0) et B(0 ; *n*-10).
La famille des segments [AB] peut éclairer quelle courbe est l'enveloppe étudiée.

Dans cette extension, les fils font germer l'idée que les tangentes de la courbe, quand $|n|$ est assez grand, sont presque parallèles à la droite dont une équation est *y* = -*x*. Cette observation permet de réfuter la

perception que la courbe soit finalement une hyperbole (qui a deux asymptotes, mais qui ne sont jamais parallèles).
D'autre part, passons des segments de la Fig. 3 à leurs droites support.
Il nous vient alors une conjecture : « La courbe est une parabole ! » (Fig. 4).

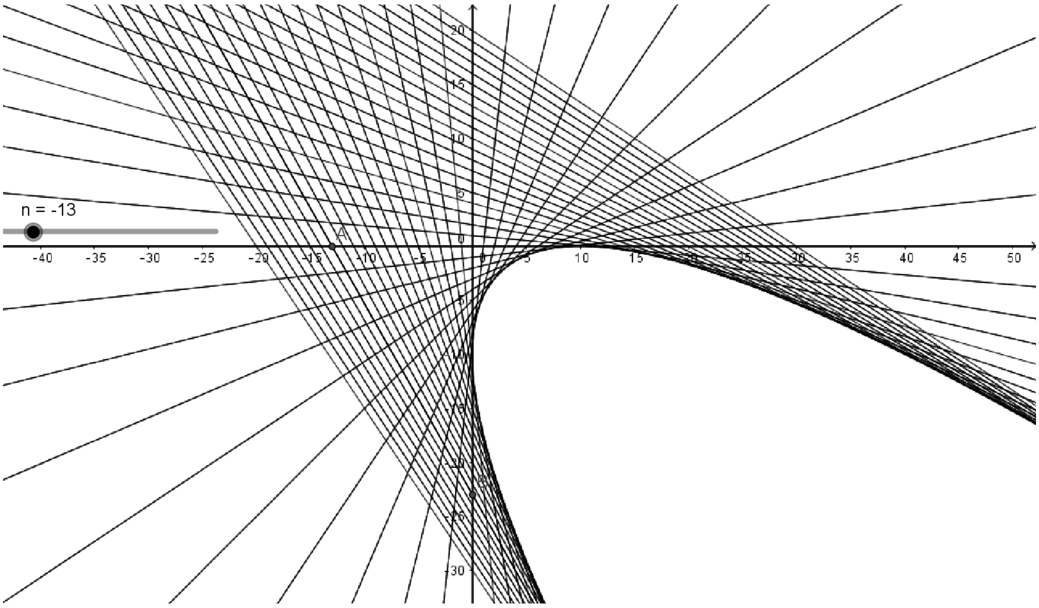


Fig. 4

Et la courbe observée doit être la réunion de 4 arcs de paraboles.

Nous avons une conjecture, pouvons-nous la vérifier ?

Une appliquette GeoGebra peut calculer explicitement l'équation de l’enveloppe étudiée et la tracer avec précision (voir [5] pour une revue détaillée des outils logiciels disponibles actuellement pour visualiser les enveloppes dynamiquement) .Pour des raisons techniques, un curseur ne peut pas être utilisé dans ce cas, il faudra nécessairement faire appel à une construction purement euclidienne. Les points libres *A* et *B* sont créés et ensuite le segment *g*=Segment[*C, C''*] engendre la famille de fils.
La commande *Enveloppe* [*g,C*] va alors calculer une courbe implicite, dont une équation, dans notre cas, est : $x^2+2xy-20x+y^2+20y=-100$ (voir figure page suivante).

GeoGebra utilise des calculs symboliques lourds en arrière-plan pour trouver cette courbe [6].
Dès qu’ils sont effectivement réalisés, l'utilisateur peut alors déplacer les points *A* et *B* à différentes positions et étudier l'équation de la courbe implicite. Les calculs sont actualisés assez rapidement pour avoir un aperçu de la courbe résultante en général : ce sont clairement des courbes algébriques du second degré des variables *x* et *y*. Sans connaissance approfondie de la classification des courbes algébriques, bien sûr, les jeunes apprenants ne peuvent pas vraiment décider si la courbe résultante est en effet une parabole. Les apprenants avancés et les enseignants de mathématiques pourraient toutefois savoir que toutes les courbes quadratiques réelles sont des cercles, des ellipses, des hyperboles, des paraboles, une union de deux lignes ou un point dans le plan.
Comme dans ce qui précède, nous pouvons soutenir que les positions des fils comme tangentes ne supportent que le cas des paraboles ici.

[5] Botana, F., Recio, T. : Computing envelopes in dynamic geometry environments. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence (2016) 1–18

[6] Kovács, Z. : Real-time animated dynamic geometry in the classrooms by using fast Gröbner basis computations. Mathematics in Computer Science 11 (2017)

retour au sommaire

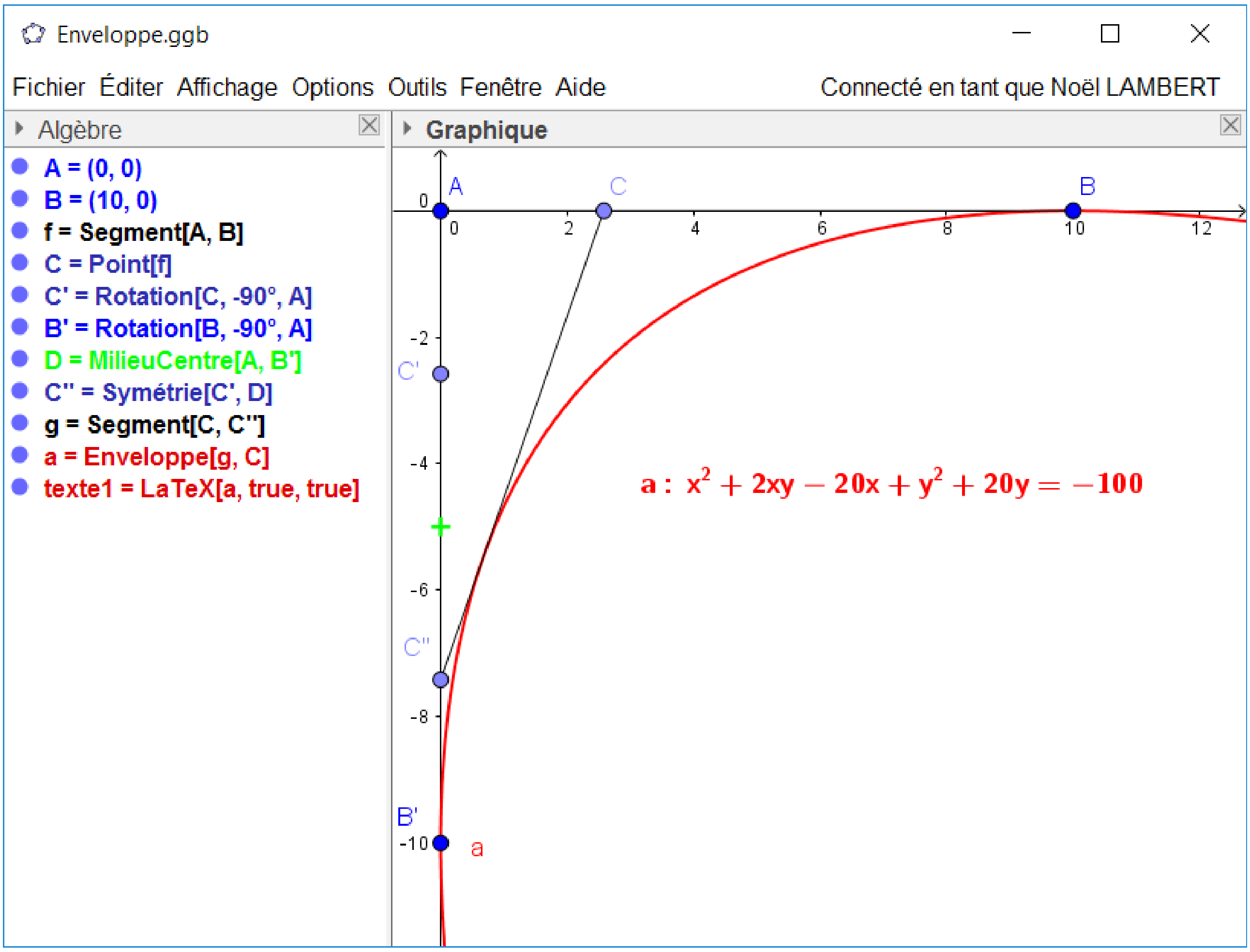


Fig. 5: Une appliquette GeoGebra pour calculer l'équation de la parabole et la représenter. Merci à Michel Iroir et Noël Lambert pour leur aide dans la méthode de construction. Une approche similaire peut être trouvée ici : http://dev.geogebra.org/trac/browser/trunk/geogebra/test/scripts/benchmark/art-plotter/tests/string-art-simple.ggb

D'autre part, pour les jeunes apprenants, nous pouvons encore trouver de meilleurs positions pour *A* et *B*. Il semble assez évident que la courbe reste définitivement la même (à une similitude près), on a donc la liberté de définir les positions de *A* et *B*. En laissant A à l'origine et en positionnant *B* sur la droite dont une équation est $y = -x$ nous remarquons que l'équation de la courbe est sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ qui est la forme habituelle d'introduction des paraboles en classe. (Dans notre cas en fait b = 0).
Par exemple, quand *B* = [10,-10], la courbe implicite a pour équation : $x^2 + 20y = -100$, ce qui peut être facilement converti en $y = -\frac{1}{20}x^2 - 5$.

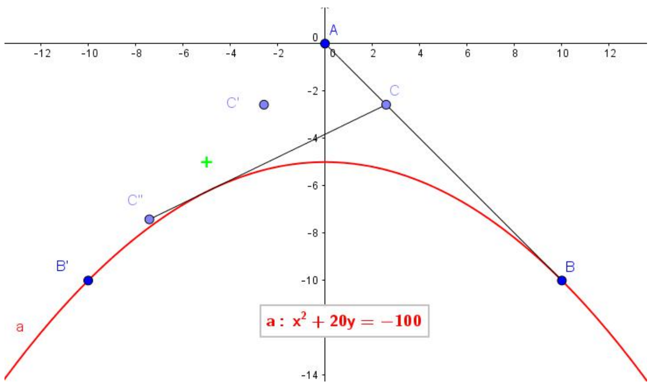


Fig. 6: Avec B=(10,-10), nous obtenons une équation simple.

Ce résultat est obtenu grâce à des étapes précises de calculs algébriques dans GeoGebra.

retour au sommaire

On peut vérifier ces étapes en examinant le journal interne, dans notre situation, 16 variables et 11 équations seront utilisées, nécessitant le calcul d'un déterminant de Jacobi et de bases de Gröbner lors de l'élimination de toutes les variables sauf deux du système d'équations. Ceci étant, GeoGebra fournit effectivement une preuve, bien que les étapes restent cachées à l'utilisateur (afficher les étapes détaillées lors de la manipulation d'un système d'équations avec tant de variables n'a aucun sens du point de vue pédagogique : les étapes sont plutôt mécaniques et peuvent noircir des centaines de pages).
En conclusion, il est prouvé que la courbe est une parabole. Bien sûr, les apprenants ont le droit de vouloir comprendre pourquoi il en est ainsi.

Démonstrations en classe

Nous présentons ici deux démonstrations simples sur le fait que l'enveloppe est une parabole dans la Fig. 6. La première méthode suit [7].
Nous devons prouver que le segment [CC''] est toujours tangent à la courbe dont une équation est $y=-\frac{1}{20}x^2-5$.
D'abord, nous calculons l'équation de la droite CC'' pour en déterminer le(s) point(s) d'intersection avec la parabole.
Nous constatons d'abord que si pour le point *C*(*e*,-*e*), alors pour le point *C*'' = (*e*-10,*e*-10).

Maintenant, nous avons deux démarches possibles pour poursuivre.

4.1 Soit pour la droite (CC'') une équation de la forme *y* = ax+ *b*, il vient :
Pour le point *C* : -*e* = *a.e+b* (1)
Pour le point *C''* : *e* - 10 = *a(e*-10*)+b* (2)
Par soustraction (1) - (2) on obtient $a=1-\frac{1}{5}e$ et, en substituant dans (1), $b=-2e+\frac{1}{5}e^2$.

Pour obtenir le(s) point(s) d'intersection, on résout l'équation $ax+b=-\frac{1}{20}x^2-5$ qui peut être réécrite en l'équation du second degré $\frac{1}{20}x^2+ax+b+5=0$, de discriminant $\Delta=a^2-\frac{1}{5}b-1=0$ après substitution par leur valeur de *a* et de *b*.
Nous sommes donc bien en présence d'une situation de tangence.

4.2 Une autre méthode pour démontrer que la droite CC'' est une tangente à la parabole est d'utiliser du calcul différentiel élémentaire. Les programmes scolaires introduisent habituellement les calculs d'équation des tangentes aux courbes représentatives des fonctions polynomiales du deuxième degré.
Soit $T=\left(t,-\frac{1}{20}t^2-5\right)$ un point de la parabole. La pente de la tangente y est, par dérivation, de $-\frac{1}{10}t$. Cela signifie qu'une équation de la tangente est $y=-\frac{1}{10}t.x+b$
soit au point *T* $-\frac{1}{20}t^2-5=-\frac{1}{10}t.t+b$ nous conduisant à $b=\frac{1}{20}t^2-5$.
L'équation de la tangente est par conséquent $y=-\frac{1}{10}t.x+\frac{1}{20}t^2-5$. (3)

7 Botana, F., Kov´acs, Z. : New tools in GeoGebra offering novel opportunities to teach loci and envelopes. CoRR abs/1605.09153 (2016)

Les intersections de cette tangente et des droites ayant pour équation $y = -x$ ou $y = x$ respectivement, ont pour abscisses, en substituant successivement $-x$ et x à y dans (3) :

$x_1=\dfrac{\frac{1}{20}t^2-5}{\frac{1}{10}t-1}$ et $x_2=\dfrac{\frac{1}{20}t^2-5}{\frac{1}{10}t+1}$ soit « sans charrette à foins » $x_1=\dfrac{t^2-100}{2t-20}$ et $x_2=\dfrac{t^2-100}{2t+20}$

Un calcul algébrique nous permet de vérifier que $x_1 - x_2 = 10$ et de retrouver les points $(x_1, -x_1)$ et $(x_1 -10, x_1 - 10)$ conformes au constat établi au début de ce quatrième paragraphe. Nous avons bien retrouvé les fils de la construction.

