N° 146 Juin 2021

LE PETIT VERT

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

La réforme du lycée

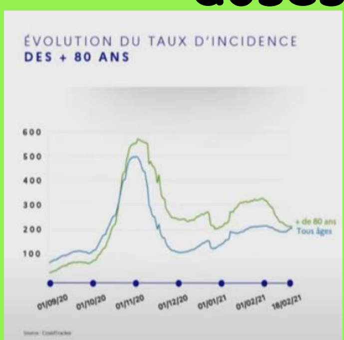
Remède miracle ?

Ça pique un peu !

Vaccin

« Astra Mathéka »

Tout le programme en 3 doses



www.apmeplorraine.fr

SOMMAIRE

Retour au sommaire

ÉDITORIAL

UNE NÉCESSAIRE ADAPTATION

Gilles Waehren

Ce deuxième confinement de toutes les classes du Primaire et du Secondaire a malheureusement démontré que, si les professeurs avaient fourbi leurs armes pour une nouvelle épreuve de l'enseignement à distance, l'institution, elle, n'était pas vraiment prête. Non pas tant sur le plan organisationnel, que le monde entier envie à notre administration, que sur le plan technique pour lequel les moyens ont à nouveau été sous-dimensionnés. Les Mosellans se rappelleront, avec une larme à l'œil, l'épisode du client léger : une bonne idée très mal mise en œuvre. Après le centralisme démocratique, la France a inventé le centralisme numérique, dans une société où on découvre, comme dans nos classes, que la différenciation en termes d'usage de l'informatique est essentielle.

De nombreux établissements ont mené, ou sont en train de mener, une réflexion sur l'uniformisation des pratiques des mises à disposition du travail à distance. Il est sûr que parents et élèves sont quelque peu perdus dans une telle diversité des approches : tel collègue utilise exclusivement le cahier de textes en ligne, tel autre met tous ses documents sur l'ENT, tel autre fonctionne uniquement avec Moodle. Assez convaincu que ce dernier procédé est le mieux adapté, je pense souvent que le meilleur outil est celui dont on arrive le mieux à se servir. Pour ceux qui ont lu mes précédents éditos, vous connaissez mon sentiment profond : pour qui ne s'y est pas intéressé par goût personnel, en autodidacte, l'apprentissage de l'informatique est le parent pauvre de la formation. L'illusion de son apparente facilité continue d'être la source de conflits rentrés entre professeurs et élèves, professeurs et administration.

On entend aussi que cette auto-formation, imposée par les événements et tant attendue par le ministère, a bouleversé les pratiques des enseignants, qui vont désormais changer leurs méthodes. Mais la situation est exceptionnelle. Nombre d'entre nous, comme l'ensemble de la population française, attendent que cette vie inhabituelle prenne fin pour continuer à faire comme avant. Je ne sais pas vraiment si cela sera possible – cela dit entre nous. Que l'enseignant va-t-il conserver de ce fonctionnement de confinement ? L'utilisation des classes virtuelles ? Je pense que tout le monde a compris que le rêve de certains élus de remplacer les professeurs par des écrans a enfin été réalisé et a vite tourné au cauchemar. Le lien social avec l'élève, avec la classe, est aussi important que le contenu de cours qu'on voudrait mettre sur un piédestal. Ce lien ne peut se tisser qu'en présentiel : le théâtre à la télévision n'a pas la même saveur que dans la salle de spectacle.

Certains d'entre nous conserveront l'habitude de mettre les contenus de cours en ligne. Peut-être le faisaient-ils bien avant 2020. Pour le pratiquer depuis de longues années, je peux affirmer que peu d'élèves utilisent Internet pour retrouver un cours de mathématiques. On peut croire que c'est une habitude scolaire qui va changer chez les élèves, si leurs professeurs s'y mettent.

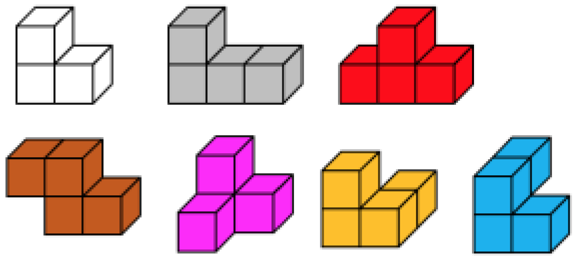
Voilà mes réflexions pour le côté outillage. Pour le fonctionnement pédagogique, ce changement des us a été, certes, radical et va entraîner des modifications profondes, mais à long terme. Comment mieux accompagner mes élèves et les rendre en même temps plus autonomes ? Comment tenir compte de leur diversité intellectuelle ? Comment les évaluer pour qu'ils progressent ? Comment être bienveillant sans être protecteur ? Ces questions ne datent pas du confinement, mais elles nous touchent davantage aujourd'hui. Les réponses restent personnelles, mais le collectif collégial permettra sûrement d'en débattre et d'ouvrir des pistes.

Beaucoup de problématiques dans les cours à distance sont très spécifiques aux disciplines : écrire des formules mathématiques, expliquer une manipulation en TP, pratiquer l'oral en langues. Cependant, les échanges en salle des profs montrent aussi des besoins transdisciplinaires. Si cette période difficile pouvait modifier nos habitudes, ce serait en renforçant la cohésion pédagogique dans les établissements par le partage et l'échange, en dehors des cadres formalisés.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

IL Y A 25 ANS



Voici un extrait d'un article du Petit Vert 46 de mars 1996.

En 1936, pendant quelque (ennuyeuse ?) conférence, le danois Piet HEIN réfléchit aux solides formés de 3 ou 4 cubes identiques. Il ne garda que ceux qui n'étaient pas des parallélépipèdes et obtint 7 pièces constituées d'un total de 27 cubes, autant que dans un cube 3x3x3.

Le cube SOMA n'a pris aucune ride avec vingt-cinq années supplémentaires. Nos joueurs invétérés de la Régionale continuent de l'explorer sous toutes ces faces et proposent des activités en classe.

Les soixante-dix ans du cube ont été fêtés avec la construction de solides paraissant être réalisés avec plus de vingt-sept cubes. Ce sont des constructions de prismes que l'on découvre avec le cube SOMA dans le PV125.

En Sixième les élèves découvrent les pièces du cube SOMA et travaillent également la représentation en perspective cavalière. À l'école élémentaire, les « pavés accolés » ont été observés et analysés par les élèves de CM1-CM2.

Dans le Petit Vert 141 François Drouin nous propose, étape par étape des manipulations et des visions dans l'espace de ce cube.

Dans le Petit Vert 143, la présentation du jeu CUBISSIMO a permis de créer des liens entre les solides réalisables avec les pièces de ce jeu et celles du cube SOMA.

Autres ressources APMEP

La Régionale de Toulouse propose des activités pour aller au-delà de celles présentées dans Jeux 5 ainsi que des fichiers permettant la fabrication des pièces.

Sur le site de l'APMEP, dans la rubrique « Nos collègues et leurs élèves jouent » des activités utilisables dès le cycle 3 feront travailler la vision dans l'espace chez ces élèves. On trouve également informatisées des propositions de Claude Pagano qui aimait venir jouer avec nous en Lorraine.

Et ailleurs ?

Le cube SOMA a les honneurs de Wikipédia.

Le site de Thorleif Bundgaard est régulièrement mis à jour. Il peut être considéré comme une référence.

Dans ce site allemand, l'espace consacré au cube SOMA est riche. Des dessins d'assemblages sont proposés : cliquer dessus fournit une vidéo d'une solution. On y trouve aussi de quoi utiliser une imprimante 3D.

Ce jeu pédagogique créé par Ueli Hirt et Sandra Lugenbühl est utilisé dans les *grundschule* (écoles primaires) de nos voisins allemands. Il n'a pas encore fait son entrée dans les classes françaises, cela se fera peut-être un jour.

Signalons tout de même que des adhérents lorrains ont animé des ateliers autour du cube SOMA pour une dizaine de classes de CM en Moselle.

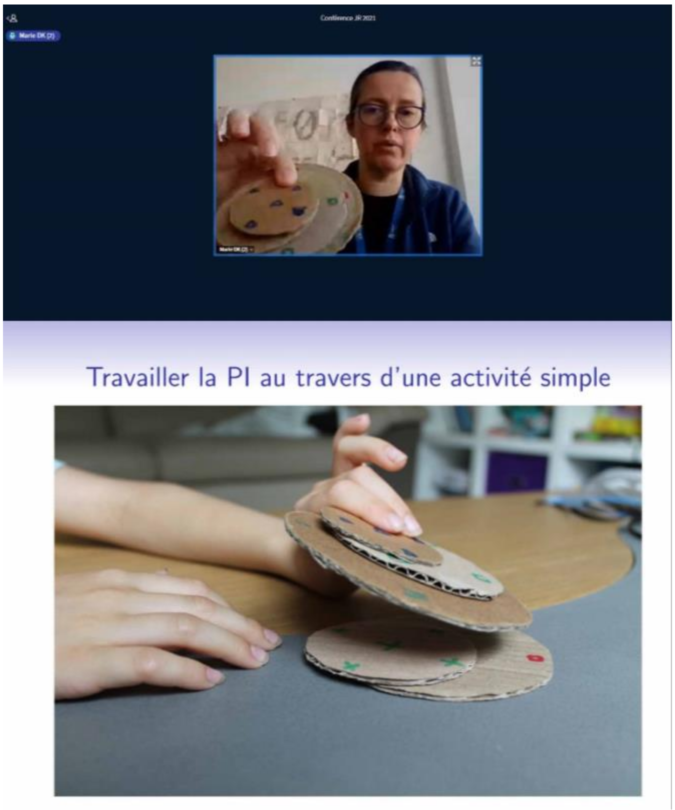
Longue vie aux sept pièces du cube SOMA !

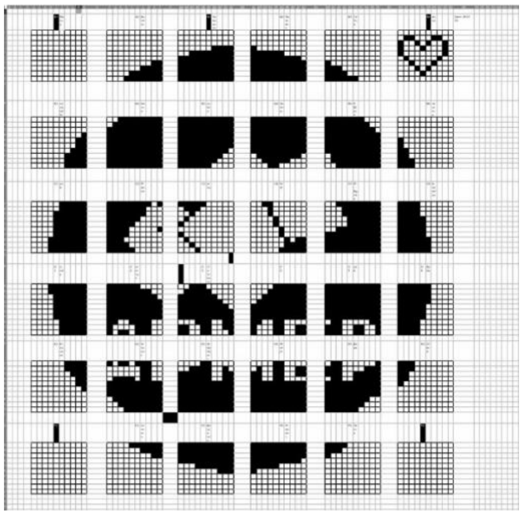
Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

JOURNÉE RÉGIONALE 2021

Et oui elle a bien eu lieu notre journée régionale regroupant … à distance… une centaine de participants ! C'est fou les facultés d'adaptation des profs de maths et des membres de l'APMEP ! Que Valérie, Christelle et Fathi soient vivement remerciés pour leur travail !



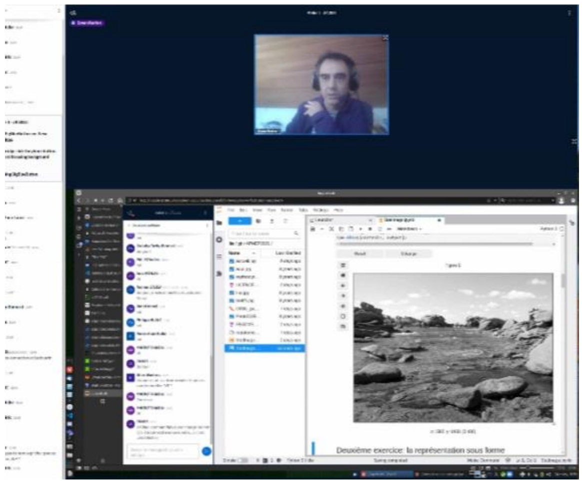


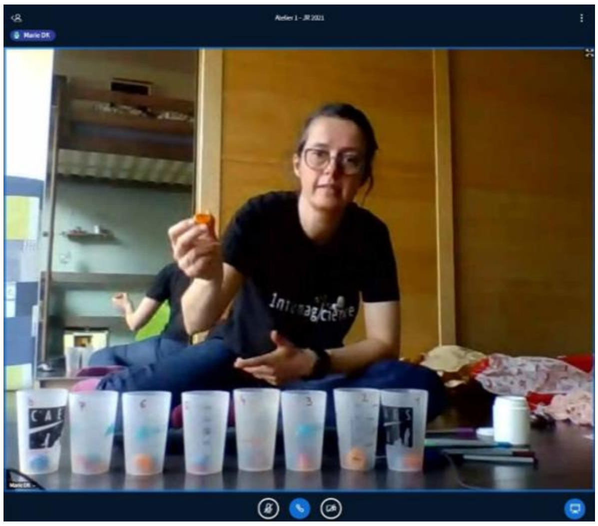
La conférencière Marie Duflot a passionné son auditoire avec la « Pensée informatique » et a su grâce à son dynamisme faire collaborer trente-six participant·es pour construire le logo de l'APMEP !

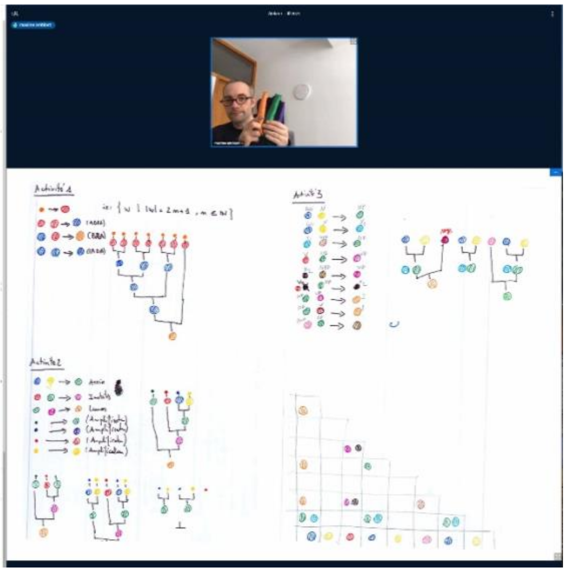
Des votes à l'unanimité ont été recueillis lors de l'assemblée générale, animée par notre président Gilles Waehren. Le comité régional se réjouit vivement d'accueillir en son sein trois jeunes enseignants.

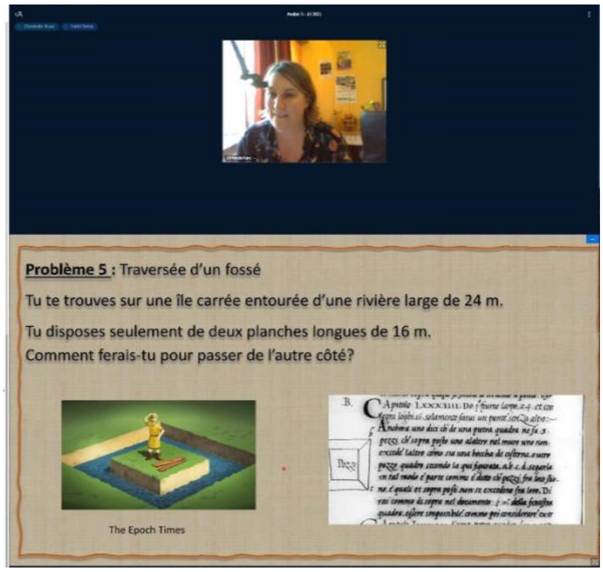
Les ateliers ont connu également un vif succès. Que ce soient les animateurs, très à l'aise avec les partages d'écran, les sondages, les changements de logiciel, le partage de salles, les échanges avec leur auditoire ou les « spectateurs » très acteurs, tout le monde a su faire naître une belle convivialité comme si on était vraiment ensemble !

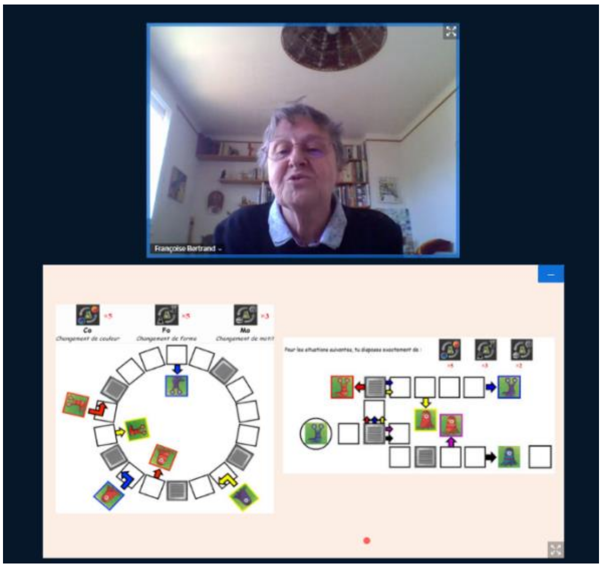
Retour au sommaire

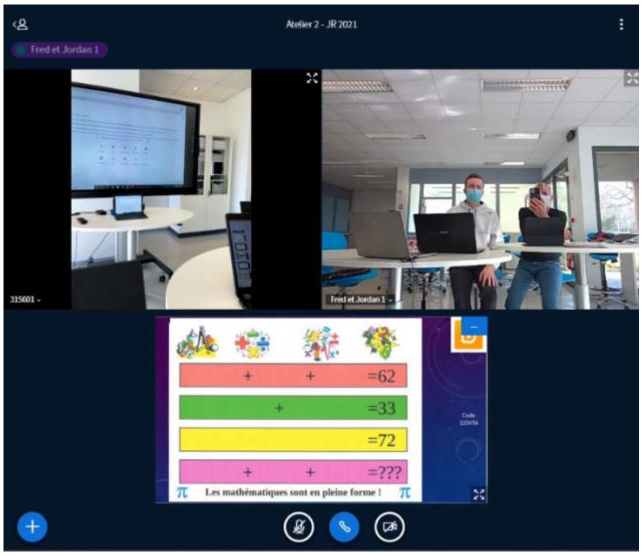












L'enthousiasme de l'[atelier](#) « A-t-on le temps d'intégrer l'histoire dans notre enseignement ? » est tel qu'un atelier se poursuit par un goûter.

[Retour au sommaire](#)

Demandez le programme de la journée régionale !

Cette belle journée s'est terminée par un bref debrief avec les membres du nouveau comité et les animateurs·trices des différents ateliers.

Parmi nos fidèles amis, un belge et une lorraine nous ont témoigné leur satisfaction.