La deuxième démarche est techniquement plus longue que la première mais réalisable dans de nombreuses classes. Les deux démarches sont des démonstrations purement analytiques sans aucune connaissance de la définition géométrique d'une parabole. Le fait est que dans de nombreuses classes, celle-ci n'est pas introduite ni même mentionnée.

Une approche formelle

Dans les classes où la définition géométrique d'une parabole est quand même introduite, la plus courante est que c'est le lieu des points du plan qui sont équidistants à la fois d'un point donné, appelé « Foyer » et d'une droite donnée, appelée « Directrice » .

5.1 Une réponse automatisée

Sans autre considération, il est possible de vérifier (en fait, de prouver) que la courbe étudiée est une parabole aussi au sens symbolique. Pour ce faire, on peut invoquer [[8]] l'outil Relation de GeoGebra après avoir construit la parabole à l'aide de la syntaxe Parabole[<Point>, <Droite>] comme on le voit sur la Fig. 7 (page suivante).

[8] Kovács, Z. : The Relation Tool in GeoGebra 5. In Botana, F., Quaresma, P., eds. : Automated Deduction in Geometry : 10th International Workshop, ADG 2014, Coimbra, Portugal, July 9-11, 2014, Revised Selected Papers. Springer International Publishing, Cham (2015) 53–71

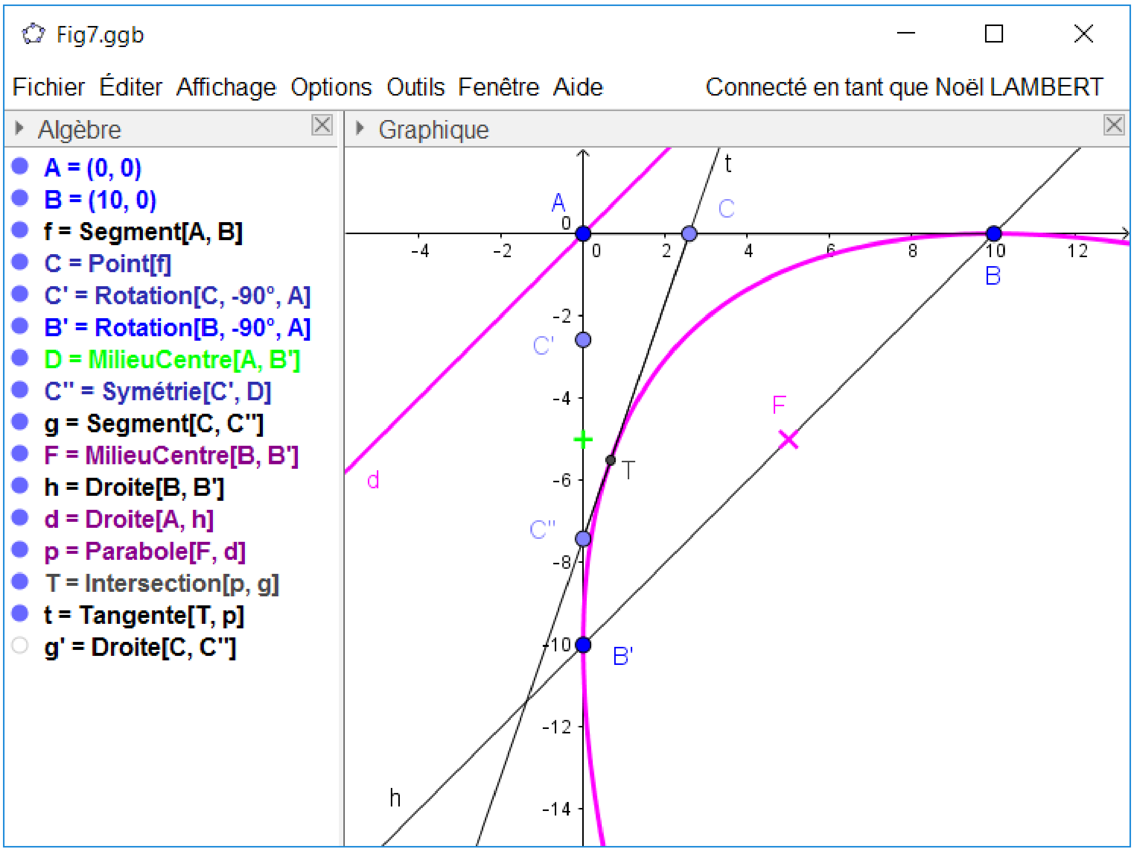


Fig. 7: Une construction géométrique de la parabole dans GeoGebra.

Ici, le foyer *F* est le milieu de [*BB'*], et la directrice est la droite (*d*) parallèle à (*BB'*) passant par *A*. Ces informations devraient probablement être tues par l'enseignant - les apprenants pourraient les trouver d'eux-mêmes. Maintenant il faut vérifier que le fil *CC''* est bien tangent à la parabole au point *T* où il la « coupe ». La tangente (*t*) en *T* à la parabole a aussi été construite. Manifestement, cette droite (*t*) est la droite support du segment *g=Segment*[*C,C''*]. À ce stade, il est possible de comparer *g'=Droite*[C,C''] et *t* en utilisant l'outil Relation.

L'outil Relation compare d'abord les deux objets numériquement et retourne qu'ils sont égaux. En cliquant sur "Plus. . ." , l'utilisateur obtient confirmation du résultat au niveau formel [9].

Nous rappelons que, bien que la construction soit définie synthétiquement, les calculs symboliques ne sont effectués qu'après une traduction de la construction dans une configuration algébrique. La preuve interne de GeoGebra repose à nouveau sur des équations algébriques cachées à l'utilisateur. Mais dans ce cas, nous avons effectivement une affirmation générale pour chaque configuration possible, pas pour un seul cas particulier, comme c'était le cas avec la commande Enveloppe.

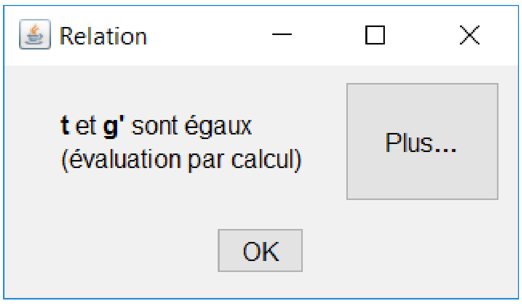
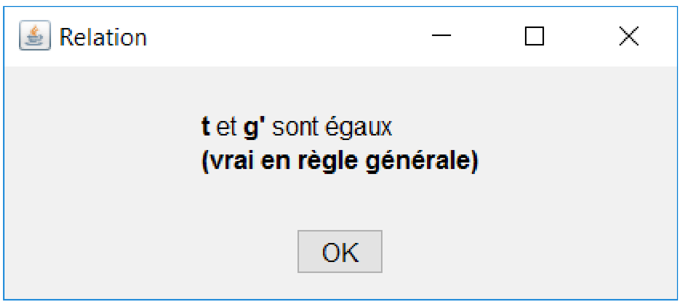


Fig. 8 : Une évaluation numérique puis formelle



9 Kovács, Z., Recio, T., Vélez, M.P. : GeoGebra Automated Reasoning Tools. A Tutorial. A GitHub project (2017) https://github.com/kovzol/gg-art- doc

retour au sommaire

5.2 Une démonstration classique

Enfin, nous donnons une démonstration classique pour répondre à la question initiale. Ici, chaque détail utilise uniquement des considérations géométriques.

La première partie de la preuve est une remarque bien connue sur une propriété de la tangente jouant le rôle de bissectrice. À savoir que tout symétrique du foyer par rapport à une tangente se trouve sur la directrice (voir par exemple [note 6], section 3.1, pour une courte preuve.) De toute évidence, il est suffisant de montrer que les fils ont ce type de propriété : cela entraînera la confirmation de l'affirmation.

Dans la construction, la tangente à la parabole est appelée (*t*). Soit *F'* le symétrique de *F* par rapport à (*t*). Nous allons prouver que *F'* appartient à (*d*). Soit *G* le point d'intersection de (*t*) et de [*FF'*].

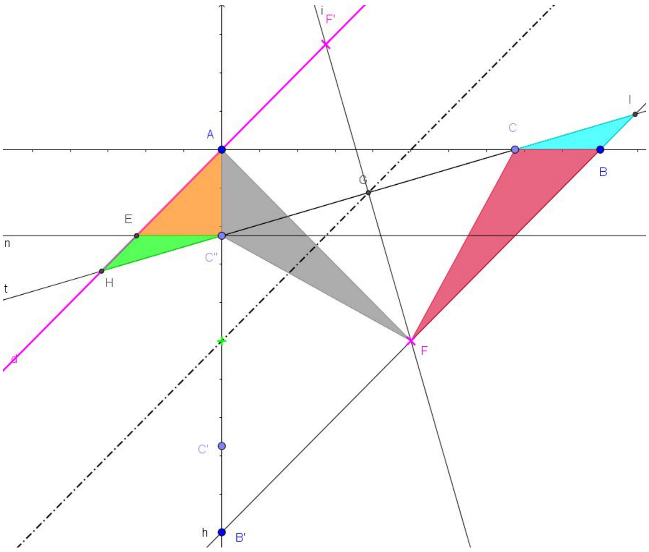


Fig. 9 : Une démonstration classique

Par construction, *AC''* =*BC*, $\widehat{C''AF}=\widehat{CBF}=45°$ et $BF=AF$, les triangles *FBC* et *FAC''* sont donc isométriques, d'où *FC=FC''* et le triangle *CFC''* est isocèle.

De toute évidence, les angles $\widehat{CGF}$ et $\widehat{C''GF}$ sont droits en raison de la réflexion, et (*FG*) est la médiatrice de [*CC''*], d'où *CG=C''G*.

Soit (*n*) une droite parallèle à (*AB*) passant par *C''* et *E* son point d'intersection avec (*d*). Soit, aussi, les points d'intersection *H* de (*t*) avec (*d*), et *I* celui de (*t*) avec la droite (*BB'*). Comme (*d*) et (*BB'*) sont parallèles, de même (*AB*) et (*n*) sont aussi parallèles et *EC''=CB* (car *E* est en fait l'image de *A* dans la rotation de centre *C''* d'angle 90 degrés), nous concluons que les triangles *C''EH* et *CBI* sont isométriques. Cela signifie que *IC=C''H*.

C'est-à-dire, en utilisant aussi *CG=C''G*, *G* doit être le milieu de [*HI*], donc *G* doit appartenir à l'axe de symétrie des deux droites parallèles (*d*) et (*BB'*). En conséquence, le point *F'*, symétrique de *F* par rapport à *G* est sûrement un point de la droite (*d*).

Conclusion

Des analyses des enveloppes dans les tableaux de fils sont présentées à différents niveaux de l'enseignement des mathématiques, afin de réfuter une conjecture erronée, établir une affirmation exacte et la démontrer par différentes méthodes.

Une discussion d'une question non triviale en utilisant différentes voies permet de donner une meilleure compréhension du problème. Et, ce qui est important, que le raisonnement à base d'« évidence » visuelle peut être trompeur, et que seulement des preuves rigoureuses (ou pseudo-rigoureuses, bien que établies par ordinateur) peuvent être satisfaisantes.

retour au sommaire

Il peut être noté que la propriété de la parabole comme enveloppe en tableau de fils est bien connue dans la littérature sur les courbes de Bézier, mais, en règle générale, n'est pas approfondie pendant la formation des enseignants en mathématiques.
L'*algorithme de De Casteljeau* pour une courbe de Bézier de degré 2 est lui-même une preuve que la courbe est une parabole.
De même, parmi les professionnels des mathématiques, cette propriété semble rarement connue.

Un exemple récent est un tweet enflammé de février 2017 (Fig.10).

Turns out this is the gap between four parabolas ! Wow, I wasn't expecting it to be the accurate (@geogebra to the recue again)

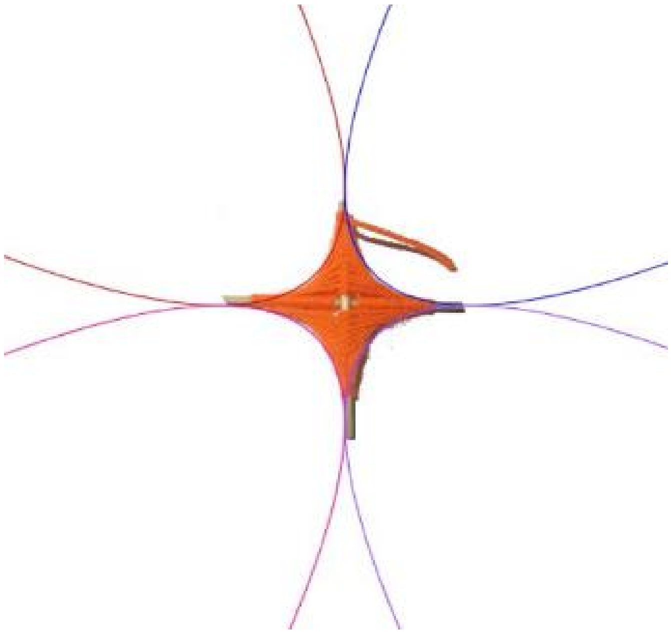


Figure 10. Une autre expérimentation

D'autre part, notre approche a mis en évidence l'introduction en classe de la parabole dans les tableaux de fils, et a suggéré des méthodes très récentes intégrant l'informatique au collège ou au lycée pour améliorer le travail de l'enseignant et les compétences des apprenants.

Enfin, nous remarquons que la définition de cette enveloppe par les tableaux de fils semble similaire à l'enveloppe d'autres familles de droites.

Par exemple, l'enveloppe de l'échelle glissant contre un mur qui conduit à une courbe différente, une astroïde [[10]][[11]] qui est une courbe algébrique réelle du degré 6. Bien que « physiquement » elle soit plus facile à construire (on a juste besoin d'un objet en forme d'échelle, par ex. un stylo), l'analyse géométrique est plus compliquée et implique généralement des dérivées partielles (voir aussi une preuve d'identification de la parabole du tableau de fils en utilisant des dérivées partielles.)

Remerciements

L'auteur remercie Tomás Recio et Noël Lambert pour leurs commentaires qui ont permis l'amélioration du manuscrit.
La figure introductive de l'article avait été dessinée par Benedek Kovács (12 ans), élève en collège.

[10] https://fr.wikipedia.org/wiki/Astroïde

[11] Kovács, Z. : Envelope of the sliding ladder. GeoGebra Materials (2014)

VU SUR LA TOILE

LE SERPENT DE MER DE L'INFORMATIQUE

Le langage Python arrive, à cette rentrée, officiellement dans les programmes de mathématique du lycée. Après avoir découvert les bases de la construction d'un programme au collège, les élèves vont devoir traverser le miroir et passer derrière les blocs pour apprendre le codage à proprement parler. Ce langage de programmation est utilisé en Spécialité ISN (Informatique et Sciences du Numériques) et de nombreux sites de cet enseignement proposent des supports utilisables en classe. Ils supposent cependant, comme prérequis, que le professeur ait une certaine aisance en informatique. Nous allons ici présenter des sites orientés vers une initiation, en ligne le plus souvent, aux bases de la programmation en Python.

Pour ceux qui souhaiteraient vendre ce langage aux élèves, on pourra citer la liste des « sept raisons pour lesquelles vous devez apprendre le langage Python » sur le très bon Développez.com , qui est plutôt dédié aux professionnels mais qui affiche clairement ses intentions de mettre la programmation à la portée du plus grand nombre. On pourra donc suivre le tutoriel (avec code copiable) « Apprendre à programmer avec Python au lycée », tout particulièrement destiné au cours de maths. Il commence avec des instructions pour l'installation de Python sur son PC personnel (je recommande, sous Windows, l'installation d'Edupython , assez complet et souple d'utilisation). On trouvera sur Développez.com, en ligne, le très bon livre de Gérard Swinnen « Apprendre à programmer en Python 3 » avec une version interactive riche en exercices.

Les habitués du concours Castor connaissent France IOI, fondation très ouverte sur les scolaires. Leur site, très riche, propose une formation en ligne, très didactique, qui permet de créer des groupes d'élèves et de suivre leurs progrès dans le langage de programmation souhaité. Cette formation peut, au premier chef, concerner le professeur soucieux de se perfectionner en Python (à sélectionner parmi les autres langages). Les premiers chapitres proposent des exercices sur quelques principes généraux de l'informatique sans prérequis de programmation (on peut parler d'algorithmique débranchée).

Deux collègues ont anticipé les changements de programme et ont créé « Débuter avec Python au lycée ». A priori prévu pour le professeur, ce site peut très bien permettre à un élève d'apprendre par lui-même. Les attendus en programmation sont présentés avec de nombreux exemples.

Pour ceux qui veulent progresser en Python dans la joie et la bonne humeur, on pourra recommander Code Combat qui se défend très bien comme produit ludo-éducatif et qui continue d'évoluer dans ses efforts de traduction. Là encore, il y a la possibilité de configurer un mode prof-élève. Si on préfère un environnement plus sobre, on utilisera le très progressif Code Academy . Ces deux sites ne nécessitent pas d'avoir installé Python.

Par contre, cela s'imposera pour utiliser les cours de nymphomaths (site d'un collègue de mathématiques helvète). L'ensemble des activités proposées pour apprendre Python est assez complet et plutôt motivant. Mention spéciale pour les quizz de fin de chapitre que l'on peut remplir en ligne (exemple).

Enfin, pour obtenir une documentation exhaustive en Python, on consultera les rubriques de ce site : on peut choisir la langue (traduction encore en cours) et la version de Python utilisée. Non nécessairement destinées à l'enseignement, les pages sont cependant riches en exemples copiables et exécutables.

gilles.waehren@wanadoo.fr

retour au sommaire

MATHS ET PHILO

LE MONDE EXISTE-T-IL ?

Par Didier Lambois

PETITE HISTOIRE POUR COMPRENDRE LE PASSAGE DU RÉALISME À L'IDÉALISME

Les mathématiciens s'interrogent sur l'existence des nombres : existent-ils indépendamment de nous ou ne sont-ils que des produits de notre esprit ? Nous avons déjà eu un aperçu de cette querelle que les philosophes nomment « la querelle des universaux » (voir Petit Vert n°121) mais la question peut aller beaucoup plus loin. Qu'en est-il du monde qui nous entoure ? A-t-il une réalité indépendante de nous, comme l'affirme le réalisme, ou faut-il penser au contraire qu'il n'est rien sans nous, autrement dit qu'il se réduit aux idées que nous en avons comme l'affirme l'idéalisme ? Nous nous proposons ici d'explorer rapidement quelques chemins qui ont conduit les philosophes du réalisme à l'idéalisme.

Lorsque nous sommes conscients de quelque chose, quelle est la réalité première ? Est-ce l'être perçu ou l'être percevant ?

*Si nous pensons que la réalité première est l'être perçu et que notre conscience n'en est que le reflet, que cette réalité perçue existe hors de la conscience, indépendamment d'elle, avec ses qualités propres, et qu'elle détermine, informe notre conscience, alors nous sommes **réalistes**.*

*Si nous pensons au contraire que la conscience est première, que tout part d'elle et que l'objet perçu est subordonné au sujet qui le perçoit et qui le connaît, que le monde se réduit aux idées que nous en avons, que le monde n'est en fait que notre représentation pour reprendre les termes de Schopenhauer (1788-1860), alors nous sommes **idéalistes**.*

Spontanément, il semble difficile de remettre en cause l'idée que le monde existe tel que nous le percevons, avec ses formes, ses qualités, ses couleurs, sa chaleur etc. A nos yeux, le monde existe et les objets qui le composent s'imposent à nous, ils « informent[12] » notre esprit ; ces objets ont une réalité « objective », et cette réalité s'impose comme une évidence. Notre perception (sensation) ne serait finalement qu'une forme de reflet, et dans le cadre de ce réalisme vulgaire, la **vérité** pourrait être définie comme la conformité de la copie au modèle : « *adequatio intellectus et rei* ». Il y a vérité si ce que je dis correspond à ce qui est.

Pourtant, très tôt, les philosophes, sous l'influence des premiers penseurs grecs puis des sceptiques, prirent conscience du caractère précaire de la réalité sensible et de l'impossibilité de calquer sur elle une vérité qui devait être par définition universelle et permanente. « *L'homme est la mesure de toute chose* » disait Protagoras (-485 -410), pour les uns les dieux existent, pour les autres non, pour les uns une chose est juste, pour les autres non, etc. Il n'y a pas de vérité ni dans les sciences (ce qui a été considéré comme vrai est aujourd'hui regardé comme faux) ni en morale : c'est l'homme qui est la mesure des vérités et des valeurs. Dans ce cadre, la vérité une et permanente n'existe plus : tout est relatif, tout change.

Platon (427-347 av. J.-C.) va chercher à sauver l'idée de vérité et à montrer que la connaissance est possible en affirmant que le monde sensible n'est que le reflet imparfait d'une réalité d'un autre ordre. Cette autre réalité ce sont les Idées (avec un grand I), c'est-à-dire les essences intelligibles, éternelles, immuables, qui sont comme les archétypes des choses sensibles et qui existent indépendamment d'elles. Certes les hommes sont divers et changeants, et vouloir connaître ce qu'est l'homme à travers l'expérience que nous en avons nous condamne à une connaissance relative et imparfaite, alors que l'Idée d'homme, elle, est une et immuable. C'est donc vers l'Idée que nous devons nous tourner pour espérer accéder à la vérité.

L'Idée a pour Platon une réalité, elle est une chose en soi, un être métaphysique. Sa philosophie est donc encore un réalisme puisque les Idées ont une réalité métaphysique, une réalité ontologique,

[12] Informer, au sens premier, le sens aristotélicien, c'est donner une forme. Aujourd'hui le terme renvoie surtout à la transmission d'une donnée, d'une signification, par le moyen d'un message plus ou moins conventionnel, à l'aide d'un support spatio-temporel (imprimé, message téléphonique etc.). Mais ce sens actuel ne doit pas nous faire oublier le sens premier : en nous informant les médias nous forment, nous déforment, nous conforment…

retour au sommaire

indépendamment de nous et en dehors de notre pensée. Mais c'est un premier pas vers l'idéalisme car la réalité intelligible n'est plus la réalité sensible. On parle alors d'idéalisme platonicien.

Mais sans être nécessairement platonicien, en écoutant simplement notre bon sens, il est possible de trouver des arguments pour refuser d'admettre l'objectivité, la réalité de tout ce dont nous faisons l'expérience. Peut-être ne faisons-nous que rêver, peut-être sommes nous trompés par des illusions, rêves ou illusions (ou encore mirages) qui peuvent avoir la force et la consistance de ce que nous percevons à l'état de veille. Ces idées fantaisistes furent très en vogue dans la littérature du XVI° et XVII° siècle : « *la vie est un songe* » disait Calderon de la Barca (1600-1681). Mais cette affirmation du caractère onirique de la vie masque une affirmation plus importante et plus sérieuse : pour qu'il y ait songe il faut un songeur. **Descartes** (1596-1650) le comprend et il utilise cet argument du rêve pour révoquer en doute l'existence du monde sensible et pour affirmer sa propre existence en tant qu'être pensant : *cogito ergo sum.* Que le monde existe ou pas, que je rêve ou pas, je suis puisque je doute, puisque je pense, c'est indubitable : je suis un sujet pensant, et je le serai aussi longtemps que je penserai.

Pour être plus précis, Descartes utilise cet argument pour montrer non pas que le monde sensible n'est que fiction, mais que nous avons tort de voir dans la connaissance sensible l'archétype d'une connaissance certaine. L'existence du monde sensible a de fait besoin, selon lui, d'une démonstration, et celle ci passe selon lui par l'existence de Dieu, Être parfait qui ne peut donc être trompeur. Ce Dieu seul peut nous assurer que « *la très grande inclination »* que nous avons à croire à l'existence des choses corporelles n'est pas illusoire. Mais la véracité divine ne garantit pas la vérité des données sensibles : « *Nos sens ne nous ont été donnés que pour la conservation de notre corps »* dit Malebranche (1638-1715), ils ne nous apprennent pas la nature des choses mais seulement en quoi elles nous sont utiles ou nuisibles, et ils peuvent nous tromper. Dieu ne garantit que la vérité des idées claires et distinctes.

Ce qui est réel dans le monde, pour Descartes, ce n'est donc pas ce que nos sens y perçoivent mais ce que notre entendement y conçoit clairement et distinctement. Or la seule idée que nous concevions clairement et distinctement pour les choses corporelles, c'est qu'elles sont étendues. C'est ce que Descartes démontre dans la *deuxième Méditation* par l'exemple du morceau de cire[13].

En identifiant le réel (vrai) à l'intelligible, en montrant que la pensée est première, la seule donnée immédiate, que l'âme est plus aisée à connaître que le corps, Descartes fait un pas de plus vers les doctrines idéalistes.

À la suite de Descartes, Locke (1632-1704) fait une distinction entre les qualités sensibles. Les unes, qualités premières, sont inséparables de l'idée de matière : solidité, étendue, forme, nombre, mouvement, repos. Pour lui, elles sont dans les corps et existent réellement. Les autres, qualités secondes, telles que la couleur, la saveur, l'odeur... peuvent être supprimées sans que soit supprimée la notion même de corps. Ces qualités secondes n'existent en fait que pour nous, la chaleur et la couleur ne sont pas plus dans les objets que nous sentons chauds ou colorés que la douleur n'est dans l'épingle dont la piqûre est douloureuse.

[13]Nous croyons mieux connaître les corps (non les corps en général, ce qui est une idée abstraite, confuse pour l'imagination), c'est-à-dire ce que nous touchons et voyons, ce qui est donné à nos sens, non la cire en général, mais ce morceau de cire. Nous le connaissons parce qu'il est sensible, pensons nous, il a une odeur, une couleur etc.