« Le plaisir d'entendre et aussi d'être reconnu fait un plaisir énorme. Merci pour votre organisation et merci à votre conférencière et à son atelier. Son exposé a-t-il été enregistré si oui j'aimerais le revoir car expliquer ce qu'elle a raconté serait mieux si je pouvais le montrer à mes collègues pour la proposer pour une plénière lors d'un futur congrès en présentiel. »

« Un petit mot pour vous dire que j'ai été impressionnée par la journée régionale à distance. Qualité des interventions, comme toujours, mais ce qui m'a surtout surprise c'est l'interactivité permise par l'outil utilisé, la façon dont les intervenants ont exploité cette possibilité et aussi l'aisance avec laquelle tous les participants s'en sont emparés pour interagir. J'ai pu observer à quel point les enseignants ont développé leurs compétences informatiques, sans doute l'enseignement à distance pendant le confinement y a-t-il très largement contribué !

Tout a bien fonctionné, pas un bug (même si j'ai eu du mal à me connecter le matin, mais cela à cause de mon matériel). J'image qu'il y a eu un énorme travail de préparation auparavant. Alors pour tout cela, je voulais vous adresser un grand BRAVO ! Et un grand MERCI ! »

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

COMPTE-RENDU DE LA COMMISSION LYCÉE (19 MARS 2021)

BILAN DE L'ANNÉE 2019 – 2020

ÉLÈVES : HEURES TREMPLIN EN 2NDE, ADAPTATION DES ÉLÈVES

Poincaré - Bar Le Duc : d'octobre à décembre, une heure tremplin par semaine et par classe, parfois assurée par un contractuel. Contenus proposés par le professeur de la classe : préparer un contrôle ou un chapitre. Élèves ciblés par les profs. Soutien en première et terminale jusqu'en novembre.

Beaumont - Saint Dié : quota d'heures (15h pour les maths) qui pouvait être utilisé avec d'autres niveaux que la Seconde et pendant toute l'année. Surtout avec les Premières pour les chapitres difficiles traités pendant le confinement. Difficultés à trouver des créneaux communs pour toutes les classes.

Callot - Nancy : une heure par semaine pendant un temps restreint (contre-productif). Insuffisant et précoce en Seconde en Septembre. 5 ou 6 h utiles en Spé Maths.

Nominé - Sarreguemines : 1h par semaine pendant 5 semaines, élèves désignés. En début d'année : trop tôt pour définir les besoins

La Communication - Metz : des heures pour toutes les disciplines volontaires. Heures de soutien dédoublées jusqu'à mi-novembre. 1h de soutien en Spé 1ère (sur 6 classes) : surtout consacrée au calcul littéral. Difficulté de trouver un créneau commun. Beaucoup d'élèves en difficultés.

PROFS : NOUVEAUX USAGES DU NUMÉRIQUE

Alexandre : meilleure préparation pour la rentrée, classe partagée par le CNED, limitée pour l'utilisation, élèves familiers et des problèmes techniques résiduels pour certains.

Christelle : réel progrès dans les usages.

ENSEIGNEMENT HYBRIDE

- **fonctionnements différents**

Matériel mis à disposition des profs ou pas selon les établissements.

Tablette personnelle et stylet pour partager.

Poincaré - Bar Le Duc : Décidé en conseil pédagogique. Roulement 1 semaine par niveau en distanciel : 2nde, 1ère puis Terminales. Classe virtuelle du CNED. Le lycée fournit casque et webcam.

Retour au sommaire

Loritz – Nancy : Tout le matériel souhaité est fourni. Mais parfois difficile à mettre en œuvre en raison des changements de salle permanent pour limiter les déplacements des élèves. Toujours des classes entières, avec un roulement à la maison une journée par semaine par niveau.
La Providence - Thionville : Terminales et les Secondes le matin, Premières l'après-midi. Avantage : toujours en classe entière, évaluation plus équitable. Différence de traitement selon les disciplines.
Ste Chrétienne - Sarreguemines : toujours des classes entières.

- **ressenti des élèves**

Inconvénient du distanciel : des décrocheurs (notamment en 2nde), y compris parmi les élèves connectés. Concentration fluctuante, participation plus faible qu'en présentiel.
Problèmes de transports.
Le problème de l'absence de groupe classe dans les spécialités est amplifié par le distanciel.
Usage du livre numérique très difficile. Edupython très instable.

- **ressenti des professeurs**

Difficultés de faire un cours mixte (pour les élèves en présentiel et en distanciel).
Le matériel est disparate : VPI, TBI, vidéoprojecteurs ou tableaux traditionnels, selon les salles d'un même établissement. Problèmes de compatibilité matériel.
Selon les compétences des uns et des autres, des pratiques plus ou moins abouties s'installent, mettant en défaut les professeurs les moins bien dotés. Ce qui est mis en œuvre à l'initiative de certains professeurs doit-il être la norme ?
Stratégie courante : mettre dans l'ENT le contenu de cours pour les élèves à la maison et faire classe uniquement avec les élèves présents. Frustration : être prof ne se limite pas à donner des documents.
Les profs de maths semblent faire partie de ceux qui développent le plus de pratiques novatrices et différentes. Les professeurs stagiaires voient s'ajouter des difficultés à leur première année d'enseignement, avec de grosses différences par rapport à leur collègues stagiaires en collège.
Il est souvent difficile d'obtenir un soutien technique au niveau rectoral.

PROGRESSIVITE

Le travail à distance manque souvent d'efficacité et nécessite, en général, de passer une ou deux heures à faire des mises au point lors du retour en présentiel, voire de refaire entièrement le cours.
Le retard dans la progression s'accumule et le bouclage des programmes devient inaccessible.

Les lacunes dues au confinement sont importantes et les notions vues en confinement en 2020 ne sont pas stabilisées : beaucoup de contenus sont à reprendre avec des élèves, certes volontaires, mais parfois très faibles. Comment peut-on leur faire « ingurgiter » tout le programme ? Le dégoût de la discipline s'installe, incitant beaucoup d'élèves de Première à abandonner la spécialité maths, souvent en raison de lacunes difficiles à combler.

Retour au sommaire

RÉFORME EN TERMINALE

- **épreuves annulées : délai ? Sujets ?**

Lien vers les sujets de maths :
https://tribu.phm.education.gouv.fr/portal/auth/pagemarker/6/cms/default-domain/workspaces/bnsujet/eds-mars-2021/baccalaureat-general/mathematiques?displayContext=menu&scope=__nocache&addToBreadcrumb=0&displayLiveVersion=1

À l'avenir : Les épreuves devraient se tenir en juin ou en mai. La préparation des élèves de Terminale n'est pas suffisante en mars pour garantir la réussite du plus grand nombre. Le programme de l'examen est encore trop ambitieux, malgré les allégements. Les sujets pourraient mieux tenir compte des colorations (selon la deuxième spécialité) de la spé Maths, l'uniformisation des contenus n'aident pas à inscrire la discipline dans des exemples pertinents.
Les professeurs de la spécialité mathématiques de Terminale du Lycée Saint Exupéry de Fameck ont adressé, en janvier, un courrier à l'inspection pédagogique de l'académie :
http://apmeplorraine.fr/spip.php?article723. La réponse est restée évasive (annulation de l'épreuve annoncée fin janvier) sur l'impossibilité de la tenue d'épreuves en mars, la longueur délirante du programme pour être traité correctement et la nécessité de reprendre le programme de Première.

En 1ère, il semble impossible de traiter en 4h l'équivalent de l'ancien programme de Première Scientifique sans laisser la moitié des élèves de côté.
Se pose encore la question de l'existence d'un groupe de suivi de la mise en place des programmes.
L'étude des sujets de la spécialité Physique et Mathématiques de Terminale STI2D montre qu'ils sont (plus difficiles) moins adaptés au niveau des élèves que ceux de la Spé Maths de
La voie générale :
https://tribu.phm.education.gouv.fr/portal/auth/pagemarker/8/cms/default-domain/workspaces/bnsujet/eds-mars-2021/baccalaureat/sti2d/physique-chimie?displayContext=menu&scope=__nocache&addToBreadcrumb=0&displayLiveVersion=1
Le nombre d'heures pour l'assimilation de ce volume de connaissance est toujours insuffisant.
Les enseignants de mathématiques impliqués dans l'enseignement scientifique du tronc commun sont gênés par l'absence de sujets zéros, pour une épreuve qui implique des professeurs avec des pratiques très diverses en raison de leur discipline d'origine.

Retour au sommaire

- **grand oral : planning, sujets**

La préparation à cette épreuve n’est pas toujours prise au sérieux par les équipes pédagogiques. Dans le mouvement de la réforme et des changements profonds qu’elle implique, le Grand Oral (GO) représente un surcroît de travail dont professeurs et élèves se passeraient bien.
Certains collègues préparent leurs élèves avec un entraînement à l'oral (prise de parole) sous forme d’exposés (vie et œuvre de mathématiciens par exemple) durant 5 min (mais pas encore sur leur sujet du GO) : le temps pris sur la séance est conséquent.
L’absence de support de présentation est très problématique en maths. La conception de cette épreuve de GO s’est faite sans penser à la spécialité maths. L’élève peut cependant concevoir, pendant les 20 minutes de préparation, un support à donner au jury. L’épreuve est trop longue pour survoler sa préparation, mais trop courte pour entrer dans un vrai sujet. La faible durée du temps d’exposé risque de déboucher sur des sujets trop superficiels. Il faut prévoir les questions d’approfondissement du jury.
Il est très difficile pour les élèves d’intégrer un point du programme dans leurs questions… Pour avoir des sujets qui reposent sur le programme de terminale (même si on peut se baser sur celui de première), il faut que les élèves en aient étudié une partie pour prendre du recul. Il est délicat de commencer en Septembre.
Jusque fin janvier, le travail de Terminale s’est concentré sur l’épreuve écrite. Beaucoup de professeurs (avec l’annulation des épreuves de mars) commencent seulement à aborder le sujet avec leurs élèves, souvent en attente d'informations complémentaires. Le suivi par le professeur, comme pour les TPE, n’est pas cadré. Certains établissements proposent un carnet de suivi. Problème des questions interdisciplinaires : le jury peut ne comporter qu’un seul prof d’une deux spécialités.

ORIENTATION

L'accompagnement à l'orientation s’est compliqué avec la réforme et les professeurs principaux manquent d’une formation solide pour aider leurs élèves. En Terminale, ils doivent "orienter" les élèves sans réellement pouvoir s'appuyer sur tous les professeurs de spécialité de leur classe. Dans certains établissements, les professeurs se réunissent par spécialité sans assister à des conseils de classe pléthoriques. Ils ne peuvent donc plus réellement s'occuper de l'orientation des élèves : la situation est dramatique. Les professeurs principaux des élèves de Spé Maths sont difficiles à identifier. Certains professeurs choisissent les conseils de classe en fonction des élèves qu’ils souhaitent suivre.
La deuxième spécialité, différente selon les élèves, peut influer le contenu du cours : un exemple de Physique pour les équations différentielles ne peut pas être appréhendé de la même façon par des élèves qui ne suivent pas cet enseignement de spécialité.

Retour au sommaire

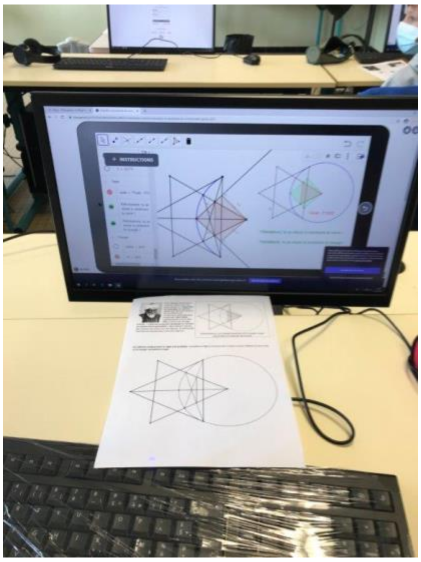
VIE DE LA RÉGIONALE

PENDANT LA SEMAINE DES MATHÉMATIQUES

Un jeu d'aventure démarrant dans le bureau du commissaire Girard

À travers ce jeu d'aventures proposé par le groupe Jeux de la Régionale, les élèves d'une même classe se répartissent en équipes pour fouiller le bureau du commissaire Girard et résoudre des problèmes mathématiques. Ceux-ci explorent la circulation de la numération de position indo-arabe et permettent de comprendre que les mathématiques sont une construction humaine progressive.

Des codes permettent ensuite l'accès à des ressources mises à disposition des élèves, et fournissent des idées pour le futur carrelage de la terrasse du commissaire.



Résoudre les énigmes proposées a souvent été facilité par un travail préalable sur papier. Après l'heure consacrée à la résolution des énigmes, une durée semblable a servi à explorer les carrelages et pavages pouvant être proposés au carreleur.

Retour au sommaire

Fin mars, environ 800 connections ont été faites vers l'enquête, plus du double que pour celle de 2020 : sa mise en œuvre avait été très perturbée par le premier confinement commençant à la fin de la semaine des maths.

Les jeux restent disponibles sur notre site pour une utilisation en dehors de la semaine des mathématiques.

Dans les classes de Cours Moyen

Les enseignants du collège Louis Armand de Moulins-lès-Metz et des joueurs de la régionale sont allés dans les écoles participant au Labo de Maths* pour aider à la mise en œuvre du jeu d'aventure et utiliser les jeux de notre exposition régionale.

* http://apmeplorraine.fr/IMG/pdf/pv145.pdf#page=7 et http://apmeplorraine.fr/IMG/pdf/pv141.pdf#page=11

À l'école Paul Verlaine de Moulins-lès-Metz

À l'école Cressot de Montigny-lès-Metz

Témoignage d'une des enseignantes de Cours Moyen :

> *Un grand merci pour l'animation et la mise en place des ateliers. Les élèves ont adoré. Nous allons pouvoir faire un point sur cet après-midi : c'était génial !*
> *Ça fait du bien de partager des moments ensemble ! Cela devient si rare !*

Une affaire à suivre et à renouveler….

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

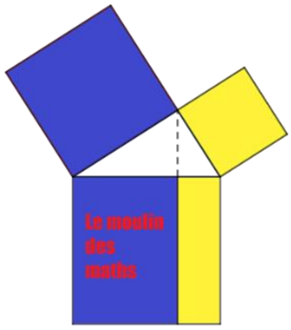
BILAN/ATELIERS « LABO - MATHS »

Véronique GREGORI
PEMF CM « École Cressot »
Montigny-Lès-Metz

Semaine des mathématiques à l'école
10ème édition
Du 15 au 21 mars 2021
Sur le thème « Mathématiques et Société »

« Cette semaine a pour objectif d'exposer une image actuelle, vivante et attractive des mathématiques aux élèves des écoles, des collèges et lycées.

De nombreux acteurs de l'Éducation se mobilisent, proposant ainsi des actions diversifiées tout au long de la semaine. »



Mardi 16 mars 2021 après-midi, les élèves de deux classes de CM2 de l'école Cressot de Montigny-Lès-Metz ont participé à des ateliers mathématiques.

Les enseignantes de CM2 ont organisé des ateliers avec l'équipe des professeurs de mathématiques avec laquelle elles échangent dans le cadre d'un projet d'harmonisation École-Collège intitulé « Labo maths ».

Chaque classe de CM2 a accueilli les professeurs de mathématiques et un représentant de la régionale Lorraine de l'APMEP venus proposer de nombreuses activités mathématiques diverses et attractives.

Dans chaque classe, les élèves étaient répartis soit par binômes, soit par groupes de trois élèves pendant quarante-cinq minutes.

Quatre groupes de trois élèves participaient à des jeux d'énigmes à résoudre :

1 - Tables de Pythagore-Qui suis-je ? vers le poème « Le Palais de l'Alhambra

2 - Le labyrinthe, énigme inspirée d'un problème extrait du livre de Luca Pacioli *De Veribus Quantitatis recueil scientifique*

3 - Problème de construction géométrique à l'aide de la règle non graduée : compléter une figure composée d'un triangle équilatéral inscrit dans un carré (Abul Wafa mathématicien perse et motifs géométriques observables à l'Alhambra de Grenade)

4 - La technique de multiplication par jalousie par Fibonnaci, les réglettes de Napier (ou bâtons de Neper)

Les élèves disposaient d'un ordinateur et d'un accès à une application mathématique vers l'activité jeu/énigme. Ils recherchaient un code résultant de la résolution d'une énigme, code leur permettant d'accéder à des connaissances historiques et culturelles.

Les élèves étaient motivés, actifs, ils n'hésitaient pas à échanger, proposant des stratégies de résolution, partageant des raisonnements, découvrant des chemins non découverts jusque-là (pour le « Labyrinthe » en particulier.

Les autres élèves pouvaient individuellement ou à deux se confronter à des activités de manipulation et de construction. À partir d'une fiche technique sur laquelle figuraient consignes et énoncé, à l'aide d'un matériel adapté, les élèves observaient, essayaient des stratégies, tâtonnaient, résolvaient.

D'autres activités étaient proposées par les enseignantes de CM2, activités géométriques relevant de la symétrie ou des reproductions de figures géométriques à partir de programmes de construction, des activités avec le projet d'école intitulé « Écologie/Prairie Poppy ». Les professeurs guidaient et supervisaient les élèves tous très investis et impliqués avec concentration. Au bout de quarante-cinq minutes et à l'issue d'une petite pause, les groupes permutaient.

Remarque : la plupart des jeux et activités provenaient des ressources de l'APMEP Lorraine, représentée par son vice-président.

Dans ce cadre, la motivation, la notion de projet et les activités concrètes permettaient aux élèves de renforcer leur observation et leur plaisir à fournir des efforts de résolution en mathématiques.

Cette occasion d'échanges et de recherches variées amenait les élèves à avoir un regard encore plus positif sur les mathématiques devenues alors plus vivantes et attractives.

Les élèves de CM2 ayant besoin de donner du sens aux activités, de comprendre l'enjeu et la portée des mathématiques dans le monde qui les entoure. Ces notions de motivation, de sens et de lien sont essentielles dans la mise en situation nécessaire à la recherche et aux efforts de raisonnement à fournir. L'observation, l'analyse, le langage et la précision sont alors des compétences développées lors de ces activités de motivation mathématiques explicites. Ils en comprennent davantage le sens profond. Les élèves y mettent plus d'intensité et d'entrain dans leur action. D'où l'importance d'entretenir la motivation à long terme par des activités planifiées, progressives et régulières. Il est essentiel de permettre aux élèves de prendre le temps de réfléchir à des situations problèmes variées à des niveaux et des rythmes parfois différents.

Le changement de pédagogie et de dynamique de projets peut parfois relancer la motivation et l'énergie. La pédagogie explicite et positive s'inscrit bien dans ce cadre de l'enseignement des mathématiques.