Mais si nous chauffons cette cire elle perd toutes ses qualités sensibles pour en acquérir d'autres, elle perd ses qualités, ses propriétés (qui n'étaient donc pas ses propriétés essentielles), mais pourtant c'est toujours la même cire ; mais comment savons-nous que c'est la même si elle n'a plus rien d'identique ? Cela ne peut pas être par l'intermédiaire de nos sens puisque la cire n'est pas définie par ses propriétés sensibles (« *elle paraissait sous ces formes et maintenant se fait remarquer sous d'autres* ») ; ce que nous pouvons connaître d'elle c'est qu'elle est une substance qui peut prendre des propriétés sensibles changeantes (« *c'est quelque chose d'étendu, de flexible et de muable* »). Il ne reste que cela lorsque nous avons écarté « *toutes les choses qui n'appartiennent pas à la cire* ».

retour au sommaire

Berkeley (1685-1753) va montrer que, pas plus que les qualités secondes, les qualités premières ne peuvent exister hors d'un sujet qui les pense.
Nous admettons tous que les qualités secondes ne ressemblent en rien à ce qui existe dans le monde, elles dépendent de nous ; les couleurs changent si nous avons des verres teintés, la chaleur varie selon la température de notre main etc. Or ces arguments peuvent s'appliquer aussi aux qualités premières ; la forme, le mouvement semblent changer suivant la position que nous occupons et suivant notre état d'esprit ; des objets peuvent paraître petits à des grands, grands à des personnes de petite taille[14] ...
Berkeley explique aussi que les idées concernant les qualités premières sont inconcevables si elles ne sont pas accompagnées par les idées concernant les qualités secondes. Nous ne pouvons concevoir l'étendue en dehors de la couleur. Il est donc inconcevable pour lui qu'une qualité, première ou seconde, existe en dehors de l'esprit. Il ne faut pas en conclure que les objets n'existent pas, au contraire ils existent puisque nous les percevons, mais exister c'est être perçu : « *esse est percipi* ». Il n'est donc pas possible qu'ils existent en dehors de l'esprit ou du sujet pensant qui les perçoit, ils ne sont rien, ils n'ont rien de propre s'ils ne sont perçus, ils n'existent que parce qu'ils sont pensés et tels qu'ils sont pensés.
Ainsi, pour Berkeley, le monde extérieur se réduit aux idées que nous en avons. C'est la thèse idéaliste. Dans le cas de Berkeley nous parlerons d'immatérialisme[15].
L'idéalisme de **Kant** (1724-1804) sera moins étroit. Il maintient l'existence de choses en soi, les noumènes, mais ceux ci nous sont inaccessibles car dès qu'il connaît, notre entendement applique à la « matière » de la connaissance certaines « formes », certains « principes transcendantaux » qui font que cette connaissance est toujours relative. Elle porte sur des phénomènes et non sur des noumènes. Tel est le principe de **l'idéalisme transcendantal**. C'est un idéalisme puisque bien que possédant une réalité objective, le phénomène (ce que nous connaissons) est, pour une part au moins, un produit de l'entendement. Mais ce n'est pas un idéalisme absolu puisqu'il ne remet pas en cause l'existence des objets hors de nous (les noumènes), et toute connaissance commence d'ailleurs par une expérience sensible.
Mais en voulant défendre le réalisme, Kant ouvre la voie à l'idéalisme absolu. Puisque le noumène ne nous est pas connu et est inconnaissable, pourquoi supposer qu'il existe ? En effet, c'est en faisant état de cette impossibilité où nous sommes de concevoir une réalité indépendante d'un esprit, que les idéalistes ont ramené toute existence à l'esprit. Pour eux nous ne pouvons concevoir que deux modes de réalité : celui du sujet percevant, celui de l'idée perçue. *« Être c'est percevoir ou être perçu »* dit Berkeley.

Les vérités sont choses à faire et non à découvrir, ce sont des constructions et non des trésors. »
Paul Valéry

[14]« Philonoüs : *N'a-t-on pas admis comme un bon argument que ni le froid ni le chaud n'existent dans l'eau puisqu'elle semble chaude à une main et froide à l'autre ?* Hylas : *En effet*. Philonoüs : *N'est-ce pas raisonner de la même façon que de conclure qu'un objet ne comporte ni étendue ni forme parce qu'aux yeux d'un observateur il semble petit, lisse et rond, et qu'aux yeux d'un autre observateur et dans le même moment, il paraît grand, rugueux et anguleux ?* Hylas : *Exactement. Mais, est-ce que cela arrive jamais ?* Philonoüs : *Vous pouvez à tout moment en faire l'expérience en regardant l'objet, un œil nu et l'autre se servant d'un microscope.* » Berkeley, *Dialogue entre Hylas et Philonoüs*.

[15]Berkeley reconnaît qu'il faut bien une cause à nos sensations, mais il n'admet pas que cette cause soit « *cette prétendue substance mystérieuse que vous appelez matière* » car cette dernière ne peut ressembler en rien à ce que nous percevons puisque tout ce que nous percevons est mental. Pour lui il y a une cause d'un tout autre genre, qui n'a rien de matériel, c'est Dieu. Nos sensations sont le langage que Dieu parle aux hommes. Le spectacle de l'univers est directement imprimé par Dieu dans la conscience des créatures. C'est aussi la référence à Dieu qui permet de comprendre que les choses sensibles paraissent indépendantes de notre intelligence puisque nous ne pouvons pas percevoir n'importe quoi à volonté (cette table est dure et restera dure pour moi). C'est que les choses existent non seulement dans mon intelligence mais aussi dans l'intelligence divine qui nous les présente d'une certaine manière et suivant certaines règles qu'elle a elle-même posées et que nous appelons « lois de la nature ». (Berkeley était philosophe, mais aussi évêque…)

retour au sommaire

MATHS & MÉDIAS

GESTION DE DONNÉES AU XVII^{ème} SIÈCLE

« Je ne sais pas si c'est des maths, mais cela peut intéresser le Petit Vert : voici un tableau datant du XVIIème siècle… » nous dit la passionnée de généalogie ayant consulté ce document.

Archives paroissiales de BOULAY, Document 9NUM/100ED/GG2, Baptêmes, mariages,... (*1672-1703*)

http://www.archivesnumerisees57.com/mdr-940/index.php/docnumViewer/afficheDocnum/54/N/image

Pour ceux qui peinent à lire le haut du document :

Proles	*Mensis*	*Parentes*	*Patrinus*	*Matrina*
…	…	…	…	…

Pour ceux qui peinent à lire le latin :

Enfant	*Date*	*Parents*	*Parrain*	*Marraine*
…	…	…	…	…

Les élèves se rendront compte qu'à cette époque le latin n'était pas une langue morte et que l'utilisation de tableaux facilite depuis bien longtemps la gestion des données.

*****

DÉNOMBREMENTS

Sur la première page de l'Est Républicain du 01/09/2017, le lien entre la photo et le titre interpelle. N'y aurait-il que quatre habitants à Longeaux ?

Une recherche sur Wikipedia nous rassure : en 2014, il y avait 232 habitants et nous pouvons penser qu'hommes et femmes sont équitablement représentés.

La lecture de l'article en page 6 annonce « un peu plus de 200 habitants », le village a peut-être perdu des habitants depuis 2014. Est également évoquée une pétition avec « une centaine de signatures ». Nous remarquons qu'il n'est pas dit « plus de 100 » laissant entrevoir que le nombre 100 n'a peut être pas été atteint.

Les dénombrements sont bien souvent des ordres de grandeurs. Il est vrai qu'en Lorraine, lorsqu'est évoquée « une paire de bouteilles », il faut comprendre « quelques bouteilles », rejoignant nos amis allemands dans leur expression « ein paar Flaschen ».

N'aurait-il pas été préférable d'écrire « **D**es habitants disent… » ?

retour au sommaire

MATHS & MÉDIAS

CHER FOOTBALL

Voici un problème repéré dans le « Quizz de l'été » de l'Obs de cette semaine (17 au 23 aout).

Le PSG et l'Olympique de Marseille (OM) ont un point commun : ils ont tous les deux fait l'acquisition de footballeurs brésiliens cet été. Pendant que l'OM a déboursé 8 millions d'euros pour recruter Luiz Gustavo, qui avait un salaire d'à peu près 600 000 euros par mois, le PSG a intégré gratuitement Dani Alves qui sera, lui, payé à peu près 35 000 euros par jour.
En estimant qu'un mois fait 30 jours, au bout de combien de temps le PSG aura-t-il dépensé plus que l'OM ? ❶ 17 mois, ❷ 18 mois, ❸ jamais.

Proposez ce problème à vos élèves, et rendez-vous dans le prochain Petit Vert pour comparer leur solution avec celle donnée par l'Obs...

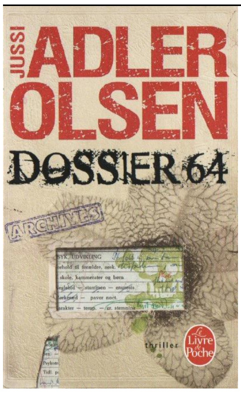
*****

MATHS & LITTÉRATURE

1089

« Tu connais le coup avec 1089 ? » le défia le gamin. Comment pourrait-il ne serait-ce qu'énoncer un nombre aussi élevé ? Quel âge avait-il ? cinq ans à peine.
« Tu veux une feuille de papier, Carl ? » lui demanda Mona en se retournant pour sortir un bloc et un crayon de couleur du tiroir de la commode derrière elle.
« OK, dit l'enfant. Tu choisiras un nombre à trois chiffres, n'importe lequel, et puis tu le notes. »
Chiffres, nombres, comment ce gamin connaissait-il ces mots-là ?
Il hocha la tête et écrivit 367.
« Maintenant, tu l'écris à l'envers.
Comment ça à l'envers ?
Il hocha la tête et écrivit 367.
Eh bien, tu le retournes, et tu écris 763 ! Tu es certain qu'il n'y a pas un peu plus de matière cérébrale que tu ne le croies qui s'est échappée par ce trou ? » s'immisça sa délicieuse maman.
Carl écrivit 763.
« Tu enlèves le plus petit nombre du plus grand », ordonna le petit génie blondinet.
763 moins 367. Carl cacha le calcul avec sa main libre pour que personne ne voie qu'il posait son opération comme il l'avait appris en CE2.
« Alors, ça fait combien ? » Les yeux de Ludwig brillaient d'excitation.
« Euh, 396, c'est ça ?
Écris le à l'envers et additionne le à 396. Ça fait combien ?
Tu veux que j'ajoute 396 à 693, c'est ça ? Et tu veux que je te donne le résultat ?
Oui. »
Carl fit sagement son addition, en dissimulant toujours son calcul de l'autre main.
« Ça fait 1089 », annonça-t-il après avoir eu quelques difficultés avec les retenues.
Le gosse explosa de rire quand Carl leva la tête. Il savait qu'il avait l'air éberlué.
« Ça alors, Ludwig ! Ainsi, quel que soit le nombre que je choisis au départ, le résultat sera toujours 1089 ?

…/...



Ces quelques lignes sont extraites des pages 349 et 350 de cet excellent thriller sorti en juin 2016 dans la collection « Le Livre de Poche ».

Il est toujours plaisant de retrouver un peu de mathématiques dans ses lectures !

Quelle réponse apporteriez vous à la question posée par Carl ?

La question a été posée aux membres du comité de la régionale. Voici quelques réponses obtenues.

Je dirais à la place d'un élève : si le nombre de départ possède trois chiffres, oui, c'est sûr. La différence est un multiple de 99, donc de 11, qui a un 9 dans les dizaines (une centaine moins un nombre compris entre 1 et 9). Donc la somme du chiffre des unités et des centaines est forcément 9. Du coup, en ajoutant à la fin, 9 unités+18 dizaines+9 centaines, ce qui fait bien avec la retenue, 10 8 9.

Il lui a été répondu :

Essaie donc avec 121 comme nombre de départ !

Cette famille de nombres ne permettant pas d'obtenir 1089 a été rencontrée dans la démarche algébrique qui suit.

N est le nombre de départ, N' est le nombre « retourné ».

$N = 100c + 10d + u$ *avec* $c > u$ *(méthode semblable si* $c < u$*)*

$N' = 100u + 10d + c$

$N - N' = 100(c-u) + u-c = 100(c-u-1) + 10d + u-c = 100(c-u-1) + 9d + 10+u-c$

« $M - M'$ » est le nombre $N - N'$ « retourné »

$M - M' = 100(10+u-c) + 9d + (c-u-1)$

S est la somme de « $N - N'$ » et de « $M - M'$ »

$S = 100(c-u-1+10+u-c) + 18d + (10+u-c+c-u-1)$

$S = 100(c-u+10+u+c) - 100 + 100 + 8d + (10+u-c+c-u-1)$

$S = 1000 + 80 + 9$

$S = 1089$

Une méthode semblable sera utilisée si $c<u$.

Si $c = u$, les nombres « $N - N'$ » et « $M - M'$ » seront égaux à 0. 1089 ne sera pas obtenu.

Un petit complément

$N - N' = 99(c - u)$ *(ou* $N - N' = 99(u - c)$*, si* $u < c$*)*

Si $|c - u| = 1$, $N - N' = 99$ *et on obtient 198.*

0 ; 198 et 1 089 sont les seuls nombres possibles

.../...

retour au sommaire

Début d'une utilisation d'un tableur

nb choisi	nb inversé	v. abs diff	dif inversée	somme
100	1	99	990	1089
101	101	0	0	0
102	201	99	990	1089
103	301	198	891	1089
104	401	297	792	1089
105	501	396	693	1089
106	601	495	594	1089
107	701	594	495	1089
108	801	693	396	1089
109	901	792	297	1089
110	11	99	990	1089
111	111	0	0	0
112	211	99	990	1089
113	311	198	891	1089
114	411	297	792	1089
115	511	396	693	1089
116	611	495	594	1089
117	711	594	495	1089
118	811	693	396	1089

En jaune, les nombres qui, inversés, n'ont plus que un ou deux chiffres. Ils ont été mis « à la main » à 3 chiffres. Par exemple, 99 (soit 099) inversé devient 990.

En rouge les nombres « palindromes » (le chiffre des unités est égal à celui des centaines). Par exemple 121 reste 121, la différence est donc nulle.

Voici la suite de l'extrait du livre.

Le petit garçon sembla déçu. « Ben oui, je te l'avais dit ! À part si tu commences par le nombre 102. La première soustraction donnera 99. Et là tu seras obligé d'écrire 099 au lieu de 99. Pour que ça marche il faut que ce soit toujours des nombres à trois chiffres, n'oublie pas cela surtout. »

Le petit garçon (ou l'auteur du thriller) semble avoir oublié les nombres possédant un chiffre des centaines égal au chiffre des unités.

Comment réagiraient des élèves ?
Sauraient-ils élaborer un algorithme permettant l'étude de tous les entiers à trois chiffres ?
Celui-ci permettrait-il de repérer les familles de nombres pouvant mettre en défaut l'obtention de 1089 ?

*****

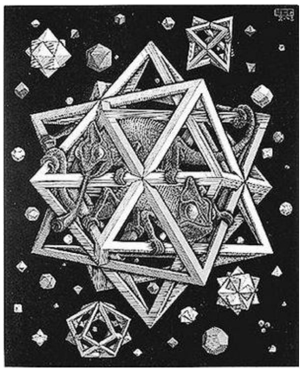
retour au sommaire

CE POLYÈDRE ÉTOILÉ EST UNE VRAIE STAR

Profitant d'un long week-end bien mérité, une de nos adhérentes est allée faire un petit tour à Montalieu-Vercieu, à l'est de Lyon. Sur une place, son regard a été attiré par une bien belle sculpture en pierre et nous a confié cette photo.
De retour en Lorraine, l'envie est venue d'en savoir un peu plus à propos de ce beau solide.

Le site culturemath nous apprend qu'il s'agit de la première étoile du dodécaèdre rhombique.

Wikipedia nous apprend qu'en 1948, Escher à utilisé cette vision de trois octogones réguliers entrecroisés pour ses œuvres nommées « Stars ».



Certains estiment que Montalieu-Vercieu est le pentacle de l'Isère. Nos lecteurs n'irons sans doute pas jusque là, mais leurs découvertes seront toujours les bienvenues.

Connaissez-vous les bêtes étranges de Théo Jansen ?

retour au sommaire

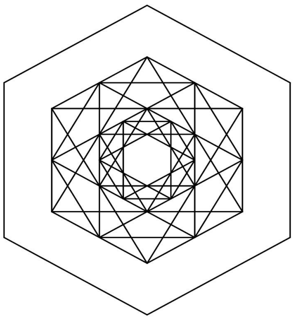
MATHS & ARTS

DES SOLIDES À SINGAPOUR

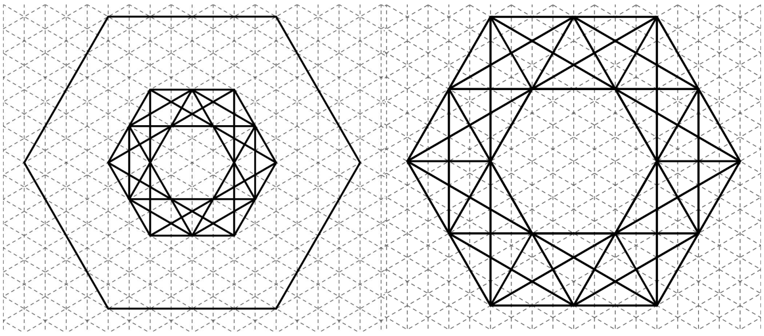
François Drouin

Le 2 mars 2017, l'EST RÉPUBLICAIN et VOSGES MATIN nous annonçaient:
Singapour fête les lumières. En avant-première, une photographie de la Fête des Lumières à Singapour en Asie du Sud-Est.
Un essai était réalisé hier avant l'ouverture du « I Light Marina Bay ».

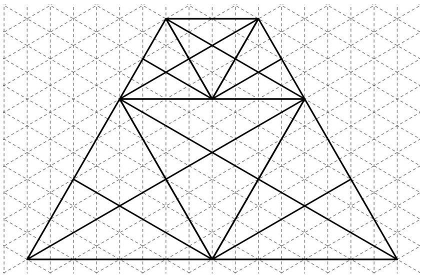
Une petite visite sur le site présentant les œuvres installées nous apprend que l'ensemble a pour nom « HYBYSOKO », a été créé par Yelena Philipchuk et Serge Beaulieu (USA et Canada) et comporte d'autres solides que ceux visibles sur la photo diffusée par l'AFP.
Nous reconnaissons un dodécaèdre, un cube et un octaèdre tronqué. Ce solide en premier plan présente d'intéressants motifs sur ces faces hexagonales.



Ce dessin montre un emboitement d'hexagones réguliers, de triangles isocèles et équilatéraux, de rectangles.



Agrandissement ou réduction interviennent pour ces couronnes de triangles équilatéraux.

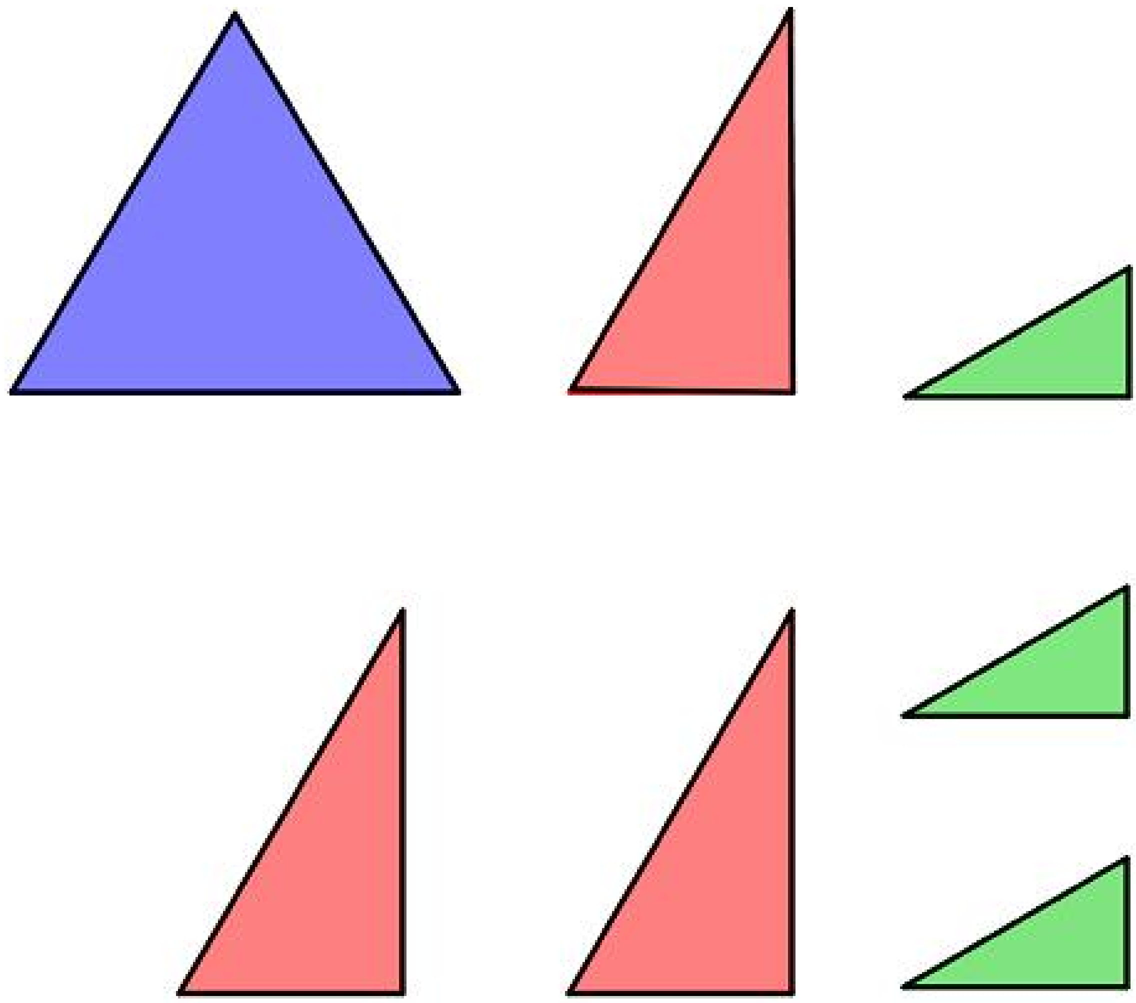


Symétries et rotations de ce motif permettront le dessin sur les faces hexagonales.

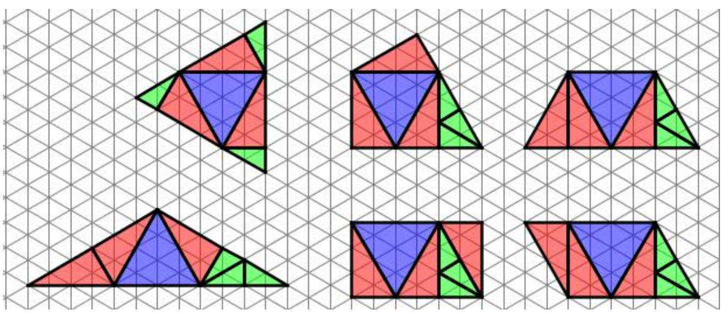
Ces dessins ont été réalisés avec GeoGebra.

retour au sommaire

UN PUZZLE À SEPT TRIANGLES



Avec ces sept triangles, réalise un triangle équilatéral, un triangle isocèle, un parallélogramme, un rectangle, un trapèze isocèle, un cerf-volant.



Fathi DRISSI a créé ce puzzle en cherchant un découpage du triangle équilatéral différent de celui obtenu par les médiatrices des côtés.
La recherche d'un placement possible des pièces dans un réseau pointé triangulé poursuivie par celle des dessins des assemblages obtenus a permis de trouver les solutions ci-contre.

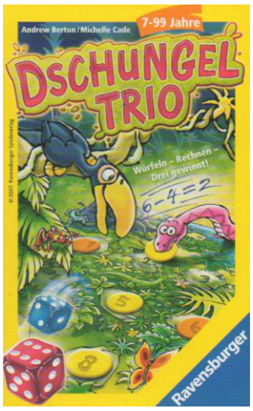
Avec des élèves, la manipulation des pièces sera à privilégier ! Comme dans le « puzzle à trois pièces » présent dans notre exposition « Objets Mathématiques », le déplacement d'une pièce permet de passer du rectangle au trapèze isocèle ou au parallélogramme ou au cerf-volant. Des transformations géométriques sont mises en œuvre.
Par ailleurs l'utilisation de trois triangles rectangles identiques pour réaliser un autre triangle rectangle est une situation riche en contenus mathématiques mis en œuvre.

retour au sommaire

MATHS & JEUX

DSCHUNGEL TRIO (LE TRIO DE LA JUNGLE)

François Drouin



Le jeu est commercialisé par Ravensburger depuis 2007. À tour de rôle, les deux joueurs lancent trois dés. Ils essaient d'obtenir un nombre du plateau nommé « grande jungle » en combinant par addition, soustraction, multiplication ou division les résultats obtenus avec les dés, puis placent un pion de leur couleur sur la « grande jungle ». Le gagnant est celui qui réussit à aligner trois pions de sa couleur. Le site ravensburger.de permet de retrouver les règles du jeu.

Les activités qui suivent sont des propositions à mettre en œuvre en classe, en préalable à une utilisation du jeu du commerce en autonomie ou lors de dispositifs d'aide aux élèves.

Une première feuille de calcul

Les trois dés ont été lancés, les nombres **3**, **6** et **2** sont obtenus. Quels résultats pourront être atteints ?

Premier calcul	Second calcul	Résultat final
		1
		2
		3
		4
		5
6 – **3** = 3	3 × **2** = 6	6
		7
		8
		9
		10
		11
		12
		13
		14
		15
		16

Pour obtenir le nombre 8

Imagine cinq autres lancers de dés permettant d'obtenir le nombre 8.

Premier calcul	Second calcul	Valeurs des trois dés
6 × **2** = 12	12 – **4** = 8	**6** ; **2** ; **4**

retour au sommaire

Pour obtenir un TRIO de la jungle (1)

Dans la grande jungle, les nombres 11 et 12 ont déjà été obtenus. Imagine trois autres lancers de dés permettant d'obtenir 10 et ainsi obtenir un alignement (un TRIO de la jungle).

Premier calcul	Second calcul	Valeurs des trois dés
4 × **4** = 16	16 – **6** = 10	**4** ; **4** ; **6**

Pour obtenir un TRIO de la jungle (2)

Dans la grande jungle, les nombres 7 et 10 ont déjà été obtenus. Imagine cinq lancers de dés permettant d'obtenir ainsi un alignement (un TRIO de la jungle).

Premier calcul	Second calcul	Valeurs des trois dés

Pour obtenir un TRIO de la jungle (2)

Les dès ont été lancés trois fois. Ont été obtenus **5** ; **6** ; **6**, puis **5** ; **5** ; **4**, puis **1** ; **6** ; **2**. Un alignement est réussi avec les résultats 7 ; 15 et 11. Trouve deux autres alignements de résultats pouvant être obtenus.

Premier résultat	Deuxième résultat	Troisième résultat
6 – **5** = 1 **6** + 1 = 7	**5** × **4** = 20 20 – **5** = 15	**6** × **2** = 12 12 – **1** = 11

Pour jouer en binôme

1		2		3		4
5		6		7		8
9		10		11		12
13		14		15		16

Chaque groupe de deux élèves a à sa disposition un tableau semblable à celui ci-contre.

À l'aide d'un crayon, il barre d'une croix le résultat des calculs obtenus à partir de ses lancers de dés et doit réussir à obtenir trois croix alignées. Les discussions à l'intérieur du groupe faciliteront le choix des nombres cibles à obtenir.

retour au sommaire

La petite jungle

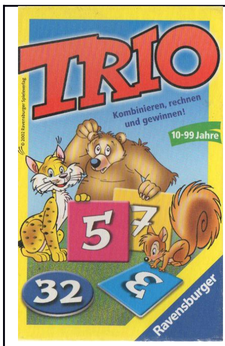
Les créateurs du jeu proposent également une « petite jungle » ne présentant que les entiers de 1 à 9. Seuls deux dès sont alors utilisés pour des résultant à obtenir à l'aide d'additions ou de soustractions. Si aucune combinaison ne permet d'obtenir un des nombres de la petite jungle, un des résultats du dé peut être utilisé.

Des étapes semblables à celles envisagées précédemment pour la « grande jungle » pourront être imaginées et mises en œuvre.

Compétences mises en jeu

Les créateurs destinent DSCHUNGEL TRIO à des joueurs de sept à quatre-vingt-dix-neuf ans.
À cause de l'utilisation de la division, la « grande jungle » ne sera utilisée qu'au début du cycle 3. Le jeu pourra être repris en fin de ce cycle puis au cours du suivant lorsque l'enchainement des calculs sera écrit en sollicitant l'usage des parenthèses. Il permet d'utiliser les quatre opérations et consolide les connaissances en calcul mental sur les nombres entiers. Les tableaux proposés dans les pages précédentes gagneront à être commentés et explicités en les projetant sur un écran.
Les nombres de « petite jungle » ne seront atteints qu'avec des additions ou des soustractions. Cependant les alignements à gérer risquent de perturber les élèves en début de cycle 2.
Une circonscription de Caen a mis en téléchargement une analyse du jeu en cycle 2. En 2010 - 2011, les élèves de ce cycle pouvaient être confrontés à des divisions par 2 ou 5. Il n'avait pas été envisagé de recherches préalables de TRIOS possibles suite à des lancers de dés.