Les élèves ont hâte de participer à d'autres ateliers, au collège cette fois. En attendant, ils ont des retours positifs sur cette semaine des mathématiques et n'hésitent pas à se lancer dans les activités « Labo-Maths » instaurées au sein de la classe avec grand plaisir. Le choix d'activités en autonomie à des niveaux de compétences différentes garantit cette découverte de nouvelles sensations tout en explorant et entretenant des notions fondamentales. Ils utilisent leur matériel géométrique plus aisément, avec plus de dextérité et de précision.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

PRÉSENTATION À NOS FUTURS COLLÈGUES

Depuis fort longtemps, il est de tradition de venir présenter l'APMEP aux enseignants stagiaires en formation dans notre académie afin de leur faire découvrir des ressources mais aussi les bienfaits du partage et de la convivialité de notre association lorraine. Mais cette année hélas, le gouter de Noël n'a pas pu avoir lieu auprès de la promotion 2020-2021 en raison de la situation sanitaire et de la fermeture des centres de formation.

Néanmoins, les trente-six **É**tudiants **F**onctionnaires **S**tagiaires répartis sur les deux sites de Metz et Nancy ont pu rencontrer en distanciel plusieurs membres de notre association. Le jeudi 1er avril pour un groupe et le mercredi 28 avril pour l'autre, nous avons pu les rassembler via Big Blue Botton sur notre site pendant 90 minutes avec plusieurs membres du comité en « visio ». Faute de pouvoir partager des spécialités culinaires, nous avons choisi de partager nos jeux en ligne, de présenter les atouts du site et de valoriser la plus-value des échanges autour des mathématiques et de leur enseignement.

Malgré les conditions particulières de notre intervention et malgré le départ massif de nos jeunes collègues hors de la lorraine, essentiellement nommés en banlieue parisienne, nous espérons avoir pu leur apporter un peu d'attention ainsi que des ressources qui pourront les accompagner au début de leur carrière.

Nous leur souhaitons bon courage pour leur prochaine rentrée, et aspirons à les retrouver à nos côtés dans quelques années.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

RALLYE MATHÉMATIQUE DE LORRAINE

Ce rallye concernait les classes de troisième et de seconde de notre académie. Il s'est déroulé entre le 17 et le 21 mai 2021 sur une plage de deux heures, en classe ou à distance selon les possibilités et les consignes sanitaires.

Les énoncés sont consultables ici.

76 classes étaient inscrites, représentant 30 établissements (16 collèges et 14 lycées). Nous n'avons enregistré que 27 réponses sur notre site et 4 envoyées par mail. Certains collègues nous avaient prévenus qu'ils ne pourraient pas faire participer leur classe mais beaucoup se sont désistés sans nous en avertir.

De toute évidence la situation sanitaire n'a pas favorisé le bon déroulement du rallye ...

Heureusement, des collègues ayant fait participer leur classe, nous ont transmis des choses bien positives.

En voici quelques-unes.

« J'avoue avoir un peu culpabilisé ces derniers jours en consacrant 2h au rallye au vu de tout ce qu'il me reste à faire dans le programme et car j'aurais voulu consacrer plus de temps à l'orientation des élèves. C'est pour moi la période la plus compliquée de l'année depuis qu'on est passé en demi-jauge, j'ai "perdu" un tiers des élèves et je galère avec les cours hybrides à tout connecter, puis à changer de salle pour encore recommencer, avec le sentiment de ne pas être efficace ...

Mais qu'est-ce que c'était chouette vendredi de voir les élèves résoudre les énigmes, ils étaient tous motivés et actifs et ont bossé jusqu'au bout. Certes, ce n'était pas le cas de tous ceux qui étaient à distance mais quelques-uns ont joué le jeu et nous ont envoyé leurs réponses. Ça m'a fait beaucoup de bien cette séance !!!

Et bravo pour la mise en ligne du rallye, c'est super ! »

Valérie P.

« Je pense que les élèves ont beaucoup apprécié, et moi aussi ! »

Hélène B.

« Les élèves ont particulièrement apprécié ce rallye. »

Aurélie L.

« Merci pour le temps passé à l'organisation de ce type de concours ! »

Catherine C.

La correction sera faite par une équipe de notre régionale et les résultats seront disponibles sur notre site. Les trois lauréats de chaque catégorie seront prévenus par mail afin de prévoir une remise des lots.

Tous les élèves des 3 premières classes de chaque niveau se verront remettre un diplôme de participation, le puzzle des 7 triangles (APMEP Lorraine), un instrument de géométrie ALEPH et ceux de la première classe de 3$^{\text{ème}}$, une calculatrice TI 83.

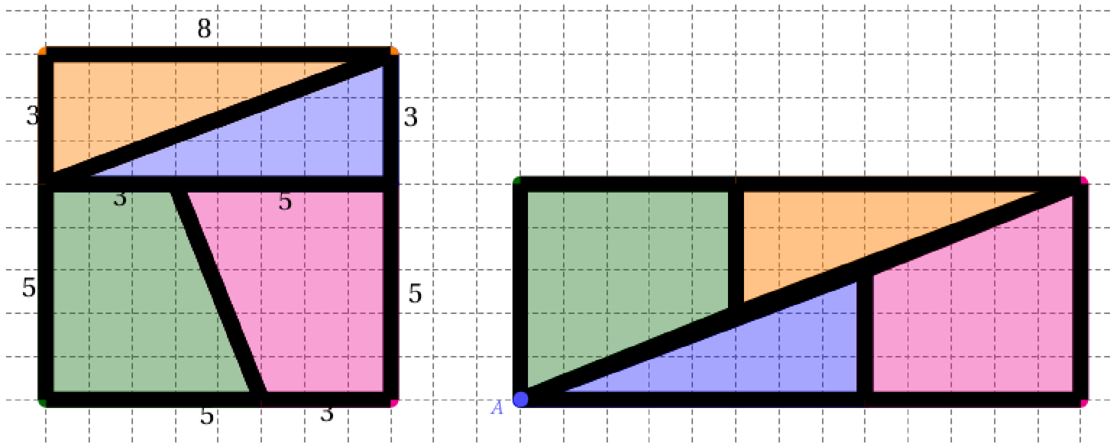
Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

PUZZLE DE LEWIS CAROLL ET SUITE DE FIBONACCI

Gilles Waehren

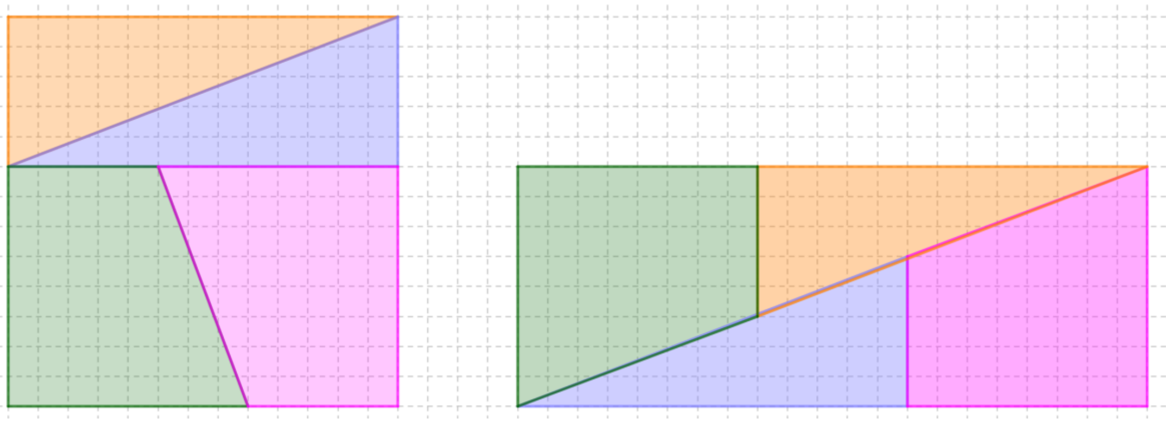
Voici un exercice d'un devoir maison donné en seconde en 2019 :



1. Calculer les aires des deux grands quadrilatères. Quel est le paradoxe dans cette configuration ?
2. On considère un repère de centre A. Déterminer les coordonnées des différents points de la figure dans ce repère. Expliquer le paradoxe.

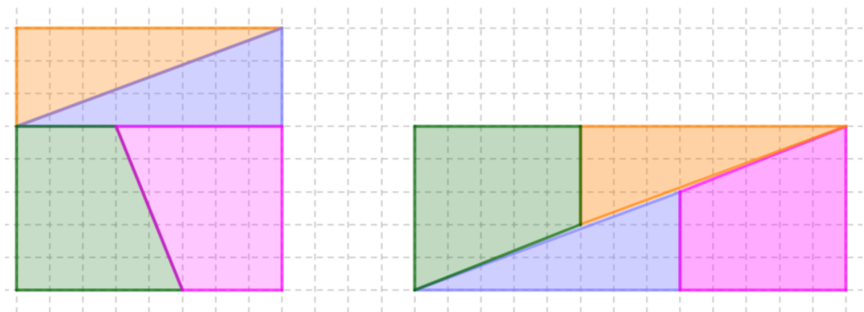
La méthode suggérée était analytique. Comme nous étions dans le chapitre des équations de droite, certains ont appuyé leur raisonnement sur la comparaison des coefficients directeurs ; d'autres ont préféré les coordonnées de vecteurs pour établir l'absence de colinéarité. Mais l'objet de cet article n'est pas d'analyser le travail de mes élèves ou les améliorations possibles de l'énoncé. Pour insister sur l'aspect paradoxal de la situation, j'avais grossi le trait… Le maximum d'épaisseur possible sur GeoGebra permet de masquer le parallélogramme d'aire 1 qui vient s'immiscer dans la figure de droite. Ce n'est guère élégant.

En revisitant dernièrement ce puzzle dans le cadre d'une réflexion sur les aires en cycle 3, je me suis rendu compte que les dimensions mises en jeu sont quatre termes consécutifs de la suite de Fibonacci : 3 – 5 – 8 – 13. M'est alors venue l'envie de tester le quadruplet suivant : 5 – 8 – 13 – 21. Les deux assemblages se font de la même manière, mais l'aire du carré de gauche est alors : $13^2 = 169$, tandis que le rectangle de droite a une aire égale à : $21 \times 8 = 168$. Dans ce cas, les pièces du puzzle de droite se chevauchent.



Mais la différence est moins perceptible que dans le premier cas :

Retour au sommaire



(L'échelle est quasiment la même pour les deux images)

Je cherche alors quelques informations à ce sujet sur la toile : le site de Gérard Villemin en parle, ainsi que ce forum de mathématiques.net. Le résultat est le suivant pour la suite de Fibonacci (u_n) : $(u_{n+1})^2 = u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n-1}$ou encore

$$\boxed{Pn : « \ (u_{n+1})^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^{n-1} \ »}$$

Autrement dit, la différence des aires entre le carré et le rectangle est toujours égale à 1. Cette différence reste significative pour le puzzle classique, mais diminue en importance pour les puzzles de plus grandes dimensions.

La démonstration de l'égalité peut être donnée en Terminale :

$P0$ est vraie, on a bien : $(u_1)^2 - u_0 u_2 = 1 - 2 = (-1)^{-1}$.

Montrons que Pn est héréditaire, c'est-à-dire que :

pour tout entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie.

Soit k un entier tel que

$$(u_{k+1})^2 - u_k \times u_{k+2} = (-1)^{k-1}$$

On a alors : $(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = (u_{k+2})^2 - u_{k+1}(u_{k+2} + u_{k+1})$ par définition,

donc $(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = (u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+2} - (u_{k+1})^2$

$$(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = u_{k+2}(u_{k+2} - u_{k+1}) - (u_{k+1})^2$$

$$(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = u_{k+2}u_k - (u_{k+1})^2$$

$(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = -(-1)^{k-1} = (-1)^k$, par hypothèse de récurrence.

On a obtenu l'égalité au rang $k+1$.

La relation est donc vraie pour tout naturel n.

Je n'ai pas écrit d'énoncé en Terminale. On peut très bien poser le paradoxe avec les figures 3 - 5 – 8 – 13 et 5 – 8 – 13 – 21 et laisser les élèves expliquer l'origine de l'illusion. Puis leur demander d'écrire la relation en fonction de n et la démontrer. Conclure en expliquant que le rapport de l'écart d'aires sur l'aire totale tend vers 0.

Note du comité de rédaction du Petit Vert : *cette mise en œuvre de termes de la suite de Fibonacci est évoquée dans les pages 54 et 55 de la brochure Jeux 8.*

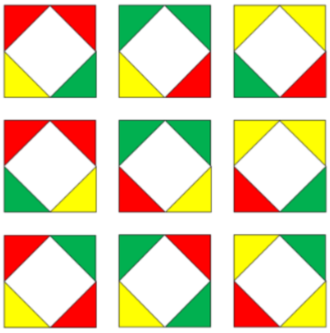
Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

LES NEUF CARRÉS DE VLADIMIR ET DE PERCY ALEXANDER

APMEP Lorraine - groupe Jeux

Les neuf carrés de Vladimir



Deux pièces peuvent être accolées lorsque les couleurs de leur côté commun correspondent.

Ces neuf carrés reprennent le schéma de création des neuf pièces d'un puzzle créé par Vladimir Krasnoukhov.

Pour des facilités de bricolage, les quarts de disque aux coins des pièces ont été remplacés par des triangles rectangles isocèles.

L'examen des pièces fait retrouver leur logique de construction.

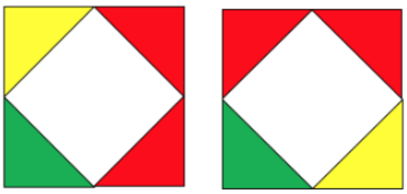
Les neuf pièces sont différentes.

Trois couleurs ont été choisies.

Ces trois couleurs ont été utilisées pour colorier les quatre coins : deux d'entre eux ont donc la même couleur.

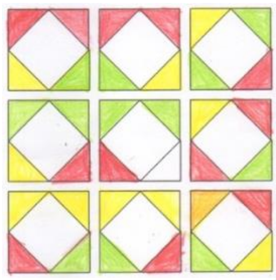
En mars 2019, pendant la semaine des mathématiques, les élèves de CM2 de l'école de Sampigny ont manipulé et observé les pièces mises à disposition. Ils ont remarqué que chaque pièce avait deux zones de même couleur et que trois couleurs étaient utilisées.

Les pièces étant rangées, il leur était demandé de retrouver le coloriage des pièces.



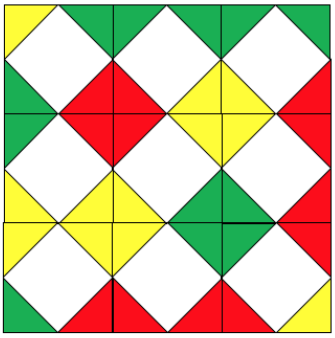
Le fait que les pièces étaient toutes différentes n'a pas été remarqué et cela a joué bien des tours à certains élèves. Ces deux coloriages ne sont pas toujours correctement analysés.

Certains ont cependant mis en œuvre une démarche structurée leur garantissant qu'ils avaient retrouvé le coloriage de toutes les pièces (le coloriage de droite en est un exemple).

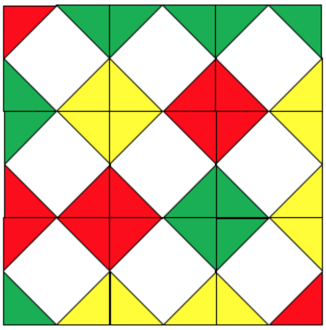


La solution fournie sur le site de présentation du puzzle est-elle unique ?

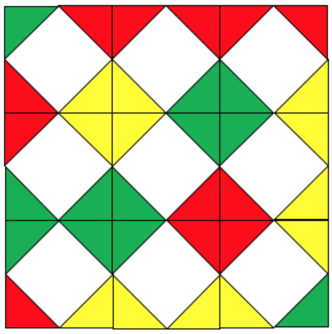
Retour au sommaire



Solution du site



Par rapport à la solution du site, les couleurs « jaune » et « rouge » ont été permutées.

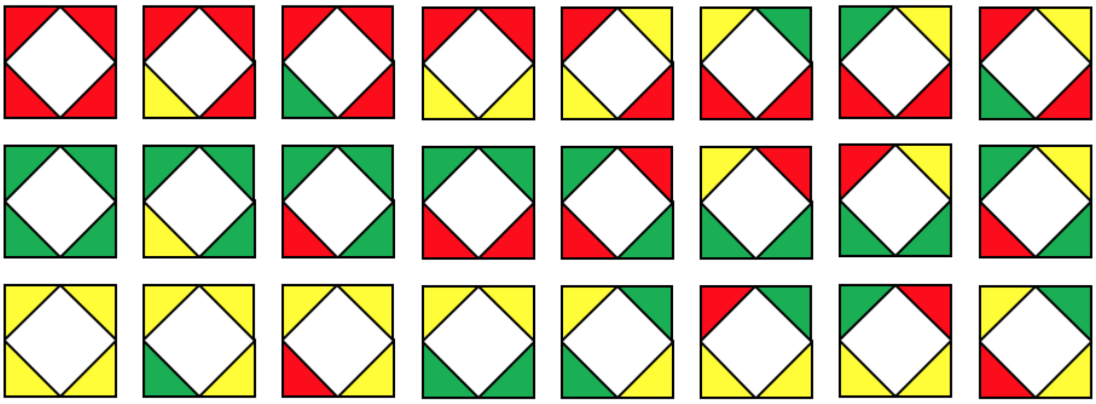


Par rapport à la solution du site, « jaune », est devenu « vert », « vert » est devenu « rouge », « rouge » est devenu « jaune ».

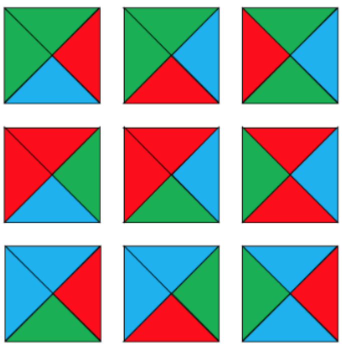
Ces permutations de couleurs visualisent les trois solutions actuellement trouvées par les élèves et leurs enseignants. Elles ont en leur centre une pièce dont deux sommets opposés ont même couleur. Existe-il une solution pour laquelle la pièce centrale a deux sommets adjacents de même couleur ? À cette date, la question reste ouverte.

Remarque

Les neuf carrés de Vladimir sont les pièces tricolores de l'ensemble « Les 24 carrés » présent dès 1982 dans la brochure « JEUX 1 » de l'APMEP.



Les neuf carrés de Percy Alexander



Les neuf carrés de Vladimir ont des sommets colorés. Voici de manière analogue les carrés dont les côtés et les triangles qui les contiennent sont coloriés en utilisant trois couleurs.