Retours sur un autre jeu TRIO



Il a été créé en 2001 par Heinz Wittenberg.

Son utilisation en classe est présentée dans les brochures Jeux 5 et Jeux 6.
Le Bulletin Vert n°476 évoque dans la rubrique « dans nos classes » le dénombrement des TRIOS pouvant être obtenus à partir du placement des 49 cartes nombre.
Sur le site de l'IREM de Lyon, Arnaud Gazagnes a déposé des liens facilitant les utilisations avec des élèves.

Puisse DSCHUNGEL TRIO avoir le même succès !

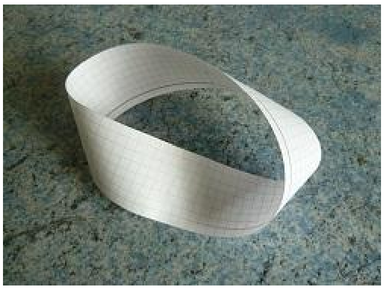
MATHS ET PLIAGES / DÉCOUPAGES

par Walter Nurdin

MÖBIUS EN CŒUR

Ferdinand Möbius (ou Moebius ou Mœbius) et Johann Benedict Listing ont inventé en 1858, indépendamment l'un de l'autre mais quasi simultanément, une structure qui ne possède qu'une seule face. La communauté scientifique a conservé le nom « d'anneau de Möbius » à cette construction en raison d'un mémoire décrivant l'anneau que Möbius avait déposé à l'Académie des sciences à Paris. Listing quant à lui donna son nom à une loi décrivant les orientations de l'œil dans une orbite mais est surtout connu pour être l'inventeur et le premier utilisateur du terme « topologie » dont il donna la définition.
Si l'on veut travailler en classe sur le seul anneau de Möbius vous pouvez lire les articles de Serge Parpay et Jean Fromentin tiré du plot n°22 [16] ou/et celui de Arnaud Gazagnes du plot n°107 série 4[17].Vous aurez alors la description d'au moins 13 situations différentes à mettre en œuvre.
Nous allons ici, après avoir vu les quatre manipulations fondamentales du ruban, prolonger ces articles en présentant d'autres découpages possibles en partant de deux bandes collées en forme de croix.

Manipulation 1



On obtient un ruban de Möbius en effectuant une torsion d'un demi-tour à l'une des extrémités et en les reliant entre elles.
Dans les classes, en prenant un feutre et en suivant l'axe médian on montre la propriété fondatrice de cette structure : le ruban ne possède qu'une seule face !
On aura préparé ce premier étonnement en ayant montré que si on relie les deux extrémités sans torsion il y a un bien un intérieur et un extérieur dans ce cylindre sans fond et sans couvercle .
Il faut alors profiter de cette observation pour montrer qu'elle est largement utilisée dans de nombreuses sphères de connaissances et disciplines voire même dans la « vraie vie ».

On retrouve le ruban comme logo des matières recyclables[18] pour en montrer l'infini en reconstruction.
On peut observer que le ruban a subi 3 demi-tours.

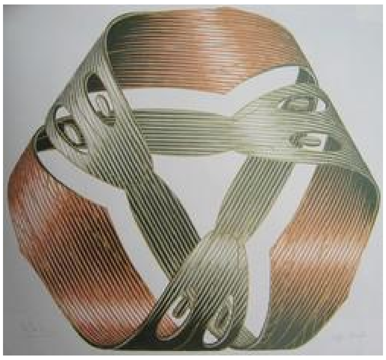
Comme sculpture. « Ruban sans fin »[19] de Max Bill à Anvers.
Un jeune Meusien, sculpteur et tailleur de pierre, puise une partie de son inspiration dans le ruban de Möbius.[20]

16 http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Mobius_Parpay.pdf

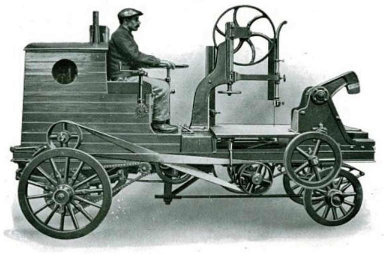
17 http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Ouvrez_le__ru_ban.pdf

18 https://fr.wikipedia.org/wiki/Symbole_du_recyclage

retour au sommaire



Comme peinture. « Ruban de Möbius »[21] par Escher à 3 demi-tours découpé dans son axe médian.



Dans l'industrie. Voici une scie à ruban (de Möbius) à un demi-tour[22].La propriété d'avoir une seule face fait que l'usure est uniforme.

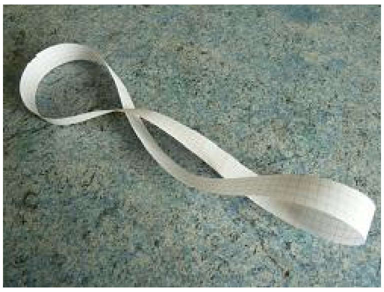
En architecture. La bibliothèque Nationale du Kazakhstan à Astana.[23]
Inspiré d'un ruban de Möbius à un demi-tour.

Dans des BD[24], en design[25], en poésie[26]...

On peut ainsi espérer éveiller la curiosité des élèves en ayant montré différentes utilisations du ruban et cette première propriété topologique inhabituelle.

Manipulation 2

On demande aux élèves ce qu'il va se passer si on coupe le ruban en suivant le trait médian tracé dans la première manipulation.
La réponse, que l'on a invariablement, est que l'on obtient, comme d'habitude, « évidement » deux objets qu'ils pensent généralement torsadés.
Torsadés est le cas, mais la surprise est d'obtenir un seul ruban !



On a ici une magnifique occasion de montrer que les mathématiques ne sont pas que dans l'évidence mais dans l'observation réfléchie.

19 http://mel.vadeker.net/arts/sculptures/ruban_mobius/sculptures_ruban_mobius.html
20 http://cappuccio-sculptures.fr/realisations.php?c=30&category=R%C3%A9alisations
21 https://www.mathcurve.com/surfaces/mobius/mobius.shtml
22 http://ronfleur.centerblog.net/6406113-Usine-Millot-Scie-a-ruban-avec-fendeuse-%C2%A9
23 http://projets-architecte-urbanisme.fr/bibliothque-nationale-kazakhstan-astana-big/
24 https://narrativesculptures.wordpress.com/tag/klein-bottle/
25 http://www.yankodesign.com/2010/10/18/a-strip-of-car/
26 http://www.unjourunpoeme.fr/poeme/lanneau-de-moebius

retour au sommaire

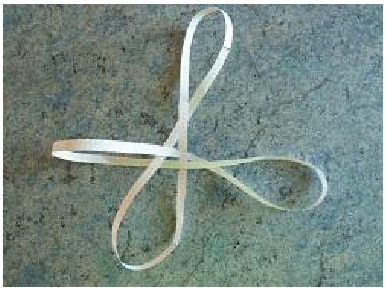
Manipulation 3

En renouvelant l'interrogation et l'opération découpage sur le ruban torsadé de longueur double du ruban initial (manipulation 2) la réponse est généralement :« On va encore obtenir un seul ruban deux fois plus grand ! comme juste avant !».

Les mathématiques seraient-elles résistantes à la tradition qui pouvait s'instaurer (on coupe en deux on obtient un) ?

Avec Möbius on peut répondre positivement à cette question puisque nous voici désormais avec deux objets entrelacés.

En général les questions fusent. Les élèves veulent une explication.



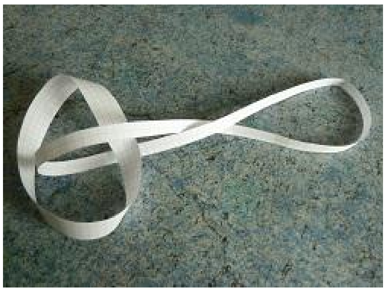
Une observation attentive du ruban après le premier découpage montre que l'objet comporte un nombre pair de demi-tours. On peut alors préciser qu'on est Möbius si les demi-tours effectués pour le construire sont en nombre impair. Le ruban après le premier découpage n'était donc pas de Möbius puisqu'il avait un nombre pair de demi-tour. Il est donc normal qu'il ne réagisse pas comme le ruban de Möbius (on coupe en deux, on récupère un seul objet).

En poursuivant l'observation sur les rubans obtenus dans cette dernière manipulation on constate que les deux objets sont différents : L'un est Möbius, l'autre non.

Manipulation 4

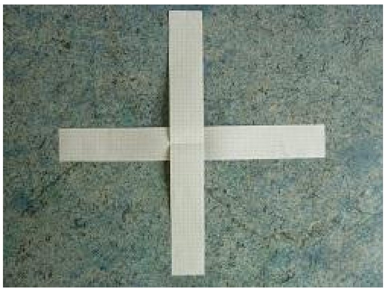
Plus déstabilisant : si l'on coupe un ruban de Möbius non plus sur l'axe médian mais au tiers extérieur on obtient deux structures.

On observe ici le ruban « extérieur » et « intérieur » (un tiers extérieur, deux-tiers intérieur).



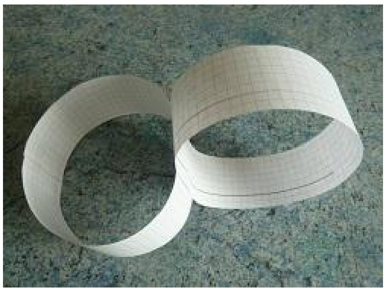
On va désormais poursuivre les découpages en entaillant dans l'axe médian ou au tiers une structure qui débute par la construction d'une « croix ».

On scotche les deux bandes.



Puis on les relie ainsi :

Deux cylindres ou deux Möbius (ici sens inversés)



retour au sommaire

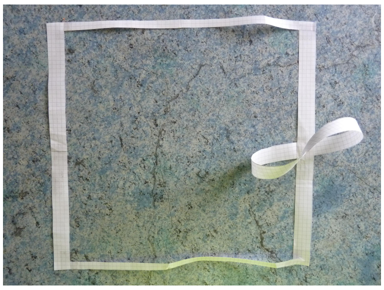
Ou deux Möbius dans le même sens ou encore l'un en cylindre l'autre en Möbius .

Les découpes pouvant se faire au tiers ou dans l'axe médian des deux structures (cylindre coupé dans l'axe médian, Möbius dans l'axe médian ou au tiers).

Manipulation 5

On recense avec les élèves les 7 cas et on organise une démarche systématique qui peut se faire en binôme. L'un construit, l'autre découpe. Du papier quadrillé aide aux entailles.
On obtient suivant les cas:

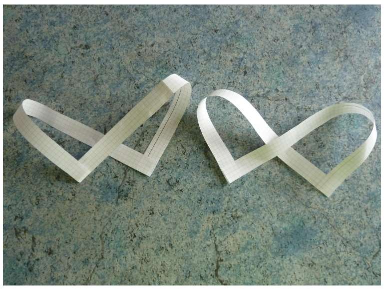
Un carré



Un carré et un ruban de Möbius libre.

Deux cœurs entrelacés

Deux cœurs et un « enfant » Möbius dans un cœur



Deux doubles « cœurs » séparés

On peut faire des pauses d'action avant les découpes pour demander aux élèves d'anticiper les résultats. Cela n'est pas facile en partant de l'objet initial mais on obtient des réponses lorsqu'on pose la question à mi-parcours quand le premier objet est découpé (un cylindre ou un seul Möbius).
Des variations de tailles (épaisseur ou longueur) interviennent suivant les découpes (au tiers, au milieu) mais on reste sur les 5 classes précédentes.

Attention, si jamais vous voulez faire une surprise amoureuse ne vous trompez pas de base. Les deux cœurs entrelacés n'ont pas la même empreinte symbolique que les deux doubles cœurs séparés ou les deux cœurs avec un Möbius « enfant ».

Enfin, si jamais vous avez un binôme efficient qui a fini avant les autres vous pouvez passer la commande des découpes des croix ayant des rubans de Möbius à 3 demi-tours.

Source : http://www.bibleetnombres.online.fr/musique_voyage_temps.htm

retour au sommaire

TROIS DÉFIS POUR NOS ÉLÈVES

Premier défi (n°131-a)

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	24	25

Voici une pyramide de nombres. Quels seront les nombres dans les cases oranges de la dixième ligne ? De la 2017ième ligne ? De la *n*ième ligne ?

Second défi (n°131-b)

Le concierge de l'immeuble où habite Cédric Villani a trois filles. Il s'adresse à Cédric en lui précisant que le produit de leurs âges est égal à 36 et que la somme de leurs âges est égale au numéro de l'immeuble qu'ils habitent. Cédric doit deviner leurs âges.

Après quelques instants de réflexion, Cédric se déclare incapable de deviner ces trois âges. Le concierge, tout heureux de le mettre en défaut, lui annonce qu'il va en parler à son ainée. À ces mots, Cédric Villani lui donne aussitôt l'âge des trois filles.

Et vous, avez-vous trouvé leurs âges ?

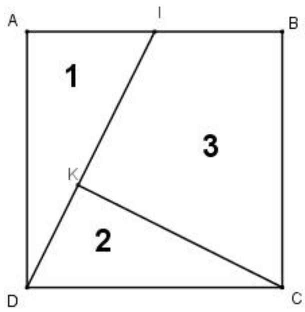
Troisième défi (n°131-c)

Dans la commune de Ville-la-Petite, il n'y a que 14 inscrits sur les listes électorales.
Au lendemain du référendum, qui posait la question « *Souhaitez-vous trouver un défi mathématique dans le bulletin municipal mensuel ?* », le journal local annonçait qu'il y avait eu 83,33 % de OUI.

Peux-tu dire combien de personnes ont voté OUI ?