Deux pièces peuvent être accolées lorsque les couleurs de leur côté commun correspondent.

L'examen des pièces fait retrouver leur logique de construction, très semblable à celle des carrés de Vladimir.

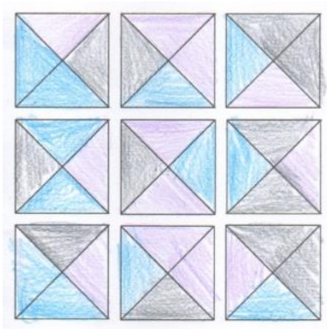
Retour au sommaire

- Les neuf pièces sont différentes.
- Trois couleurs ont été choisies.
- Ces trois couleurs ont été utilisées pour colorier les quatre parties : deux d'entre elles ont donc la même couleur.

En mars 2019, pendant la semaine des mathématiques, les élèves de CE2 et CM1 de l'école de Sampigny ont manipulé et observé les pièces mises à disposition. Ils ont remarqué que chaque pièce avait deux zones de même couleur et que trois couleurs étaient utilisées.

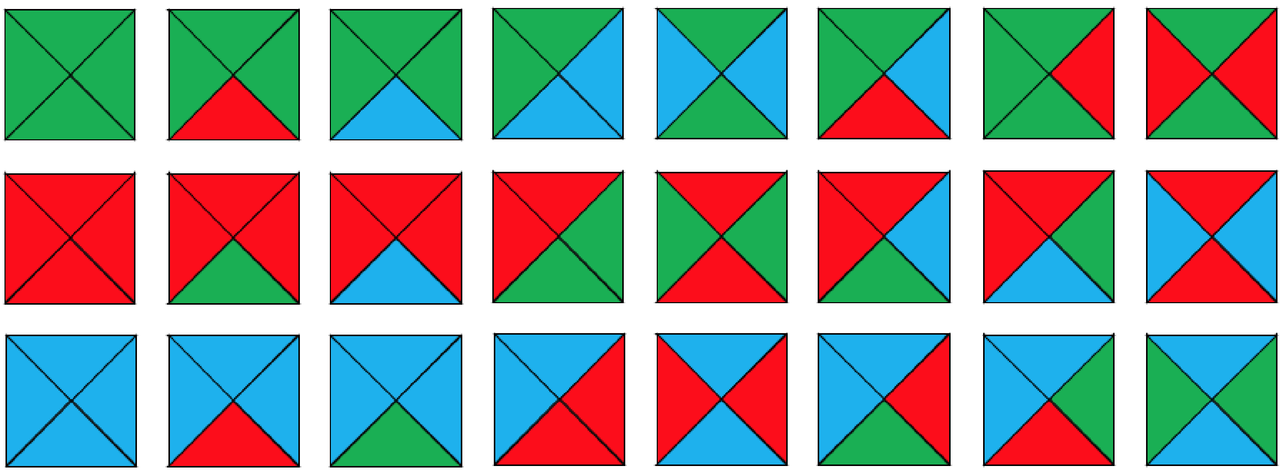
En CE2, les pièces étaient mélangées, huit d'entre elles ont été retournées, il s'agissait de retrouver le coloriage de la neuvième. De nombreuses réussites ont été constatées, mais il n'a pas toujours été aisé de faire verbaliser leur méthode aux élèves. Certains ont réalisé un carré troué avec les huit pièces retournées et ont imaginé quelle serait la pièce comblant le trou. La réussite n'a pas toujours été au rendez-vous. D'autres ont utilisé le fait que les pièces avaient toujours deux zones de même couleur pour imaginer le coloriage de la pièce retournée.

En CM1, les pièces étant rangées, il leur était demandé de retrouver le coloriage des pièces. Comme pour la recherche demandée aux élèves de CM2, des difficultés sont apparues car le fait que les neuf pièces étaient toutes différentes n'a pas été évoqué. Certains élèves ont cependant mis en œuvre une démarche structurée, le coloriage ci-contre en est un exemple.



La manipulation de ces pièces est plus aisée que celle des neuf carrés de Vladimir. Toute pièce mise en position centrale rend possible la réalisation d'un carré, il existe donc au moins neuf solutions.

Ces neuf pièces sont les pièces tricolores des 24 pièces imaginées par le mathématicien Percy Alexander Mac-Mahon, également présentes dans la brochure Jeux 1 de l'APMEP et thème du stand n°6 de notre exposition régionale.



Tous ces ensembles de pièces et les documents utilisés en classe de CE2, CM1 et CM2 sont téléchargeables sur notre site.

Un complément à cet article se trouve dans la rubrique « Maths et jeux » de ce Petit Vert.

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

QUEL EST L'INTÉRÊT DE VACCINER UNE POPULATION LORSQU'UNE ÉPIDEMIE SE DÉCLENCHE ?

Yohan Balland
collège Pierre Messmer (Sarrebourg)

Contexte

Au moment où j'écris ces lignes, le 3ème confinement vient d'être annoncé pour l'ensemble du pays. Les médias ne parlent que d'une seule chose : le vaccin qui nous permettra de retrouver un semblant de normalité dans nos vies. Cependant, des élèves de collèges sont-ils réellement conscients de ce qu'ils entendent ? Comprennent-ils ce qu'ils lisent ?

C'est à partir de cette réflexion avec Saadia El Ouardi, leur professeur de Sciences de la Vie et de la Terre, que nous avons tenté cette activité en classe de 3ème.

> *« Un individu contaminé vient d'arriver dans une population « saine », que va-t-il se passer ? L'individu contaminé (rouge) est déjà présent dans ton programme, à toi de programmer le reste de la population en suivant les consignes qui te sont données étape par étape si besoin. »*

Toutes les bases concernant les algorithmes ont été vues. Quelques projets plus ou moins complexes ont déjà été menés avec les élèves sur le logiciel Scratch. Ils connaissent quelques notions de probabilités, notamment la simulation d'un nombre aléatoire.

Objectifs de l'activité

- Réaliser une simulation d'un village isolé accueillant un individu contaminé. Aucun geste barrière n'est appliqué ;
- évaluer les conséquences d'une campagne de vaccination pour convaincre la population de la nécessité de celle-ci. Pour des raisons pratiques, la situation est simplifiée par rapport à la réalité ;
- faire un lien avec l'actualité ;
- travailler en collaboration entre Maths et SVT.

Mise en situation de la séance

Les élèves sont répartis en groupes de 2 selon leurs affinités en salle informatique. Chaque groupe a un sujet expliquant la situation et les différents critères de réussite à valider pour réaliser le travail. Ils disposent d'une ébauche du programme sur le réseau du collège avec différents degrés de difficultés selon leurs niveaux. Suite à cela les élèves travaillent en autonomie et s'entraident dans leur binôme. Le professeur n'a qu'un rôle d'observateur et peut aider si besoin.

Retour au sommaire

Réussites / Échecs / Compte-rendu du travail mené avec les élèves

Le travail était prévu sur 2 heures.

Deux groupes ont terminé en un peu plus d'une heure. Une extension du travail leur a été proposée.

La majorité a terminé au bout des 2 heures. Deux groupes ont été bloqués malgré les aides apportées et un travail allégé leur a été proposé.

L'activité a plu aux élèves et leur a paru concrète.

Dans l'ensemble, les indications ont semblé claires pour la majorité des groupes, peut-être un peu trop guidées pour les groupes les plus à l'aise.

Les principales difficultés ont été de comprendre comment utiliser correctement les blocs « Nombre aléatoire entre … et … » lorsqu'un clone devait changer de costumes (vaccinés ou non). La compréhension et l'utilisation du hasard reste un élément compliqué pour des collégiens.
Dans le même style, certains groupes ont mis du temps à programmer la partie où un individu « contaminé (rouge) » contamine avec 1 chance sur 2 un clone « non vacciné (blanc) » lorsqu'ils rentrent en contact. Certains élèves pensaient que le taux de vaccination jouait un rôle à ce moment-là, sauf que, par souci pratique, la vaccination ne se produisait qu'au début du programme (il n'y avait pas d'autres vaccinations lorsque la contamination était déjà lancée). L'actualité de la vaccination contre la Covid dans le cas réel a certainement poussé à la confusion.

Prolongement de l'activité

- Les groupes les plus efficaces ont pu approfondir l'activité en totale autonomie, en simulant un 2ème village isolé du 1er. Chaque village dispose de son propre « Taux de vaccination », son propre « Compteur de contaminations », un seul individu contaminé de chaque côté au départ.

- Plusieurs simulations successives peuvent permettre une étude statistique concernant l'efficacité de la campagne de vaccination en fonction du taux d'individus déjà vaccinés. (L'épidémie se généralise sans jamais s'arrêter, ou s'endigue plus ou moins vite) Cette partie du travail a été menée avec la professeure de SVT.

Évaluation

Le professeur de S.V.T. et moi-même nous sommes mis d'accord sur une évaluation par compétences des travaux des élèves et de leur investissement dans le projet.

Retour au sommaire

Annexes

Document 1 : Introduction écrite de la situation qui reprend ce qui a été présenté aux élèves à l'oral.

Activité Vaccination
SVT – Mathématiques

Objectif : *Évaluer les conséquences d'une campagne de vaccination pour convaincre la population de la nécessité de celle-ci.*

Récupère le fichier « Scratch élève » dans le dossier de ta classe N'oublie pas de sauvegarder régulièrement ton travail au format « Nom_Prénom_Vaccination » dans le dossier « Copies » de ta classe.

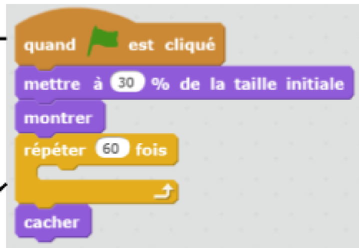
Partie Mathématiques : Réaliser une simulation numérique de la propagation d'une épidémie en fonction d'une couverture vaccinale plus ou moins développée (Scratch).
Les individus seront représentés par des balles de couleurs signifiant leur état à chaque instant :

- Vert : Vacciné
- Blanc : Non contaminé mais pas vacciné
- Rouge : Contaminé et pouvant contaminer

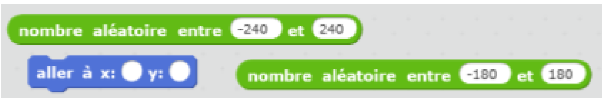
Document 2 : Quelques aides pour les élèves en besoin, huit au total.

Étape 1 : Création d'une balle de départ blanche (Costume *Non contaminé*) qui se positionne aléatoirement

- Dans le **programme principal,** le lutin (Ball 1) se positionne aléatoirement sur l'écran.



Blocs à utiliser



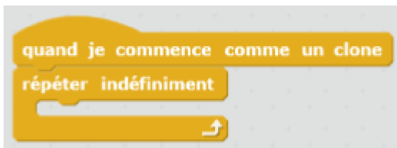
Étape 2 : Création de 60 balles identiques qui seront des « clones » de la balle de départ

- Dans le **programme principal**, on **répète** 60 fois l'étape 1 tout en créant un clone à chaque répétition.
- Lorsque **tous** les clones sont créés, on **envoie un message** (message 1) à tout le reste du programme.

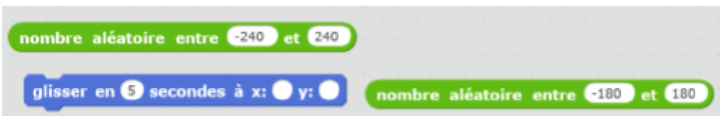
Blocs à utiliser

Étape 3 : Faire glisser toutes les balles aléatoirement sur toute la surface disponible

- Dans le **programme secondaire** de ce lutin (Ball 1), chaque **clone** devra **glisser indéfiniment** pendant 5 secondes **aléatoirement** sur l'écran.

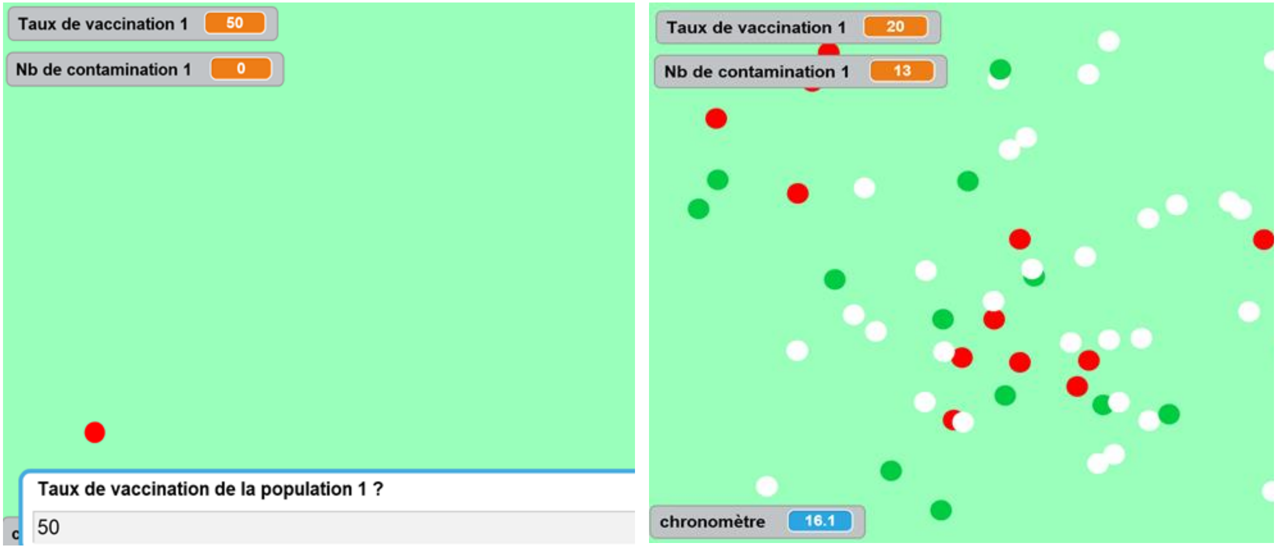


Blocs à utiliser

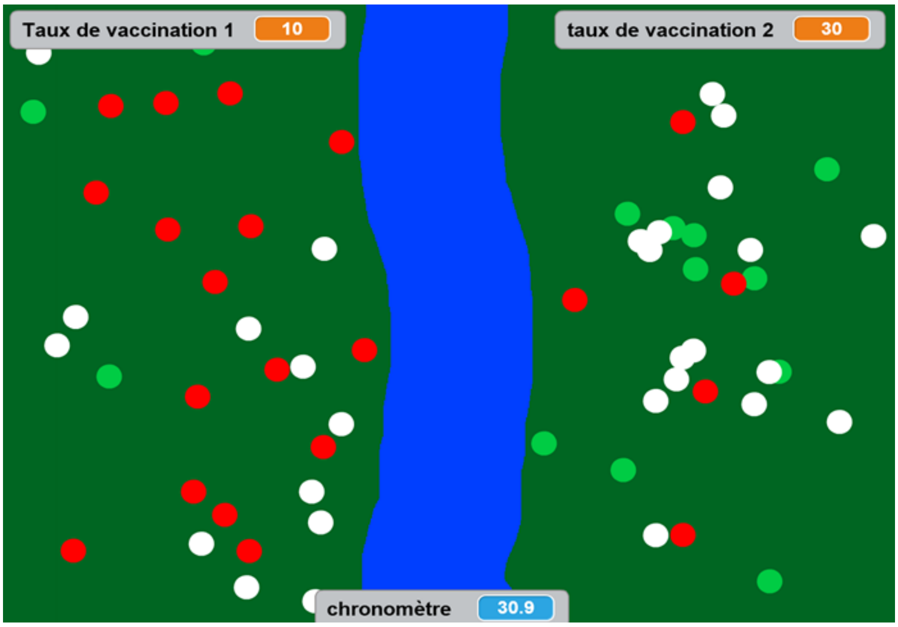


Retour au sommaire

Document 3 : Quelques productions d'élèves à différentes étapes du programme.



Document 4 : Prolongement du travail proposé par un groupe d'élèves.



" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale APMEP Lorraine. Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin « Au fil des maths » et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges "mathématiques" entre les adhérents. Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à redaction-petivert@apmeplorraine.fr. Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, Fathi Drissi, François Drouin, Françoise Jean, Léa Magnier, Walter Nurdin, Aude Picaut, Michel Ruiba, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

Retour au sommaire

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

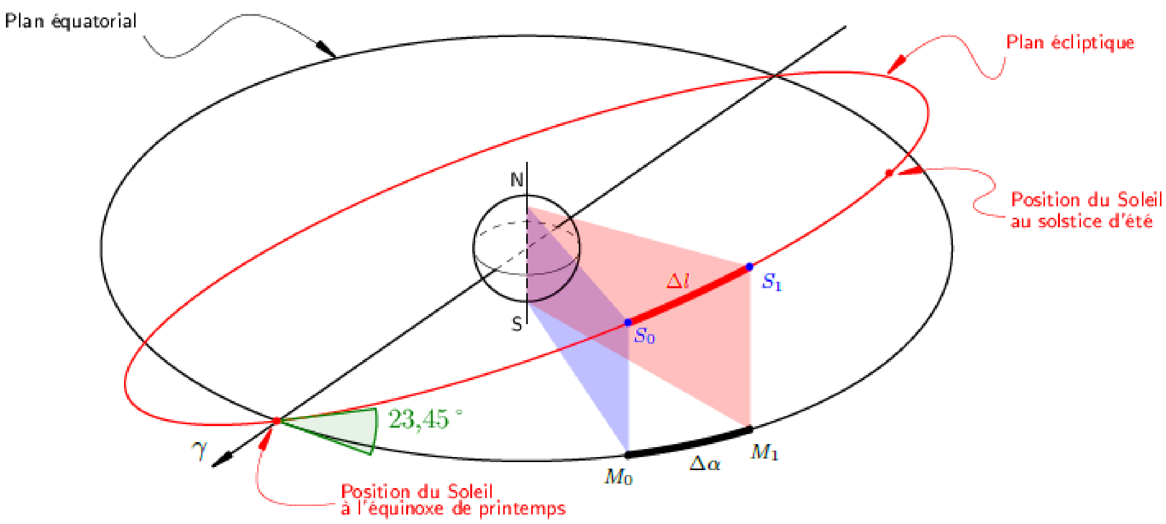
ÉLEMENTS DE CALCUL POUR L'ASTRONOMIE (4ÈME PARTIE) L'ÉQUATION DU TEMPS

Alain Satabin

1. Le problème

L'intervalle de temps séparant deux passages successifs du Soleil dans le plan méridien (midi au cadran solaire), appelé *jour solaire*, n'est pas constant.