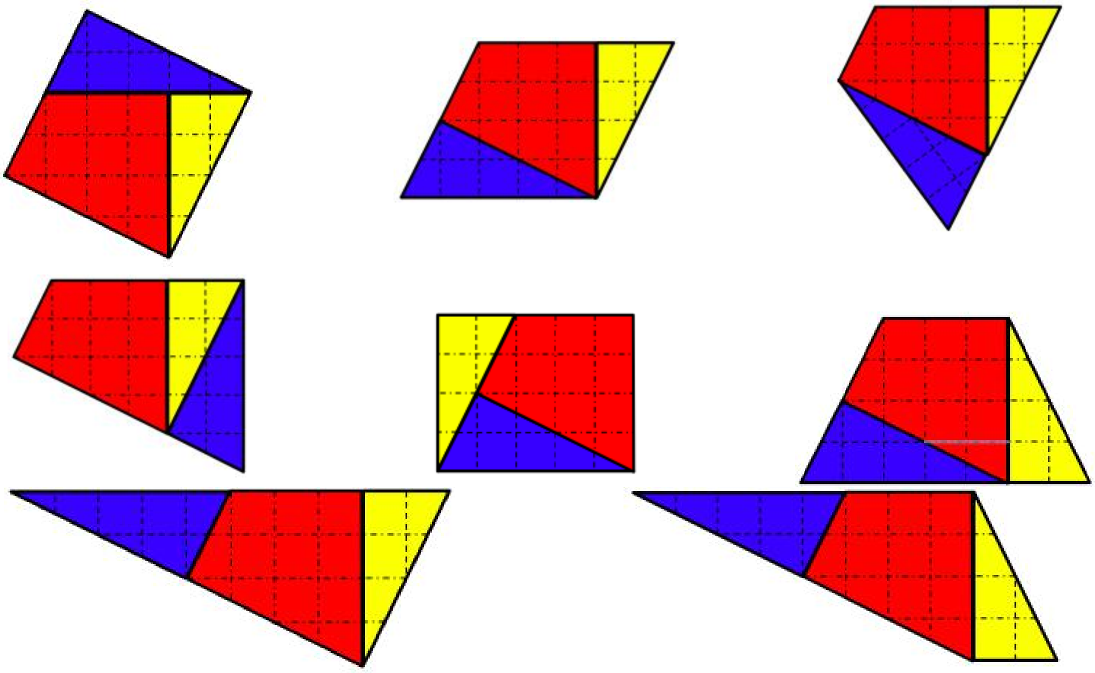
retour au sommaire

SOLUTION DU DÉFI « JEUNES ÉLÈVES » DU PV130



ABCD est un carré. I est le milieu du côté [AB]. La droite perpendiculaire à la droite (ID) passant par le point C coupe la droite (DI) en K. Le puzzle est constitué des trois pièces « 1 », « 2 » et « 3 ». En utilisant ces trois pièces, combien de quadrilatères différents peut-on obtenir ?

Les pièces coloriées et quadrillées utilisées ci-dessous sont celles évoquées en particulier dans le Petit Vert n°127.



Considérer qu'un triangle est un quadrilatère dont un côté a une longueur nulle est sans doute contestable. Cependant, cette configuration nous a permis de découvrir un troisième trapèze !

D'autres quadrilatères peuvent-ils être obtenus ?
Une manipulation exhaustive des pièces nous fait penser que la collection est maintenant complète. Les lecteurs du Petit Vert peuvent nous contredire !

retour au sommaire

SOLUTIONS DES DÉFIS DU n°130

Merci à tous ceux qui nous ont envoyé des propositions de solutions ou des algorithmes

Rappel du deuxième défi (130-a) : Le roi et ses sujets

Il était une fois un roi qui régnait sur un tout petit royaume : 177 sujets majeurs (que nous nommerons sujet 1, sujet 2, sujet 3, … sujet 177). Après avoir lu les œuvres de Platon, il décida de régner "démocratiquement" en s'entourant d'un conseil de 17 membres, tirés au sort.

Il procéda comme suit : il se plaça au centre de la cour de son château, et ses sujets se placèrent autour de lui en formant une ronde (dans l'ordre : sujet 1, sujet 2, … sujet 177).
Le roi pointa du doigt ses sujets un par un (en commenant par le sujet 1) en récitant cette comptine de 15 syllabes :
« **Ce/se/ra/toi/qui/siè/ge/ras/dans/mon/con/seil/au/cha/teau** ».
A la quinzième syllabe, le sujet visé quitte la ronde et vient se placer auprès du roi.
Et le roi continue sa ritournelle à partir du sujet suivant, jusqu'à ce qu'il ait recruté son conseil de 17 membres.

Le défi était le suivant : quel est le nom du dix-septième sujet "recruté" ?

Solutions de ce défi

Première proposition, d'André Stef. Il y a 177 personnes : 177 = 11x15 + 12, donc 11 recrutés avant de commencer un second tour (et 12 sujets n’ont pas encore été pris en compte dans la comptine : les « sujets » de 166 à 177). Après le 11ème barré, il « reste » à compter 6x15 = 90 sujets non barrés, soit 90-12 = 78 dans le second tour. Comme sont déjà barrés : 15, 30, 45, 60, 75, le 78ème est donc le sujet 83.

Le 17ème sujet recruté est donc le sujet 83.

De manière plus générale : dans la liste de *n* sujets, on peut, en barrant de *p* en *p*, chercher le *k*-ème sujet barré.

Voici alors une fonction SCILAB réalisant ce calcul.

```
function [chaine]=sortiech(n, p, k)
    //  longueur n , modulo p, element k barres*
    for i=1:n
        c(i)=i
    end;
    x=0;
    for i=1:k
        compte=0;
        while compte<>p
                x=x+1;
                if x>n then
                     x=x-n;
                     end;
                if c(x)==x then
                     compte=compte+1;
                      end;
                end;
        c(x)=0;
        end
    chaine=x;
    endfunction;
```

retour au sommaire

Voici un algorithme pour résoudre ce défi, ainsi que le programme Python correspondant

```
Variables :
n, entier (nombre de sujets)
k, entier (nombre de membres)
p, entier (nombre de syllabes)

Déclarations :
c: tableau d'entiers [de 1 à n]
i: entier ; compte : entier.

Saisir n, k et p.
Pour i allant de 1 à n+1 mettre i dans le tableau c
(fin de la boucle pour)
Pour i allant de 1 à k+1, mettre compte à 0
  Tant que compte ≠ p faire :
    Si n ≥n remplacer x par x-n
    Si c[x]=0 remplacer par x+1
    Ajouter 1 à compte
    Ajouter 1 à x
    (fin de la boucle "tant que")
  Remplacer c[x-1] par 0
(fin de la boucle pour)

Fin de l'algorithme
```

Le programme en Python :

```
defsortiech(npk) : #longueur n, modulo p, element k barres
c=[]
for i in range(1,n+1):
  c.append(i)
x=0
for i in range(1,k+1):
  compte=0
  while compte<p:
    print("compte",compte)
    print("x",x)
    if x>=n :
      x=x-n
    if c[x]==0 :
      x=x+1
    compte=compte+1
    x=x+1
  c[x-1]=0
  print(c)
return x
n=int(input("Nombre de sujets :"))
p=int(input("Nombre de syllabes :"))
k= int(input("Nombre de membres :"))
print("Le numéro du ",k,"-ième membre est ",
                                   sortiech(n,p,k)
```

Et enfin un programme en Algobox :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE LISTE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  compte EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  LIRE p
  LIRE k
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    c[i] PREND_LA_VALEUR i
    FIN_POUR
  x PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A k
    DEBUT_POUR
    compte PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (compte!=p) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      x PREND_LA_VALEUR x+1
      SI (x>n) ALORS
        DEBUT_SI
        x PREND_LA_VALEUR x-n
        FIN_SI
      SI (c[x]==x) ALORS
        DEBUT_SI
        compte PREND_LA_VALEUR compte+1
        FIN_SI
      FIN_TANT_QUE
    c[x] PREND_LA_VALEUR 0
    FIN_POUR
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

Solution du premier défi du PV130

Rappel de ce défi : Combien y a-t-il de zéros dans la liste des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 2017 (inclus) ?

Une première solution consiste à compter « à la main » l'ensemble des zéros... mais en s'y prenant intelligemment (pas question d'écrire les 1017 nombres et compter leurs zéros !). Nombres avec un seul zéro :

- au chiffre des unités (10, …, 90, puis 110, …, 990, puis 1101, …, 1901) soit 171 zéros
- au chiffre des dizaines (101, ...909 puis 1101, …, 1901) soit 162 zéros
- au chiffre des centaines (1011, …, 1099 puis 2011, …, 2017) soit 88 zéros

Soit au total 421 zéros

Nombres avec deux zéros :

- au chiffre des dizaines et celui des unités (100, …, 900, puis 1100,…, 1900) soit 36 zéros
- au chiffre des centaines et celui des unités (1010, …, 1090, puis 2010) soit 20 zéros
- au chiffre des centaines et celui des dizaines (1001, …, 1009, 2001, …, 2009) soit 36 zéros

Soit au total 92 zéros

Nombres avec trois zéros :

- dans le chiffre des centaines, des dizaines et des unité : 1000 et 2000, soit 6 zéros.

Au total, **519 zéros**

Une autre méthode serait d'utiliser l'informatique.

- Avec Scratch :

- avec python :

```
from math import*

def nombrezeros (n):
    puis=10
    compt=0
    quotient=0
    while n>=puis:
        for i in range(puis,n+1):
            reste=i%puis
            quotient=(10*reste)//puis
            if(quotient==0):
                compt=compt+1
        puis=puis*10
    return compt

print(nombrezeros(2017))
```

retour au sommaire

- avec Algobox :

```
VARIABLES
  entier EST_DU_TYPE NOMBRE
  nombreDeZero EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  //de 1 à 99, c'est évident
  nombreDeZero PREND_LA_VALEUR 9
  POUR entier ALLANT_DE 100 A 999
    DEBUT_POUR
    //on teste le chiffre des unités
    SI (entier%10==0) ALORS
      DEBUT_SI
      nombreDeZero PREND_LA_VALEUR nombreDeZero+1
      FIN_SI
    //on teste le chiffre des dizaines
    SI ((floor(entier/10))%10==0) ALORS
      DEBUT_SI
      nombreDeZero PREND_LA_VALEUR nombreDeZero+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  POUR entier ALLANT_DE 1000 A 2017
    DEBUT_POUR
    SI (entier%10==0) ALORS
      DEBUT_SI
      nombreDeZero PREND_LA_VALEUR nombreDeZero+1
      FIN_SI
    SI ((floor(entier/10))%10==0) ALORS
      DEBUT_SI
      nombreDeZero PREND_LA_VALEUR nombreDeZero+1
      FIN_SI
    //on teste le chiffre des centaines
    SI ((floor(entier/100))%10==0) ALORS
      DEBUT_SI
      nombreDeZero PREND_LA_VALEUR nombreDeZero+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  AFFICHER nombreDeZero
FIN_ALGORITHME
```

- avec Scilab :

Principe : M a un zéro à la place k dans son écriture $n = a_i\ a_{(i-1)}\ ....\ a_1\ a_0$ en base 10 (attention : avec k compris entre 0 et i-1) si le reste r de la division euclidienne de M par 10^{k+1} est strictement inférieur à 10^k. Il reste alors à faire une double boucle et compter.
Application de cette fonction scilab à n = 2017 :

```
function [y]=nombredezeros(n)
    compt=0
    for i=1:n
        li=floor(log10(i))
        for j=1:li
            if (modulo(i,10^(j))<10^(j-1))
                      compt=compt+1
                            end
            end
    end
    y=compt
endfunction
```

On en trouve 519 également (heureusement !)

retour au sommaire

SOLUTION DU PROBLÈME n°130

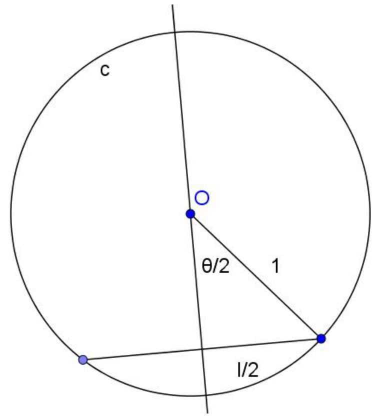
Rappel de l'énoncé (*problème proposé par Philippe Févotte*) : on considère un cercle C de rayon 1, un point A intérieur au cercle C, un point B extérieur à ce cercle ainsi qu'une longueur l donnée.