Vu de la Terre, le Soleil tourne sur une ellipse dans le plan écliptique, à raison d'un tour en une année (tropique), durée séparant deux passages successifs au point d'équinoxe de printemps. De plus, la Terre tourne sur elle-même à vitesse supposée constante. On note $\boldsymbol{\tau}$ le *jour stellaire*, c'est à dire l'intervalle de temps séparant le passage dans le plan méridien d'une étoile fixe. Négligeant la précession des équinoxes, ce jour stellaire se confond avec le *jour sidéral*, intervalle de temps séparant deux passages successifs du point vernal dans le plan méridien.



Supposons qu'à un instant donné t_0, le Soleil, alors situé en S_0, passe dans le plan méridien du lieu d'observation (en bleu clair sur la figure). Le lendemain, à l'instant $t_{0+\tau}$, on sera revenu à la même position (SNM_0), mais le Soleil aura avancé sur son orbite et sera en S_1. Il faudra donc que le plan méridien avance d'un angle $\Delta\alpha$ complémentaire, et sachant qu'il tourne d'un degré en un temps de $\frac{\tau}{360}$, l'instant suivant de passage au méridien est donné par la relation :

$$t_1 = t_0 + \tau + \frac{\tau}{360} \times \Delta\alpha$$

Et donc la durée séparant deux passages successifs du Soleil au méridien est :

$$t_1 - t_0 = \tau\left(1 + \frac{\Delta\alpha}{360}\right)$$

Si τ est constant, $\Delta\alpha$ ne l'est pas … et ceci pour deux raisons :

- la distance angulaire Δl parcourue par le Soleil sur l'écliptique en un temps τ n'est pas constante (loi des aires),
- l'angle « de projection » que fait Δl avec $\Delta\alpha$ n'est pas constant non plus : il varie de 23,45° aux équinoxes à 0° aux solstices.

Retour au sommaire

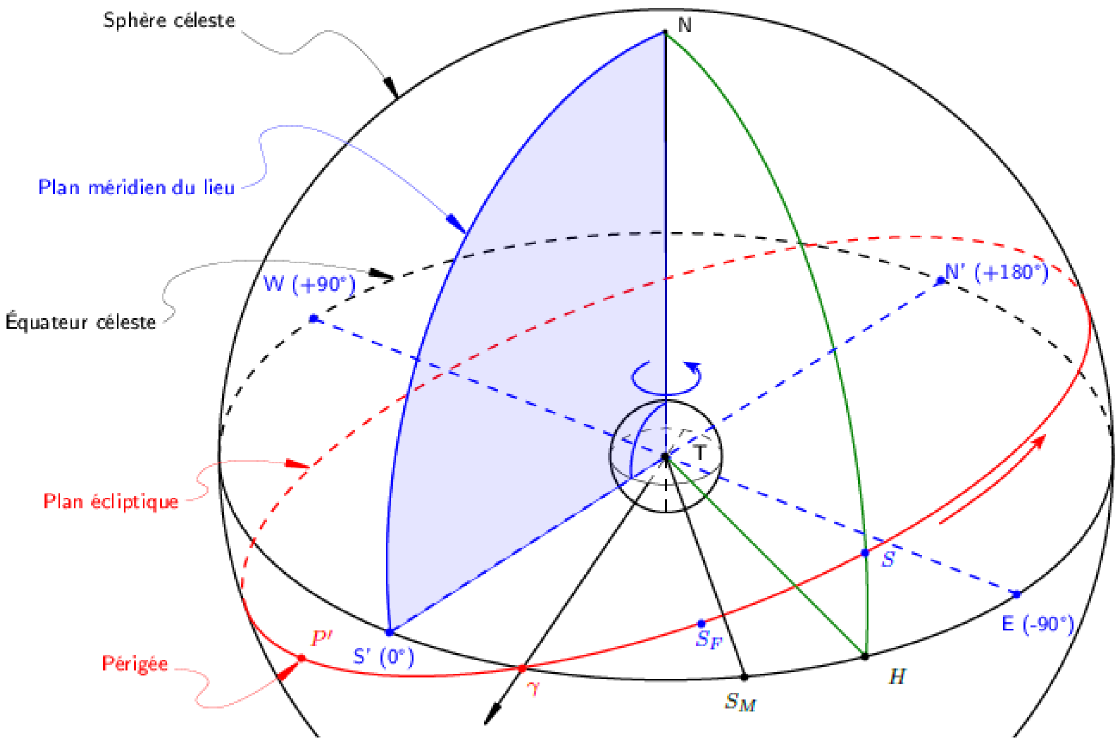
2. La solution

2.1. Soleil fictif et Soleil moyen

On résout le problème en deux temps :

- on considère un *soleil fictif* S_F qui parcourt l'écliptique à vitesse constante, coïncidant avec le soleil vrai S au moment du passage au périgée P',
- on considère un soleil moyen S_{FM} qui parcourt l'équateur céleste à vitesse constante, coïncidant avec le soleil fictif S_F au moment du passage en γ à l'équinoxe de printemps.

Ces trois soleils ont la même période de révolution (*l'année tropique*) et le soleil moyen présente la particularité intéressante de tourner dans le plan équatorial à vitesse constante. La conséquence est que l'intervalle de temps séparant deux passages successifs du soleil moyen dans un plan méridien donné est constant. Cette durée définit le *jour moyen*, ou encore jour tout court, subdivisé ensuite en 24 heures égales chacune, comptant 60 minutes de 60 secondes. Sur cette base, l'année tropique vaut : $A_t = 365{,}242199$ jours.



2.2. Quelques notations

Sur le dessin ci-dessus, le Soleil S parcourt l'écliptique dans le sens indiqué par la flèche rouge. Il est en P' début janvier et son passage en γ définit l'équinoxe de printemps. Au cours d'une journée, le plan méridien tourne dans le sens de la flèche bleue, entrainant avec lui le repère $(S'WN'E)$. Dans ce repère, les angles sont comptés dans le sens horaire (indirect). Le point H est le « projeté » du Soleil réel sur le plan équatorial et on définit les quantités suivantes :

- T_{sm} -- Temps solaire moyen : c'est l'angle $\widehat{\mathrm{S'TS}_M}$ (entre -180° et + 180°)
- T_{sv} -- Temps solaire vrai : c'est l'angle $\widehat{\mathrm{S'TH}}$ (entre -180° et + 180°)
- H_m -- Heure *moyenne : H_m* $= \frac{T_{sm}}{15} + 12\widehat{\mathrm{N'TS}_M}$ (en heures décimales dans [0 ; 24])
- H_v -- Heure *vraie : H_v* $= \frac{T_{sv}}{15} + 12\widehat{\mathrm{N'TH}}$ (en heures décimales dans [0 ; 24])
- L -- *Longitude moyenne du Soleil* : c'est la longitude écliptique de S_F en degrés, origine en γ, sens direct)

[Retour au sommaire](#)

2.3. Vous avez l'heure ?

H_v est l'heure indiquée par un cadran solaire. Il est midi au Soleil (12h) lorsque S' est en H. Au cours de l'année, les heures vraies ne sont pas toutes égales.

H_m est une heure locale réglée sur le soleil moyen. Elle dépend évidemment de la longitude θ du lieu d'observation mais présente l'avantage d'être régulière. En effet, une heure moyenne est le $24^{è}$ de l'intervalle séparant deux passages successifs du soleil moyen dans le plan méridien et cette période est constante.

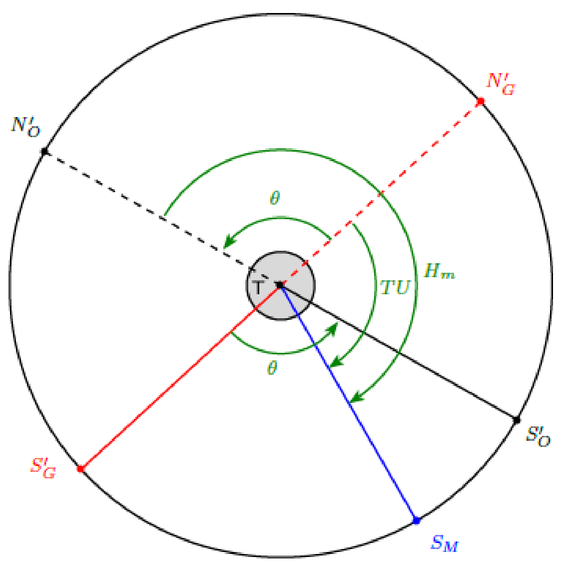
Le décalage entre l'heure moyenne et l'heure vraie est appelé *Équation du temps* et noté E. C'est l'angle HTS_M de la figure, mesuré en heures dans le sens horaire (indirect), et on a :

$$E = H_m - H_v = \frac{T_{sm} - T_{sv}}{15}$$

Le *Temps Universel*, noté TU, est l'heure moyenne du méridien de Greenwich et sert de référence.

L' *Heure Légale*, notée HL, d'un lieu est définie de façon arbitraire pour une zone en ajoutant un correctif δH au temps universel et correspond à l'heure indiquée par les montres. Par exemple en France métropolitaine, $\delta H = +1$ en hiver et $\delta H = +2$ en été.

2.4. Expression de l'heure légale



Regardons la scène du pôle nord céleste. Le disque grisé central est la Terre et le grand cercle est l'équateur céleste. Les angles sont mesurés en heures et le sens positif est le sens horaire. Le segment rouge $\boldsymbol{TS'_G}$ (respectivement $\boldsymbol{TS'_O}$) est le plan méridien de Greenwich (respectivement de l'observateur). On retrouve ici le fait que la latitude $\boldsymbol{\theta}$ de l'observateur est comptée négativement à l'est de Greenwich, et positivement vers l'ouest. Les heures moyennes ($\boldsymbol{TU}$ pour Greenwich et $\boldsymbol{H_m}$ pour l'observateur) sont indiquées comme des angles.

Par relation de Chasles sur les angles orientés, nous lisons sur ce dessin la relation suivante :

$$\boldsymbol{TU = H_m + \theta}$$

Compte tenu du fait que l'heure légale est donnée par la relation :

$$\boldsymbol{HL = TU + \delta H}$$

Et que l'équation du temps nous fournit le décalage entre l'heure solaire et l'heure moyenne :

$$\boldsymbol{H_m = H_v + E}$$

On en déduit, pour un lieu de latitude $\boldsymbol{\theta}$ et de correctif horaire $\boldsymbol{\delta H}$:

Relation 1

$$\boxed{HL = H_v + E + \theta + \delta H}$$

relation qui permet de calculer l'heure légale du lieu (HL) à partir de l'heure lue sur un cadran solaire $(\mathrm{H_v})$. Cette équation permet aussi, en particulier, de déterminer l'heure légale de passage du Soleil dans le plan méridien en prenant $\mathrm{H_v} = 12\mathrm{h}$.

Évidemment, pour que cette formule soit utilisable, il nous faut connaître la valeur de E et c'est ce qui va nous occuper maintenant.

Retour au sommaire

3. Calcul de l'équation du temps

3.1. Expression de la longitude moyenne

Nous calculons ici des longitudes écliptiques géocentriques. Leur origine est le point vernal γ et les angles sont mesurés en degré, le sens positif étant le sens direct (antihoraire). La notation γ représente le point de l'écliptique (et de l'équateur) et $\vec{\gamma}$ représente la direction de référence des angles de vecteurs.

Le soleil fictif tourne sur l'écliptique à vitesse constante, faisant un tour en une année tropique. Si on note t_0 l'instant du dernier passage au périgée P', l'angle $\left(\overrightarrow{TP'}, \overrightarrow{TS_F}\right)$ exprimé en degré à l'instant t vaut $\frac{360(t-t_0)}{A_t}$. On remarquera que c'est exactement l'expression de l'anomalie moyenne M de la Terre et qu'elle nous est fournie en radian dans le tableau « Données Planètes1 du PV145 »

D'autre part, le soleil fictif coïncide avec le Soleil lors de son passage au périgée, et le Soleil est au périgée $(S = S_F = P')$ lorsque la Terre est au périhélie de son orbite $(T = P)$. En se plaçant à cet instant t_0, on peut voir que la longitude géocentrique du périgée $\left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TP'}\right)$ est en relation avec la longitude héliocentrique du périhélie de l'orbite terrestre ϖ :

$$\left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TP'}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{PP'}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{P'P}\right) + 180 = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{SP}\right) + 180 = \overline{w} + 180.$$

La longitude moyenne est donc obtenue par relation de Chasles :

$$L = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TS_F}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TP'}\right) + \left(\overrightarrow{TP'}, \overrightarrow{TS_F}\right) = M + \overline{w} + 180.$$

Ce qui, avec les tableaux (Données Planètes1) et (Données Planètes2) et le fait que pour la Terre, $\overline{w} = w$, nous donne :

$$\mathrm{L} = (-0{,}0397 + 0{,}017201969\ N) \times \frac{180}{\pi} + 101{,}24 + 0{,}0000471\ N + 180\ .$$

Relation2

$L = 0{,}9856473N + 278{,}97$ en degré

N étant le temps écoulé, en jour décimal, depuis le 0 janvier 1901 à 0 heure.

Remarquons aussi que S_M et S_F tournant régulièrement avec la même période et coïncidant au passage en γ , la longitude écliptique de S_F est en même temps l'ascension droite de S_M:

$$\mathrm{L} = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TS_F}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TS_M}\right).$$

3.2. Coordonnées équatoriales du Soleil

Nous voulons ici calculer l'ascension droite (α) et la déclinaison (δ) du Soleil à un instant donné.

$$\alpha(S) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TH}\right) et\ \delta(S) = \left(\overrightarrow{TH}, \overrightarrow{TS}\right)$$

Dans le triangle sphérique (γ, H, S)[1], rectangle en H, le côté $\widehat{\gamma H}$ vaut α, le côté $\widehat{HS}$ vaut δ, l'angle en γ vaut 23,45° et le côté $\widehat{\gamma S}$ vaut λ, longitude géocentrique du Soleil qui se déduit de λ longitude héliocentrique de la Terre[2]:

$$\lambda' = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{TS}\right) = \left(\vec{\gamma}, \overrightarrow{ST}\right) + 180 = \lambda + 180$$

Les relations trigonométriques 1 et 2 nous donnent :

$$\cos(\lambda') = \cos\alpha\ \cos(\delta) + \sin(\alpha)\sin(\delta)\cos(90°) \text{ et } \sin(\lambda')\sin(23{,}45°) = \sin(\delta)\sin(90°)$$

La seconde nous permet de calculer $cos(\delta)$, sachant qu'il est positif car $\delta \in]-90°\,;\,90°[$

$$\cos(\delta) = \sqrt{\{1 - \sin^2(\delta)\}} = \sqrt{\{1 - \sin^2(\lambda')\sin^2(23{,}45°)\}} \quad \text{avec de plus}$$

$$\delta = \arcsin\left(\sin(\lambda')\sin(23{,}45)\right)$$

[1] Voir figure 2.1

[2] Voir équation 6

Retour au sommaire

Et en reportant dans la première, on obtient :

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(\lambda')}{\sqrt{(1-\sin^2(\lambda'))\sin^2(23{,}45°)}}$$

Remarquons que, une fois remis entre −180° et + 180°, λ et α ont le même signe, et que c'est aussi le signe de leur sinus. On en déduit que :

$$\alpha = \mathrm{Sgn}\big(\sin(\lambda')\big) \times \arccos\left(\frac{\cos(\lambda')}{\sqrt{1-\sin^2(\lambda')\sin^2(23{,}45°)}}\right)$$

Compte tenu du fait que $\lambda' = \lambda + 180$, on obtient les coordonnées équatoriales du Soleil :

$$\boxed{\alpha(S) = \mathrm{Sgn}\big(\sin(\lambda)\big) \times \arccos\left(\frac{\cos(\lambda)}{\sqrt{1-\sin^2(\lambda)\sin^2(23{,}45°)}}\right)}$$ **Relation 3**

$$\boxed{\delta(S) = -\arcsin\big(\sin(\lambda)\sin(23{,}45°)\big)}$$ **Relation 4**

3.3. Calcul de l'équation du temps

En travaillant sur le cercle équatorial orienté dans le sens trigonométrique, nous avons :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{TH}},\overrightarrow{\mathrm{TS_M}}\right) = \left(\vec{\gamma},\overrightarrow{\mathrm{TS_M}}\right) - \left(\vec{\gamma},\overrightarrow{\mathrm{TH}}\right) = \mathrm{L} - \alpha(\mathrm{S})$$

Compte tenu du fait que E est traditionnellement exprimé en minutes, que c'est bien l'angle ci-dessus mais mesuré dans le sens horaire (indirect), et que 1° correspond à 4 minutes, nous avons (α et L seront remis entre 0 et 360 avant le calcul) :

$$\boxed{E = 4(\alpha(S) - L)\ \text{minutes}}$$ **Relation 5**

L'équation du temps évolue très peu sur une journée et la valeur calculée à (12 : 00 TU) reste valable pour la journée complète.

3.4. Un exemple

Plaçons-nous à Charleville-Mézières le 24 mars 2021 à (12 : 00 TU), c'est à dire (13: 00 HL).

La relation NbreJours1901 donne :

$$N = 43913{,}5$$

La relation Longitude Moyenne donne (remis entre 0 et 360°) :

$$L = 0{,}9856473N + 278{,}97 = 43562{,}19271$$

$$L = 2{,}19°$$

La méthode vue dans le PV145 « vision héliocentrique des planètes » appliquée à la Terre donne :

$$M \approx 1{,}3767\ \text{rad.} \quad u \approx 1{,}3932\ \text{rad.} \quad v \approx 1{,}4096\ \text{rad.} \approx 80{,}77° \quad \varpi = \omega \approx 103{,}31° \quad \lambda \approx 184.07°$$

Les relation 3 et relation 5 donnent :

$$\alpha(S) \approx 3{,}74° \quad \delta(S) \approx 1{,}62°$$

puis l'équation du temps donne alors :

$$E \approx 6{,}18\ \text{minutes}$$

À cette période de l'année on a :

$$\delta H = +1h$$

et pour la longitude on a :

$$\theta = 4°\,45' Est = -4 \times 4{,}75 = -19\ \text{min}$$

Donc si on lit 15 : 15 sur un cadran solaire, l'heure légale est (avec la relation 1) :

$$HL = 15{:}15 + 00{:}06 - 00{:}19 + 01{:}00 = 16{:}02$$

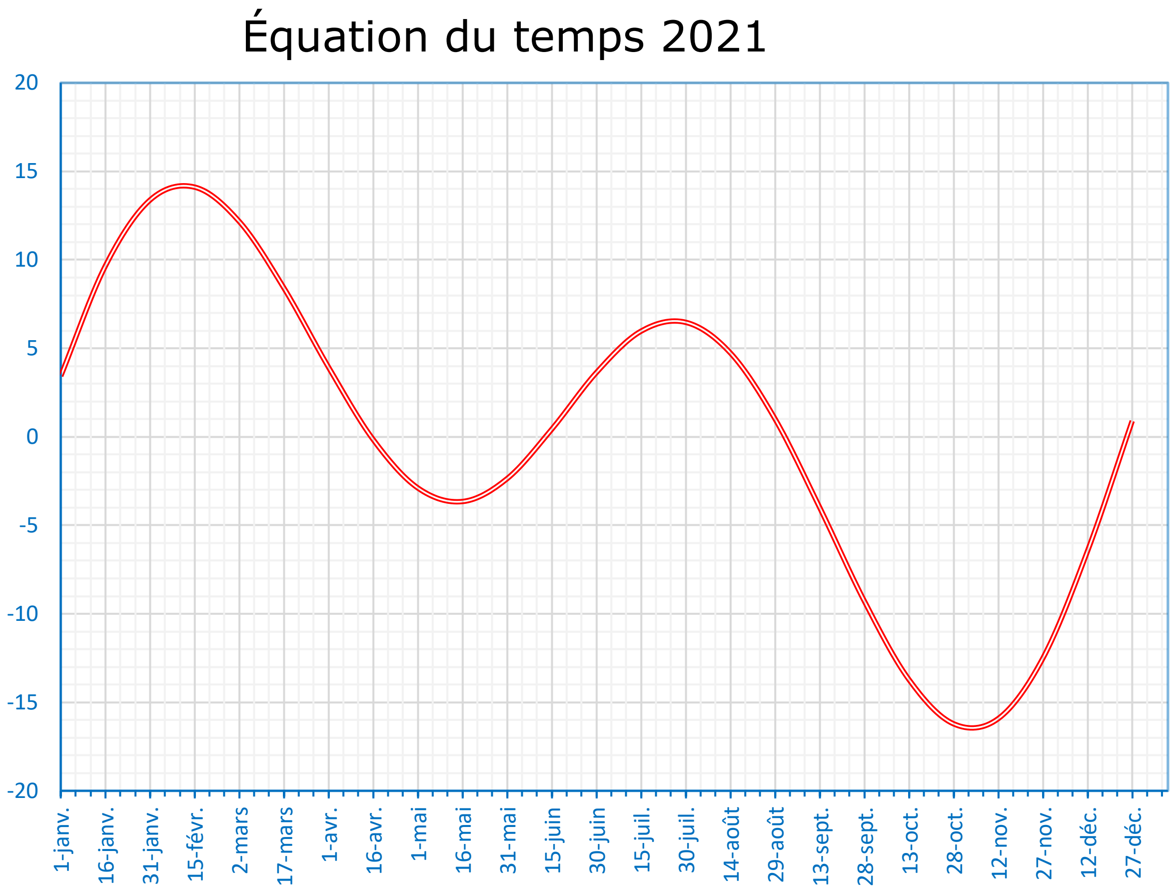
Retour au sommaire

3.5. Un graphique annuel

En programmant le processus de calcul dans un tableur on peut tracer l'évolution de l'équation du temps.

Sur le graphique qui suit, le calcul a été fait pour l'année 2021. D'une année à l'autre la courbe évolue très peu, se décalant jusqu'à trois jours avant le passage à une année bissextile. L'axe des abscisses est quadrillé de 5 jours en 5 jours et l'équation du temps est exprimée en minutes.

Remarquons que l'équation du temps s'annule 4 fois dans l'année (en 2021 les 15 avril, 13 juin, 1 septembre et 25 décembre) et que le décalage peut atteindre environ 17 minutes à son maximum (en valeur absolue).



Retour au sommaire

VU SUR LA TOILE

LES MATHÉMATIQUES PAR LA BANDE

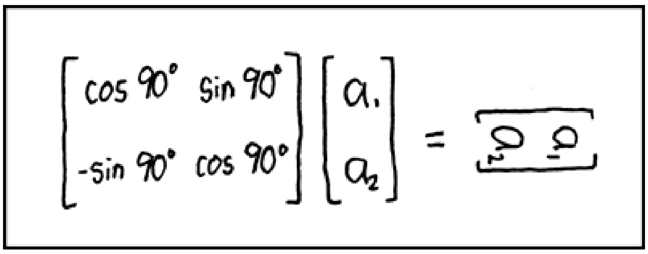
Gilles Waehren

Nous sommes nombreux à apprécier la présence des mathématiques dans l’expression artistique. Le neuvième art entretient toutefois, avec notre discipline, un rapport spécial. Que ce soit pour le dessin lui-même, le contenu du dialogue, voire le scénario, les mathématiques peuvent s’insérer de façon plus ou moins volontaire dans la bande dessinée. Enfin, la BD peut aussi servir de support pédagogique à l’explication d’une notion compliquée.

Le bulletin national de l’APMEP fait la part belle à ce mode d’expression, quand le dessin synthétise un long discours ou donne un regard inattendu sur un article. Les adhérents pourront retrouver les créations des nombreux dessinateurs de bande qui ont contribué au Bulletin vert et au Fil des maths sur le site de l’association.

Yvan Monka recense, sur maths et tiques, un grand nombre d’apparitions des mathématiques dans la bande dessinée, que ce soit dans des ouvrages qui leur sont dédiés (le Savant Cosinus ou l’équation de Navier-Stokes), dans des albums connus de tous (Tintin, Astérix, la Rubrique à brac) ou dans des dessins animés (les Shadoks ou Donald au pays des mathématiques). On retrouve ces références sur le blog d’Olivier Longuet, qui, en outre, s’est fendu d’un article sur l’utilisation de propriétés de mathématiques pour la réalisation d’albums. Malheureusement, la publication est assez ancienne et il faudra faire des recherches pour compléter les images manquantes. Je me permets d’inclure à cette liste, la BD Imbattable, plutôt réservée à un jeune public, dont les audaces formelles sont parfois étonnantes.

On ne manquera pas de se perdre sur Alta Plana, site consacré aux nombreuses réalisations de François Schuiten et Benoît Peeters, dont une grande partie du travail fait vivre des mondes grandioses à l’architecture impeccable. Le concepteur de ces pages s’est évertué à rédiger un contenu encyclopédique, présentant toutes les publications de ces deux grands artistes et offrant une iconographie riche et organisée. La fièvre d’Urbicande a également inspiré une séquence très complète en Première Scientifique, à une collègue de La Réunion



XKCD est la bande dessinée en ligne de Randall Munroe, qui fut chercheur à la NASA, avant de devenir exclusivement dessinateur et de mettre en lignes des centaines de planches, sur des thèmes très variés, incluant mathématiques et physique. Le dessin est souvent rudimentaire, prétexte à un texte étoffé, l’humour et la poésie sont régulièrement présents. Il me reste encore un grand

Retour au sommaire

nombre de pages à explorer et je me limite ici à une sélection de quelques strips mathématiques dont les numéros 184, 252, 271, 503, 781, 899 ou 1184.

Ces deux planches sur Pythagore et Thalès pourront intéresser des collégiens, en proposant des aspects parfois méconnus de la vie de ces deux mathématiciens. Ces dessins rappelleront à certains ceux de Jean-Pierre Petit pour Anselme Lanturlu. Toujours dans le but d'apprendre, ActuaBD affiche plusieurs planches de l'adaptation en BD des capsules vidéos réalisées par Nesim Fintz, sur l'histoire des mathématiques et de l'informatique.

Ceux d'entre vous qui souhaitent s'investir dans la création pourront utiliser ces applications de production de BD en ligne :

- sur la base d'un strip préformaté avec des oiseaux (les birds) ;
- avec Canva qui propose de nombreux modèles ;
- avec Adobe Spark si vous êtes plus ambitieux.

Peut-être cela vous donnera-t-il l'envie de participer au concours « Bulles au carré » , dont c'est déjà la dixième édition (sur le thème « Maths et épidémie »). Les résultats de l'édition 2021 sont visibles ici.

Il reste difficile de trouver toutes les planches qu'on voudrait admirer, librement sur le Web. Il faudra parfois ouvrir son portefeuille pour se procurer certains ouvrages comme la « Mathématique du Chat », conçu par Daniel Justens, qui a souvent fait à l'APMEP l'honneur de sa présence. Larry Gonick est un professeur de mathématiques américain qui a publié plusieurs ouvrages scientifiques, notamment « Les Maths en BD », en deux tomes : algèbre et analyse ; une initiative également partagée par Yoram Bauman, économiste américain, avec un titre très voisin.
Enfin, on complétera son panier avec ce magnifique ouvrage de Frédéric Bézian « Le courant d'art », consacré à Mondrian, dans lequel le dessinateur cherche à tisser des liens incertains entre les travaux du mathématicien Oliver Byrne sur Euclide et les tableaux du célèbre peintre.

« Les Voyages de Gulliver »
par GALIC & ECHEGOYEN
(Ed. Noctambule)

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

PRATIQUES PÉDAGOGIQUES
À FORT IMPACT EN MATHÉMATIQUES

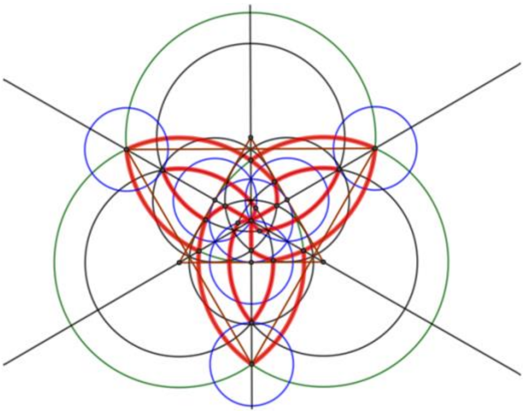
Groupe Maths et Arts - APMEP Lorraine

Le 9 févier 2021, le Café Pédagogique nous suggérait la consultation de ce document au titre bien attirant.

Ces derniers temps, nous avons beaucoup entendu des discours politiques nous vantant des méthodes inspirées par ce qui se fait en Asie, nous avons eu envie d'aller consulter ce qui est fait dans l'Ontario, de l'autre côté de l'Atlantique.

Amateurs de belles choses, notre regard a été attiré par le motif de la page de couverture. GeoGebra nous a été d'un grand secours pour le reproduire.

L'envie est ensuite venue de reproduire le logo de l'Ontario. Il est bien petit en bas à droite du document, nous l'avons retrouvé à une taille plus utilisable.



Le triangle équilatéral est la source des autres tracés.

Nous en avons profité pour aller faire une visite un peu plus complète du site du ministère de l'éducation de cet état. Les curriculums des années 1 à 8 et 9 à 12 sont une lecture bien éclairante.

Comme le dit un des journalistes de la chaine ARTE, « Et surtout, restez curieux ! ».

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

HEUREUX QUI COMME ULYSSE

François Drouin

Dans le recueil de poèmes « Les Regrets » de Joachim Du Bellay, le XXXIème sonnet est bien connu des amateurs de poésie.

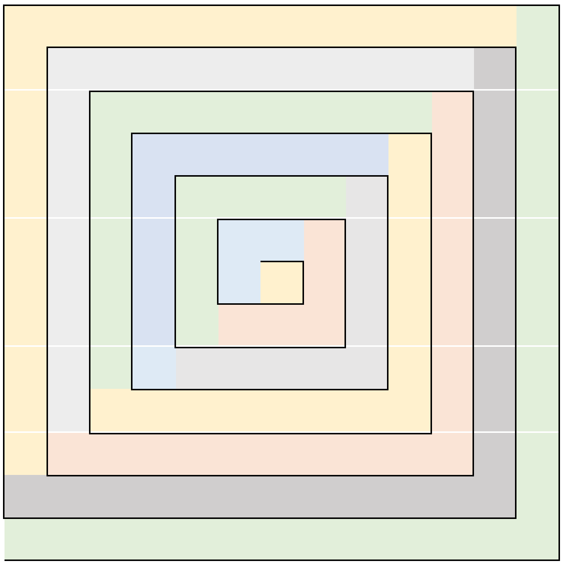
Son interprétation par Ridan en 2009 a certainement facilité sa découverte auprès des élèves.

Heureux qui, comme Ulysse, a fait un beau voyage
Ou comme cestuy-là qui conquit la toison,
Et puis est retourné, plein d'usage et raison,
Vivre entre ses parents le reste de son âge !

Quand reverrai-je, hélas, de mon petit village
Fumer la cheminée, et en quelle saison,
Reverrai-je le clos de ma pauvre maison,
Qui m'est une province, et beaucoup davantage ?

Plus me plait le séjour qu'ont bâti mes aïeux,
Que des palais Romains le front audacieux,
Plus que le marbre dur me plait l'ardoise fine,

Plus mon Loire gaulois, que le Tibre latin,
Plus mon petit Lyré, que le mont Palatin,
Et plus que l'air marin la douceur angevine.



T	E	D	E	S	O	N	Â	G	E	Q	U	A
S	E	I	N	D	U	S	A	G	E	E	T	N
E	L	C	O	N	Q	U	I	T	L	A	R	D
R	P	I	A	U	V	O	Y	A	G	T	A	R
E	É	U	E	M	M	E	U	L	E	O	I	E
L	N	Q	B	O	U	R	E	Y	O	I	S	V
S	R	À	N	C	E	H	U	S	U	S	O	E
T	U	L	U	I	U	Q	X	S	C	O	N	R
N	O	Y	T	I	A	F	A	E	O	N	V	R
E	T	U	T	S	E	C	E	M	M	E	I	A
R	E	R	T	S	E	S	I	U	P	T	V	I
A	P	S	E	S	E	R	T	N	E	E	R	J
E	P	N	O	M	E	D	S	A	L	É	H	E

Dans cette spirale, s'enroulent le texte de la première strophe et le début de la deuxième de la poésie.

Dans cette spirale, se repèrent des gnomons visualisant les premiers nombres entiers impairs ainsi que leur somme égale à un nombre carré.

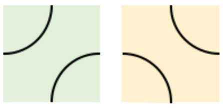
Retour au sommaire

T	E	D	E	S	O	N	Â	G	E	Q	U	A
S	E	I	N	D	U	S	A	G	E	E	T	N
E	L	C	O	N	Q	U	I	T	L	A	R	D
R	P	I	A	U	V	O	Y	A	G	T	A	R
E	É	U	E	M	M	E	U	L	E	O	I	E
L	N	Q	B	O	U	R	E	I	O	I	S	V
S	R	À	N	C	E	H	U	S	U	S	O	E
T	U	L	U	I	U	Q	X	S	C	O	N	R
N	O	Y	T	I	A	F	A	E	O	N	V	R
E	T	U	T	S	E	C	E	M	M	E	I	A
R	E	R	T	S	E	S	I	U	P	T	V	I
A	P	S	E	S	E	R	T	N	E	E	R	J
E	P	N	O	M	E	D	S	A	L	É	H	E

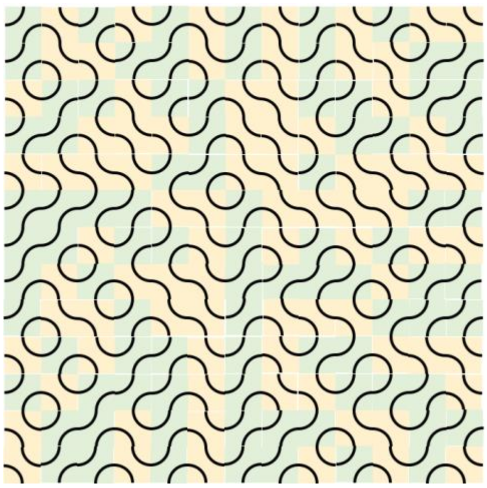
T	E	D	E	S	O	N	Â	G	E	Q	U	A
S	E	I	N	D	U	S	A	G	E	E	T	N
E	L	C	O	N	Q	U	I	T	L	A	R	D
R	P	I	A	U	V	O	Y	A	G	T	A	R
E	É	U	E	M	M	E	U	L	E	O	I	E
L	N	Q	B	O	U	R	E	I	O	I	S	V
S	R	À	N	C	E	H	U	S	U	S	O	E
T	U	L	U	I	U	Q	X	S	C	O	N	R
N	O	Y	T	I	A	F	A	E	O	N	V	R
E	T	U	T	S	E	C	E	M	M	E	I	A
R	E	R	T	S	E	S	I	U	P	T	V	I
A	P	S	E	S	E	R	T	N	E	E	R	J
E	P	N	O	M	E	D	S	A	L	É	H	E

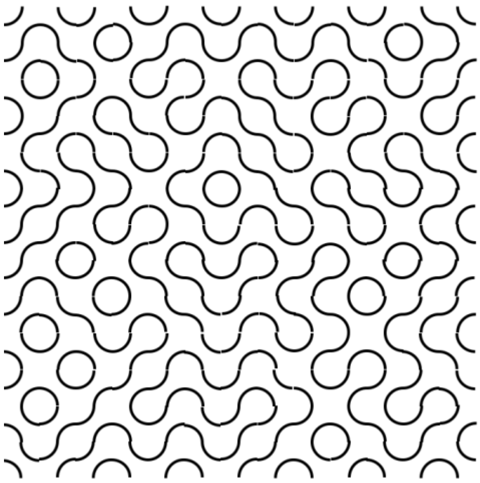
Les cases contenant les voyelles sont coloriées en jaune, celles contenant les consonnes sont coloriées en vert.

Ne dirait-on pas un QR-Code ?



Les carrés de couleur sont remplacés par ces deux tuiles.





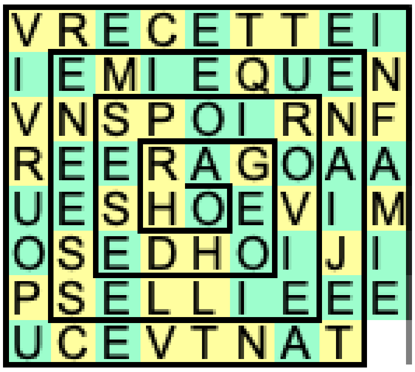
Voici le début du motif « Boucles et virages » correspondant au poème.

Informatiser le processus permet une création facile pour d'autres textes.

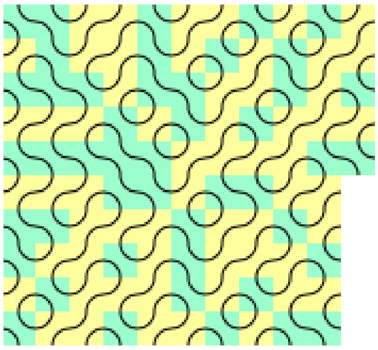
Retour au sommaire

Gilles a imaginé un programme Javascript qui nous offre très rapidement des représentations avec les lettres ou les tuiles de Truchet. L'occasion était belle de le tester avec des textes récités de mémoire !