Peut-on déterminer deux points *M* et *N* du cercle $\mathcal{C}$ tels que les droites (*AM*) et (*BN*) soient parallèles et que MN = *l ?*

SOLUTION

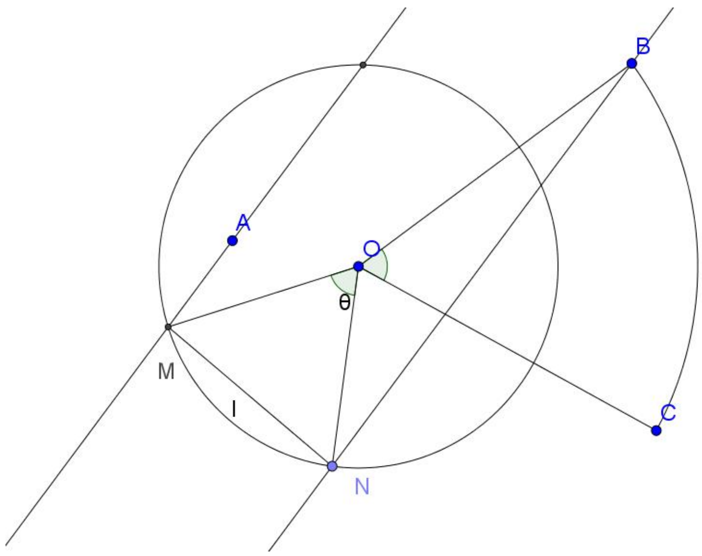
Deux remarques :

- si $l > 2$ le problème n'a pas de solution ; on suppose dans la suite que $l \leqslant 2$
- la longueur $l \leqslant 2$ définit la mesure $\theta \in [0 ; \pi]$ d'un angle au centre, telle que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{l}{2}$



Analyse

Supposons le problème résolu ; on a $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \theta\ (2\pi)$ ou $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = -\theta\ (2\pi)$. A une symétrie par rapport un diamètre près, on peut choisir les points tels que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \theta\ (2\pi)$



On considère la rotation *r* de centre *O* et d'angle θ ; elle transforme *M* en *N* et on note *C* l'antécédent de *B* par cette rotation.

retour au sommaire

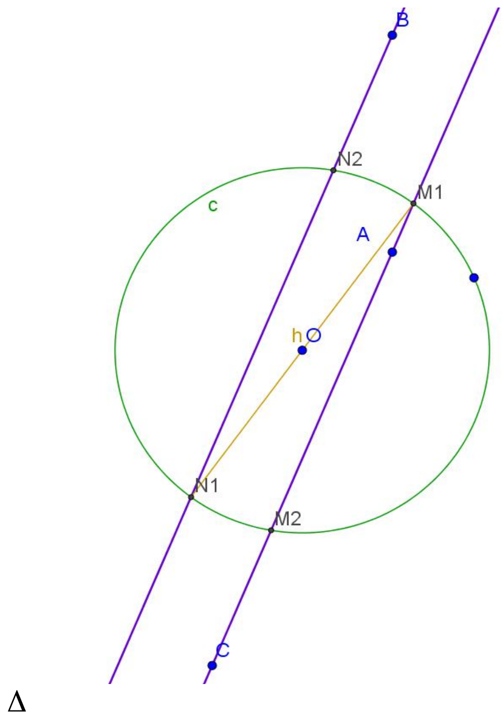
Par conséquent $\overline{(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BN})} = \theta\ (2\pi)$ et $\overline{((CM),(BN))} = \theta\ (\pi)$. Or les droites (*BN*) et (*AM*) sont parallèles ; on en déduit que $\overline{((CM),(AM))} = \theta\ (\pi)$ et par conséquent, :

- si $\theta = 0(\pi)$ le point *M* appartient à la droite (*AC*)
- si $\theta \neq 0(\pi)$ le point *M* appartient au cercle capable « d'où l'on voit A et C sous un angle de mesure $\theta(\pi)$ »

Synthèse

Premier cas : $l = 2$

Dans ce cas, avec les notations précédentes, $\theta = \pi(2\pi)$; *C* est le symétrique de *B* par rapport à *O* ; Soit Δ la droite passant par B et parallèle à (*AC*), cette droite est symétrique de la droite (*AC*) par rapport à *O* et les points d'intersection de ces droites avec le cercle C sont donc symétriques par rapport à *O*. Deux de ces points symétriques sont les points *M* et *N* cherchés.



Second cas : $l < 2$

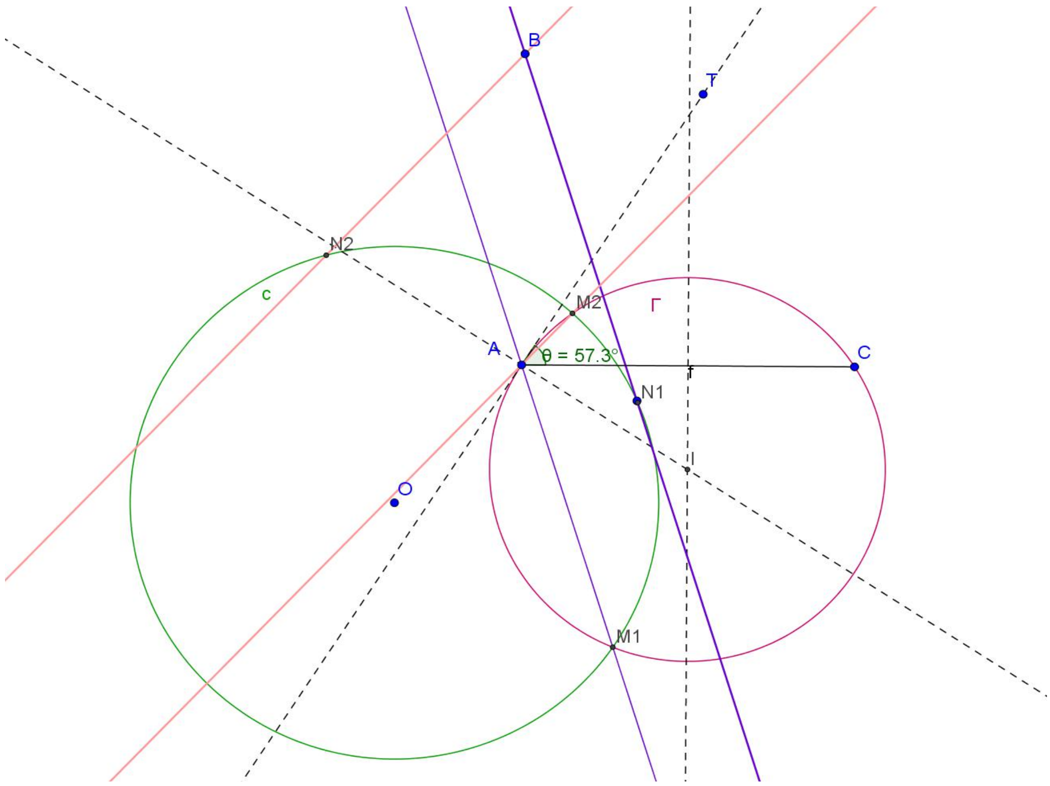
notons Γ le cercle capable associé aux points C et A et à la mesure θ définie en préliminaire. Soit M un point de $C \cap \Gamma$; on a donc $\overline{((MC),(MA))} = \theta\ (\pi)$ (1)

On considère la rotation *r* de centre *O* et d'angle θ ; elle transforme *M* en *N* et on note *C* l'antécédent de *B* par cette rotation. On a donc $\overline{((MC),(NB))} = \theta\ (\pi)$ (2)

Des égalités (1) et (2) on déduit que les droites (*AM*) et (*BN*) sont parallèles et on sait par construction que $MN = l$

On donne ci-dessous la construction des points M et N, faisant apparaître deux couples solution.

retour au sommaire



PROBLÈME DU TRIMESTRE n° 131

problème proposé par Jacques Choné

Les nombres de Fibonacci sont les termes de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$f_0=0$, $f_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$.

Est-il vrai que la somme des carrés de deux nombres de Fibonacci consécutifs soit toujours un nombre de Fibonacci ?

Le responsable de cette rubrique est philippe.fevotte@wanadoo.fr.
Lui envoyer vos propositions de solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

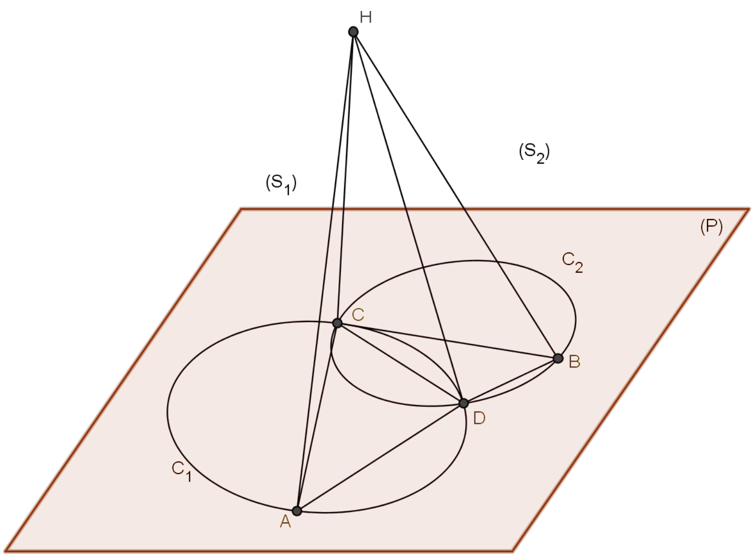
LE SOPHISME DU TRIMESTRE (n° 131)

La définition du dictionnaire Robert est la suivante : « *Argument, raisonnement faux malgré une apparence de vérité* ». Pour étudier ces sophismes, il est recommandé de faire les figures « à main levée », même si elles ne sont pas tout a fait exactes.
Le Petit Vert vous proposera régulièrement des sophismes, comme celui qui suit. Envoyez toute nouvelle proposition à jacverdier@orange.fr.

Théorème :
D'un point extérieur à un plan, on peut mener plusieurs perpendiculaires à ce plan.

On considère un plan (P), deux points quelconques A et B de ce plan, et un point H extérieur à ce plan. La sphère S_1 et la sphère S_2, de diamètres respectifs [HA] et [HB], coupent le plan (P) selon deux cercles C_1 et C_2 ; ces deux cercles se coupent en C et D.
(N. B. : Les deux sphères ne sont pas représentées sur la figure ci-dessous)

On trace les segments [HA], [HB], [HC] et [HD].



Le plan (HAC) coupe la sphère S_1 suivant un cercle (de diamètre HA) ; l'angle HCA, inscrit dans un demi-cercle, est donc droit. De même, HCB est droit.
La droite (HC), perpendiculaire à deux droites (AC) et (CB) du plan, est donc perpendiculaire à ce plan.

De la même façon, l'angle HDA est inscrit dans un demi-cercle, donc droit, tout comme l'angle HDB. La droite (HD) est donc elle aussi perpendiculaire à (AD) et à (DB), donc perpendiculaire au plan (P).

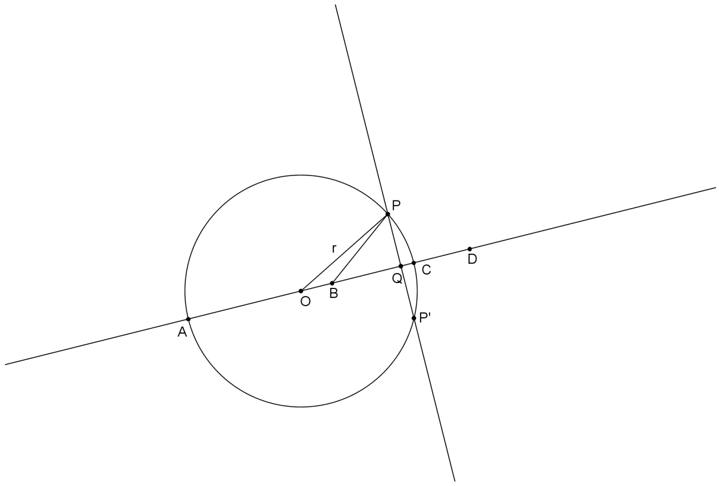
On a donc tracé deux droites distinctes (HC) et (HD), toutes deux normales au plan (P).

Ce sophisme est extrait de « Mathesis », ouvrage de G. Gille publié en 1919.

retour au sommaire

SOLUTION DU SOPHISME n° 130

Théorème : **Tout point à l'intérieur d'une circonférence se trouve sur cette circonférence.**



Voir l'énoncé dans le Petit Vert n°130.

Tous les calculs proposés étaient corrects : l'erreur n'était pas là ; ces calculs assez longs n'avaient pour objet que de « noyer le poisson ».

En effet, si on a la proportion $\frac{BA}{BC}=\frac{DA}{DC}$, il est assez facile de montrer que le milieu Q de [BD] se trouve à l'extérieur de cercle.

La médiatrice de [BD] est donc à l'extérieur du cercle, les points P et P' n'existent pas, pas plus que les triangles rectangles OQP et BQP...

On pourrait proposer ce « théorème » à des élèves de lycée (à partir de la première) en leur demandant de chercher où est l'erreur. Il est fort probable qu'ils ne penseront pas que le dessin donné est faux. On peut alors leur proposer l'aide suivante : sur l'axe (AB), en prenant un repère d'origine O et d'unité OC = 1, b étant l'abscisse de B ($0 < b < 1$), calculer en fonction de b l'abscisse d du point D puis l'abscisse q du milieu Q de [BD].

On obtiendra $q=f(b)=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$. La fonction correspondante est représentée par un arc d'hyperbole, décroissante pour $0 < b < 1$, et atteignant son minimum (égal à 1) pour $b = 1$. On en conclut donc que $q > 1$, et que la figure est fausse...

Pour le professeur : voir http://iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/1G.pdf
et http://fr.wikipedia.org/wiki/Division_harmonique#Conjugu.C3.A9_harmonique (qui donne la construction du quatrième point quand on connait les trois premiers).

Dans le cas de cet exercice, on peut aussi utiliser la « relation de Newton » $OA^2=OB^2=\overline{OB}.\overline{OD}$

ce sophisme est extrait d'un ouvrage de paul gustav stäckel, « archiv der mathematick und physik », publié en 1907.

retour au sommaire

Annonce : paradoxes en classe de seconde

L'IREM de la Réunion a publié une expérimentation de paradoxes mathématiques au lycée en classe de seconde. Les énoncés des activités proposées aux élèves et une analyse préliminaire des productions d'élèves sont détaillés dans ce document :

http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article116 .

En annexes se trouvent des extraits de ces productions, le questionnaire soumis aux élèves après l'expérimentation et le dépouillement de leurs réponses.

Comment mentir avec un graphique

Lorsqu'il s'agit de communiquer des chiffres, qu'ils soient financiers, électoraux, démographiques, sportifs, scientifiques ou bien d'autres choses encore, tout le monde s'accordera pour dire qu'il n'y a rien de mieux qu'un graphique. Il est aujourd'hui difficile de trouver un journal qui ne contienne pas au moins une infographie ou un rapport d'activité quelconque qui ne soit pas truffé d'histogrammes et autres graphiques en "tarte" (*pie chart* en anglais). Et bien que la plupart des graphiques choisis soient particulièrement élémentaires - on trouve rarement autre chose qu'un graphique en ligne, un histogramme ou un graphique en tarte -, ils sont souvent mal utilisés. On voit souvent un graphique en ligne là où on aurait du voir un histogramme, certes, mais ça n'est pas le sujet de cet article. Très souvent, la réalité est tronquée, par malhonnêteté ou par ignorance, induisant une perception exagérée de ce que l'auteur veut mettre en avant. Voici quelques exemples glanés au fil de nos recherches, illustrant comment l'on essaye chaque jour de nous tromper.

Lire la suite ici