Un extrait du Cid de Pierre Corneille



Le début de la fable « Le corbeau et le renard » de Jean de La Fontaine



Vous pouvez maintenant aisément créer ou faire créer les spirales correspondant à vos textes favoris.

FESTIVAL « VIGN'ART » EN CHAMPAGNE

François Drouin

Voici une occasion de faire un petit tour en Champagne afin d'allier « belles choses » (à consommer sans modération) et « bonnes choses » (à consommer avec modération). Quatorze œuvres sont à découvrir jusqu'au 15 septembre 2021, disséminées en divers endroits du vignoble champenois.

Le 14 mai, notre quotidien régional nous a présenté ces « Réflexions en Champagne ». L'horizon se reflète sur des cylindres métalliques.

D'autres rencontres avec les mathématiques sont présentes parmi les œuvres exposées : le visiteur pourra découvrir une anamorphose, des parallélépipèdes posés ou assemblés, un icosaèdre, une pyramide et il n'oubliera pas d'aller voir de près ce miroir cylindrique et le triangle amoureux !

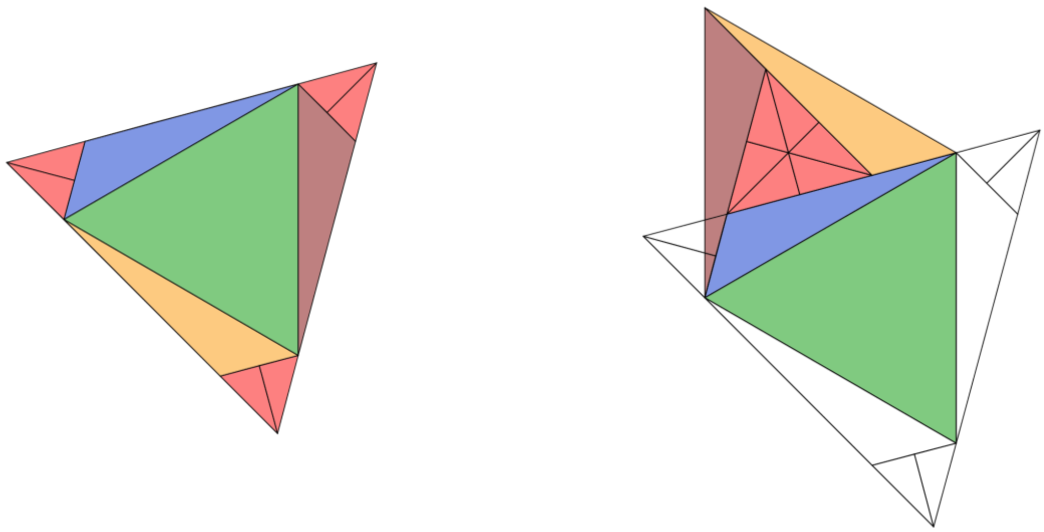
Retour au sommaire

MATHS ET DÉCOUPAGES

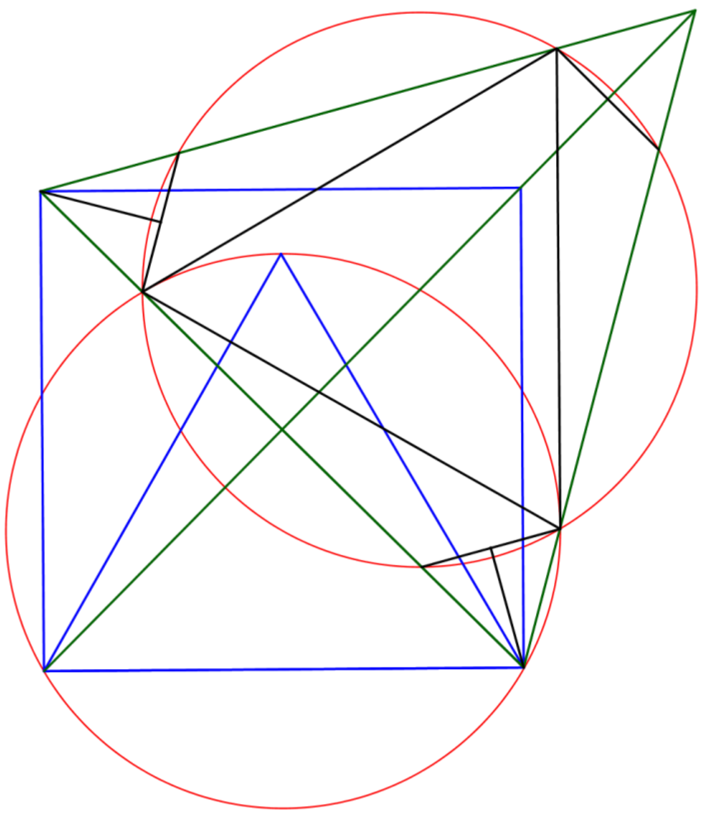
LE PUZZLE DIX POUR UN

APMEP Lorraine – Groupe Jeux

Pour 2021, Fathi nous propose ce découpage en dix pièces permettant la duplication du triangle équilatéral.



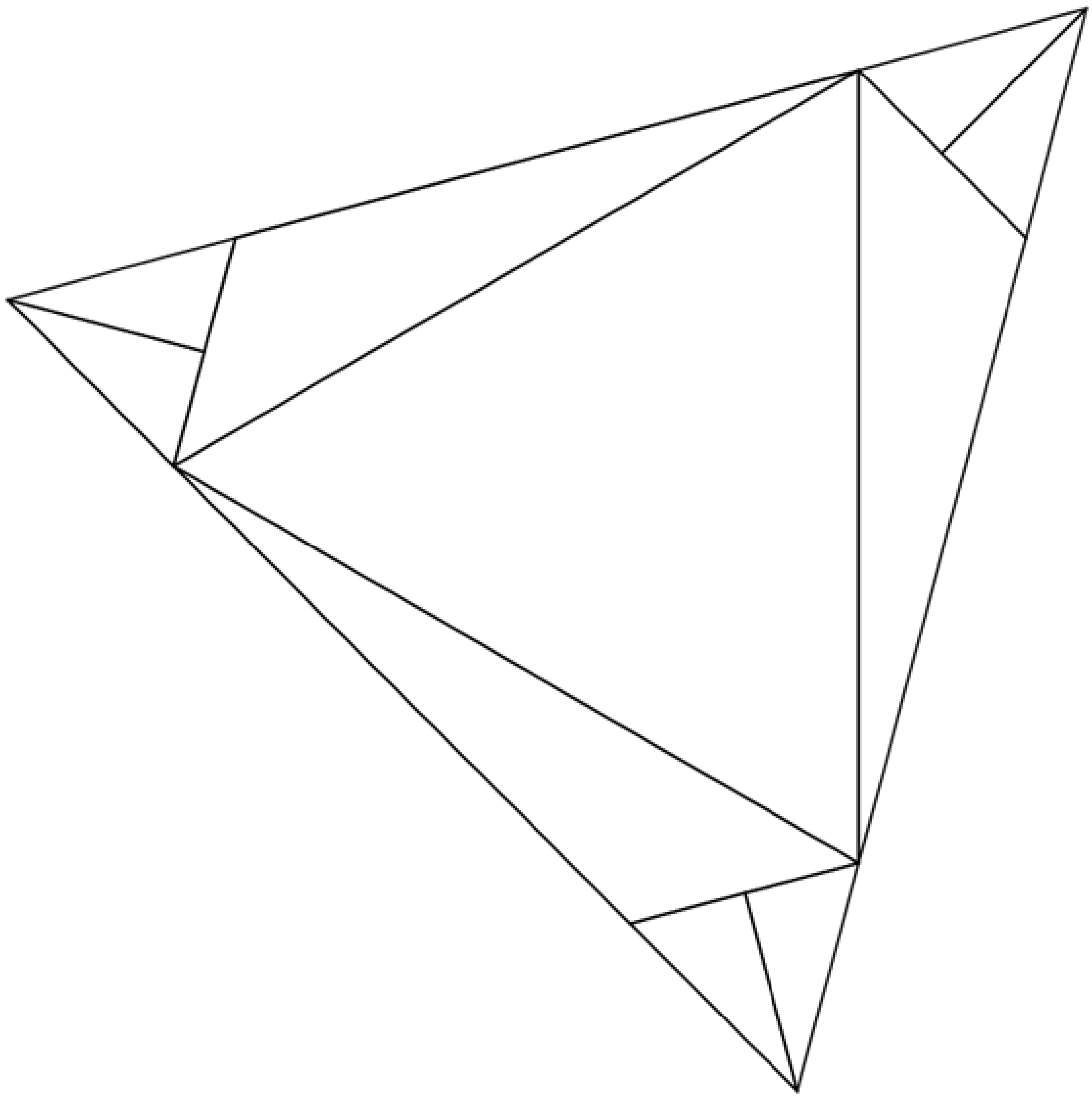
Voici une construction de ce puzzle.



Les deux cercles rouges ont le même rayon.

Retour au sommaire

Voici le puzzle à reproduire, coller sur du carton et découper.

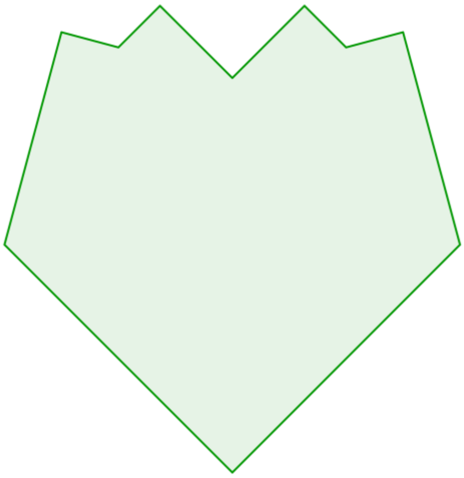


Retour au sommaire

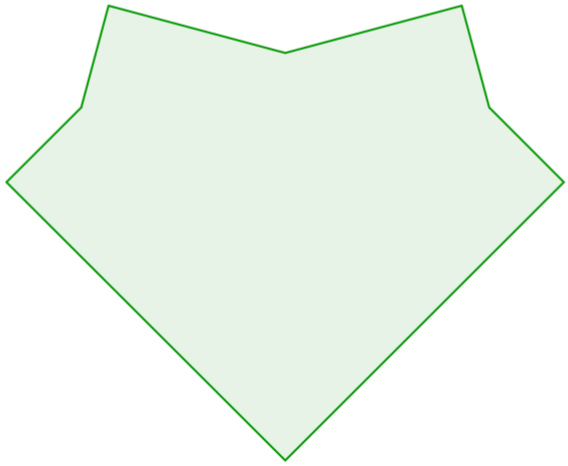
Des polygones à réaliser avec les dix pièces du puzzle

Un triangle équilatéral
Deux triangles équilatéraux de même dimension
Un losange

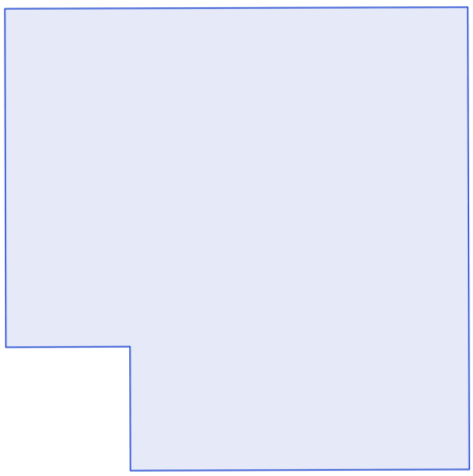
Un artichaut



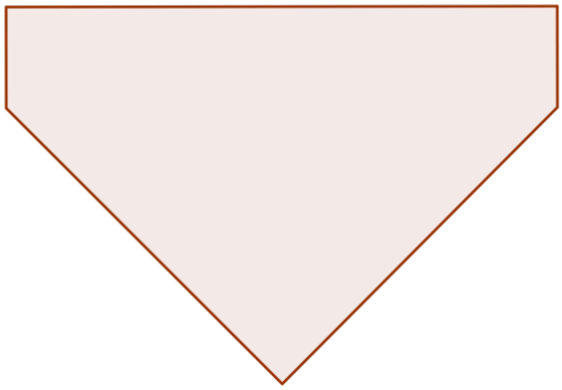
La tête d’un renard



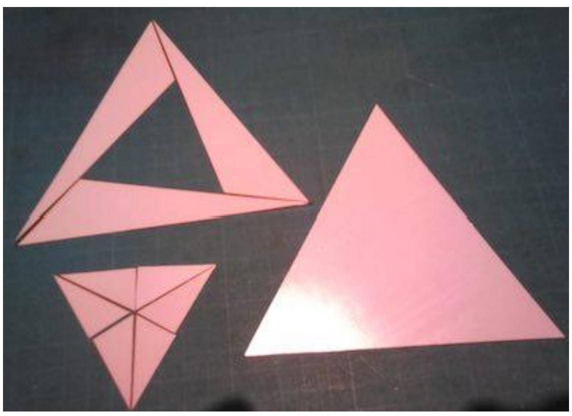
Un carré écorné



Un pentagone ayant trois angles droits



Des solutions sont accessibles sur notre site.



Dominique Cambresy nous a fait parvenir cette photo qui donne bien envie d’aller faire un tour vers les agrandissements, les homothéties et les similitudes.

Nos lecteurs feront sans doute preuve de créativité : le Petit Vert est preneur d’autres photos de ce qu’ils auront imaginé.

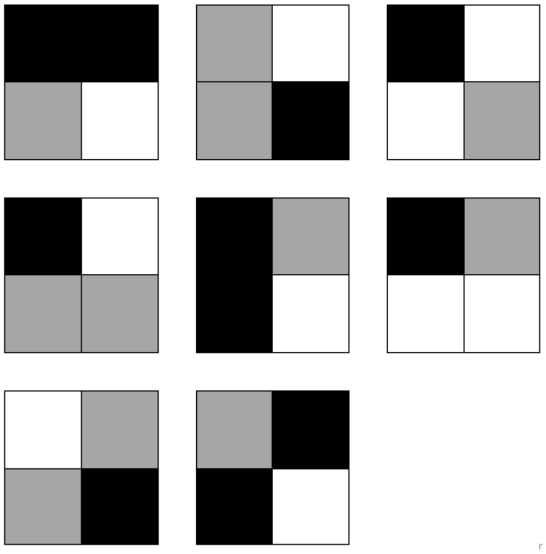
Retour au sommaire

MATHS ET JEUX

AUTOUR D'UN EXERCICE DU RALLYE MATHÉMATIQUE

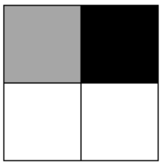
APMEP Lorraine - groupe Jeux

L'énoncé



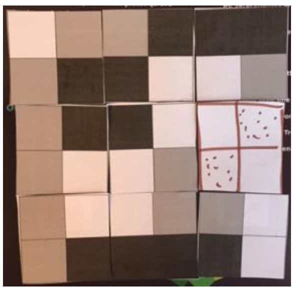
De Montréal, le commissaire Vladimir a envoyé à un jeu formé de 9 carrés tricolores tous différents, chacun partagé en 4 carrés identiques colorés en noir, gris et blanc. Après plusieurs utilisations, le maladroit commissaire Girard a égaré une pièce. Aide-le à la redessiner ?

La solution proposée



Voici la pièce retrouvée derrière le bureau du commissaire.

Remarques issues d'échanges au sein du groupe Maths et Jeux de la régionale



Puisqu'il y a neuf pièces, il est tentant dans un premier temps de rechercher la pièce manquante en formant un carré 3x3. Il est à noter que cette première approche a été très souvent celle des élèves de CE2 dans la recherche relatée dans ce Petit Vert. La neuvième pièce imaginée convient-elle ?

Accepter cette proposition de pièce bicolore laisserait entendre que la solution n'est peut-être pas unique, d'autres essais font apparaitre d'autres pièces possibles.

Les huit pièces proposées sont « tricolores », nous pouvons supposer que la neuvième l'est également.

<u>Première démarche</u>

Recherchons l'ensemble de ces pièces tricolores, puis comparons avec les huit pièces fournies.

Retour au sommaire

Les couleurs auraient pu être notées **N**, **G**, **B** (**N**oir, **G**ris, **B**lanc), dans ce qui suit, elles sont notées 1, 2 et 3, la recherche peut ainsi être généralisées à d'autres couleurs, en particulier des plus vives préférées par les élèves.

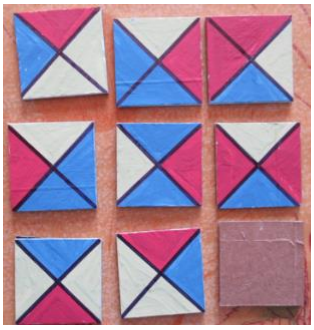
Voici les codages des pièces. On commence par le « 1 » car il y forcément une case noire quelque part (les pièces sont « tricolores »), on tourne toujours dans le même sens (ici le sens des aiguilles d'une montre).

1123	1132	1213	1223	1232	1233	1322	1332	1323

En comparant avec les huit pièces proposées, nous remarquons que « 1332 » manque (« **NBBG** » ou « **GNBB** » comme le dessin de la pièce retrouvée derrière le bureau du commissaire).

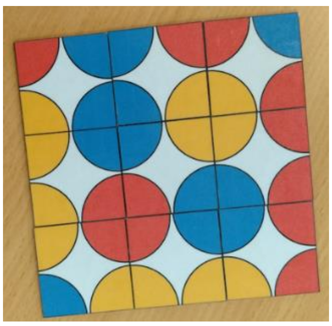
Deuxième démarche

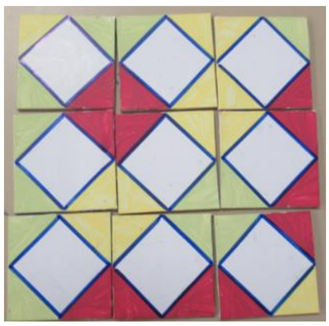
Puisqu'il y a trois couleurs, je suis sûr que deux des quatre zones sont de même couleur. Ces zones peuvent être adjacentes (deux pièces sont ensuite possibles pour les deux autres couleurs à placer) ou se faire face (une seule pièce est possible pour les deux autres couleurs à placer). Parmi les pièces proposées, je repère les trois pièces ayant deux zones noires et les trois pièces ayant deux zones grises. Il manque donc une pièce avec deux zones blanches qui est aisément retrouvée. Cette démarche est voisine de celle utilisée lors de l'expérimentation en Cours Moyen relatée dans ce Petit Vert.



Ces deux démarches peuvent être mises en œuvre pour retrouver la pièce retournée parmi cet ensemble de neuf pièces. Bonne recherche.

Suite des échanges parmi les joueurs et joueuses de l'association





Les types de pièces et les couleurs sont variées, mais en Lorraine et en région parisienne, n'ont été trouvées que des carrés 3x3 ayant en pièce centrale une pièce dont deux zones opposées sont de même couleur. En existe-t-il d'autres ? La question reste ouverte.

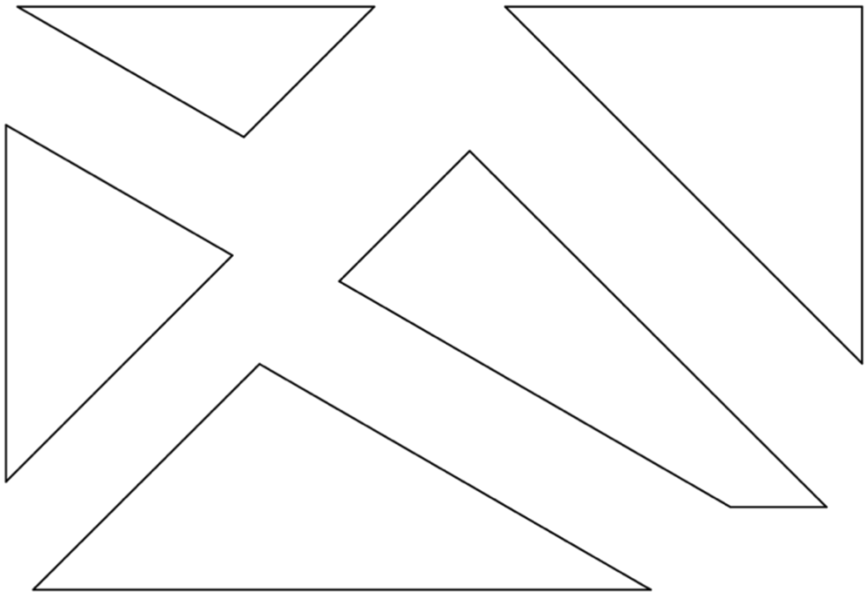
Retour au sommaire

MATHS ET JEUX

LE PUZZLE DE GRENOBLE

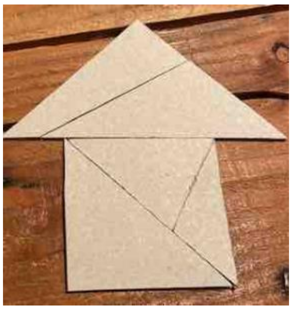
Groupe Jeux - APMEP Lorraine

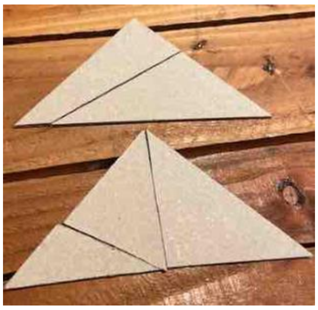
Ce puzzle géométrique a circulé entre nous sous la forme de pièces déjà découpées glissées dans une enveloppe.



Le défi 2 du PV 145 demandait la réalisation avec les cinq pièces d'un carré, d'un parallélogramme, d'un losange, d'un triangle, d'un rectangle et d'un trapèze.

Ces diverses constructions permettent-elles de trouver un polygone à partir duquel le puzzle a peut-être été construit ?

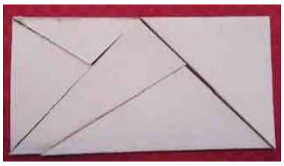


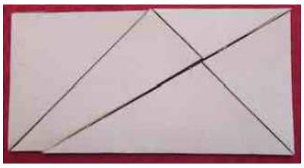


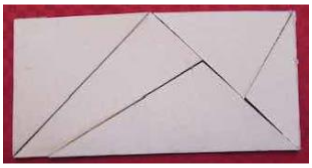
Quelques manipulations « libres » ont amené ces réalisations : une maison et un sapin. Les triangles et les carrés qui les composent vont être d'une grande aide par la suite pour réaliser les polygones demandés.

Le losange a résisté chez certains d'entre nous. En toute amitié, un petit coup de pouce a été proposé : cherche toutes les possibilités d'obtenir un rectangle.

Voici des photos des quatre solutions finalement trouvées.





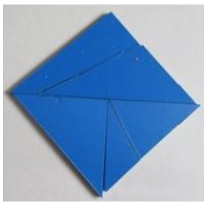


La troisième montre un alignement qui ne se retrouve pas sur les autres. N'y aurait-il pas là une piste vers la découverte des tracés utilisés pour dessiner les pièces du puzzle à partir d'un rectangle ?

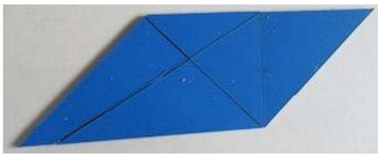
Retour au sommaire

Des photos des polygones demandés

Carré

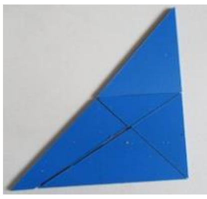


Parallélogramme



Trapèze

Triangle

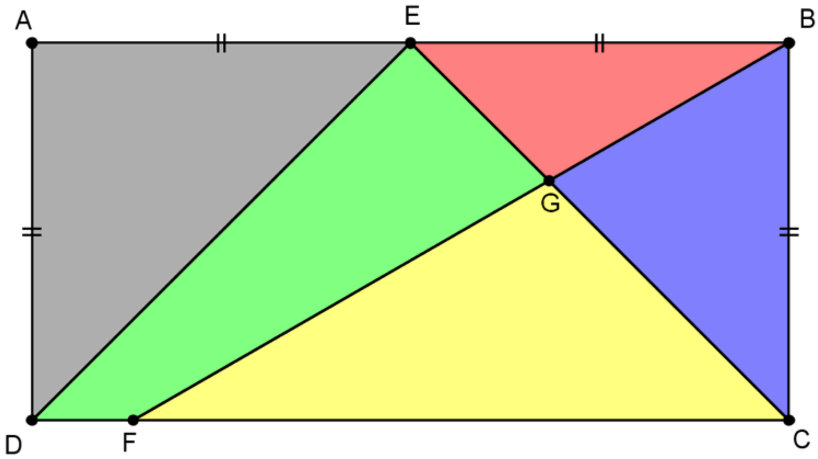


Rectangle

Losange

Les joueurs et joueuses du groupe ont considéré que des côtés adjacents avaient même longueur, sans trop s'occuper des angles… Les configurations demandées ont été obtenues, cela relevant de moments de géométrie perceptive et instrumentée à mettre en œuvre au cycle 3. Cependant, au cycle 4, la géométrie déductive va s'imposer !

Pour justifier les constructions obtenues, nous allons retourner vers la proposition repérée dans le n°98 de la revue « Petit *x* » de l'IREM de Grenoble.



Les longueurs BF et AB sont égales.

En translatant la pièce grise, un parallélogramme est obtenu.

En translatant et en retournant la pièce grise, un trapèze est obtenu.

En déplaçant la pièce grise à l'aide d'une rotation (ou d'une symétrie centrale), un triangle est obtenu.

En translatant la pièce grise et le triangle formé de la pièce rouge et de la pièce bleue, un carré est obtenu.

En translatant le triangle formé de la pièce bleue et de la pièce jaune, un losange est obtenu.

Les propriétés des transformations utilisées serviront aux preuves élaborées par nos lecteurs (et leurs élèves à partir du cycle 4).

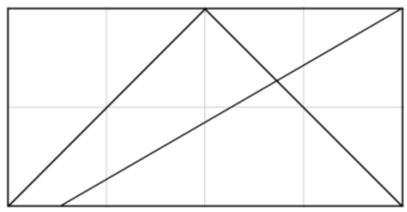
En complément sur le site est proposé un défi-dessin. Pour dessiner le carré demandé, il sera sans doute utile de reproduire en premier lieu le rectangle proposé par l'IREM de Grenoble.

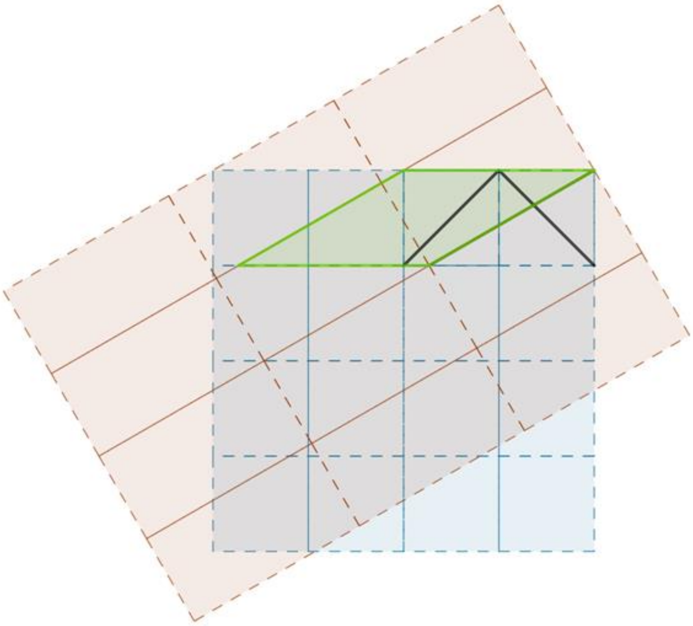
Retour au sommaire

Des joueuses et des joueurs de la régionale ont imaginé d'autres assemblages, parfois figuratifs.

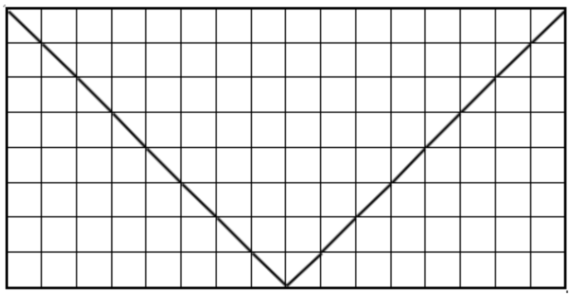
L'idée est venue d'utiliser avec de très jeunes élèves ce que nous avons nommé « Puzzle de Grenoble » (en référence à l'IREM qui l'a fait connaitre).

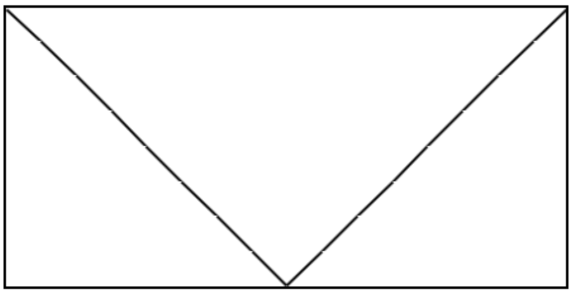
Vouloir insérer un quadrillage nous a causé quelques soucis.





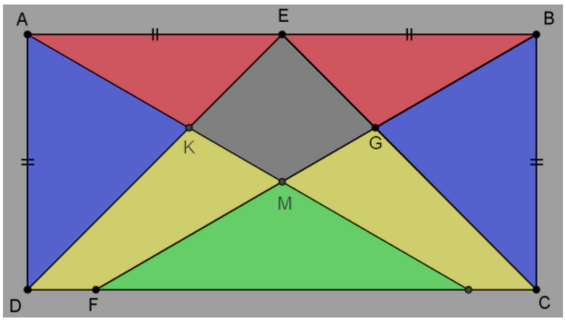
Finalement, nous avons ôté le segment permettant la réalisation du losange pour obtenir un puzzle « à trois triangles », quadrillé ou non. Les trois pièces étant symétriques, il n'y a pas à se soucier de leur éventuel retournement.

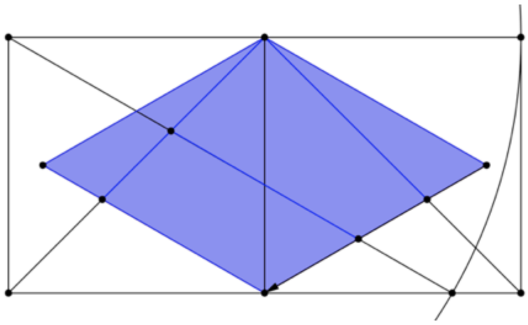




Avec ces trois pièces peuvent être réalisés un carré, un rectangle, un triangle, un parallélogramme, un trapèze et sans doute bien d'autres choses…

En cycle 1 et début de cycle 2 ne sont connus que les carrés, les rectangles et les triangles. Des documents utilisables avec ces très jeunes élèves sont accessibles sur notre site.





D'autres idées de variantes nous sont venues. La recherche continue…

Retour au sommaire

MATHS ET JEUX

LES POLYDULES

APMEP Lorraine – Groupe Jeux

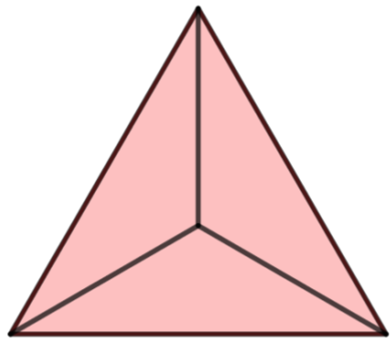
Les trois axes de symétrie d'un triangle équilatéral partagent celui-ci en trois triangles isocèles identiques.

Chacun de ces triangles possède des angles qui peuvent s'exprimer par des fractions de l'angle droit : $\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{3}$.

L'assemblage de plusieurs de ces triangles par au moins un côté permet d'obtenir des objets que nous appellerons polydules.

Le terme polydule a été choisi en relation avec le mot bidule.

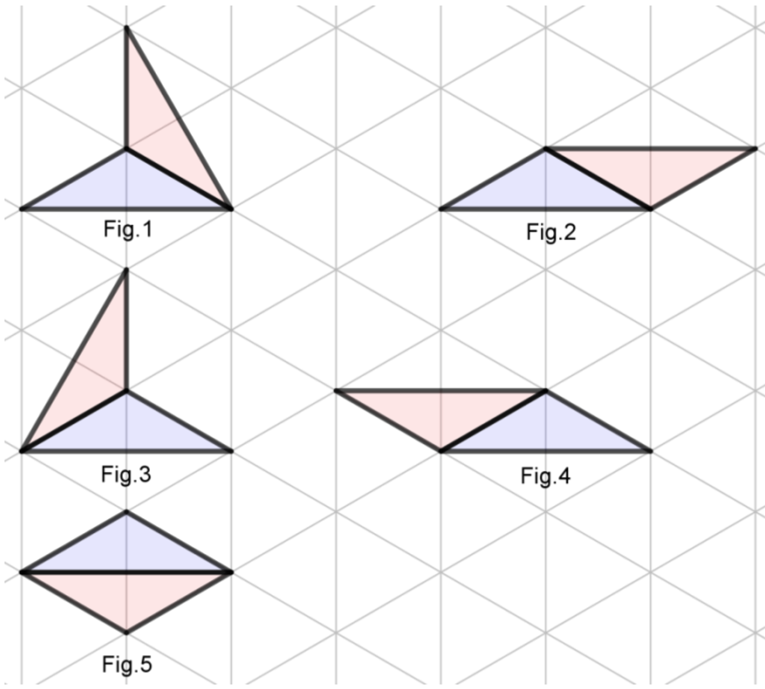
Christine Oudin nous a confié des [fichiers] permettant de les réaliser à l'aide d'une imprimante 3D.



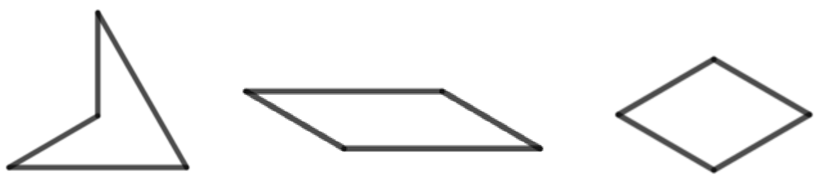
Les bidules

Un bidule est un assemblage de deux de ces triangles. Il n'en existe que trois.

Les figures 1 et 3, ainsi que les figures 2 et 4, se superposent après un retournement, elles représentent donc le même bidule.



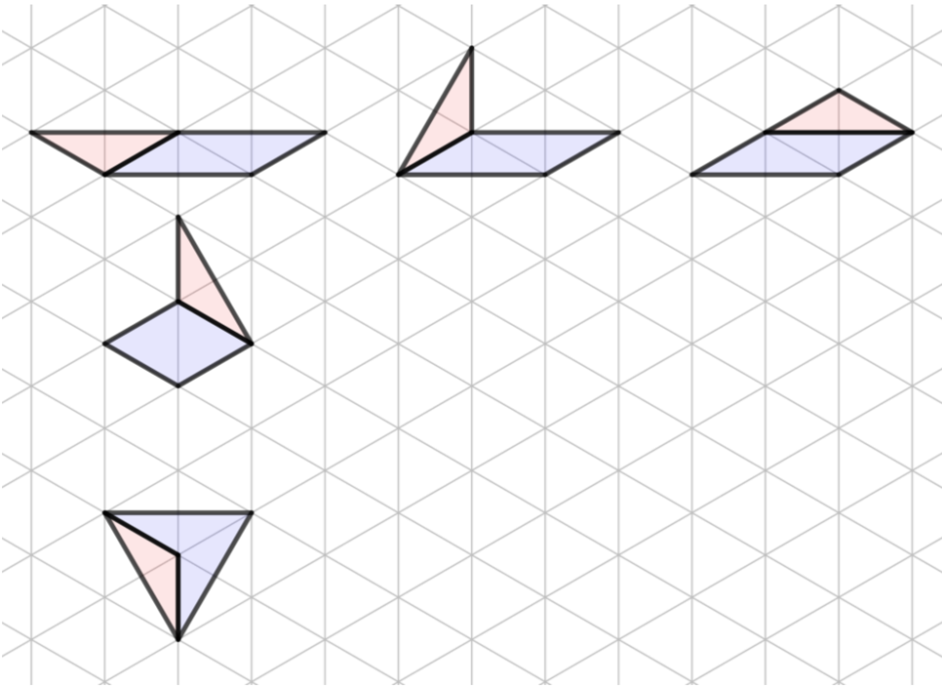
On obtient trois quadrilatères particuliers : un cerf-volant, un parallélogramme et un losange.



Tout quadrilatère pave le plan, cela avait été évoqué dans le [Petit Vert n°83] et cela a été repris dans le [stand n°20 de notre exposition]. Les trois bidules sont donc des tuiles de pavage.

[Retour au sommaire]

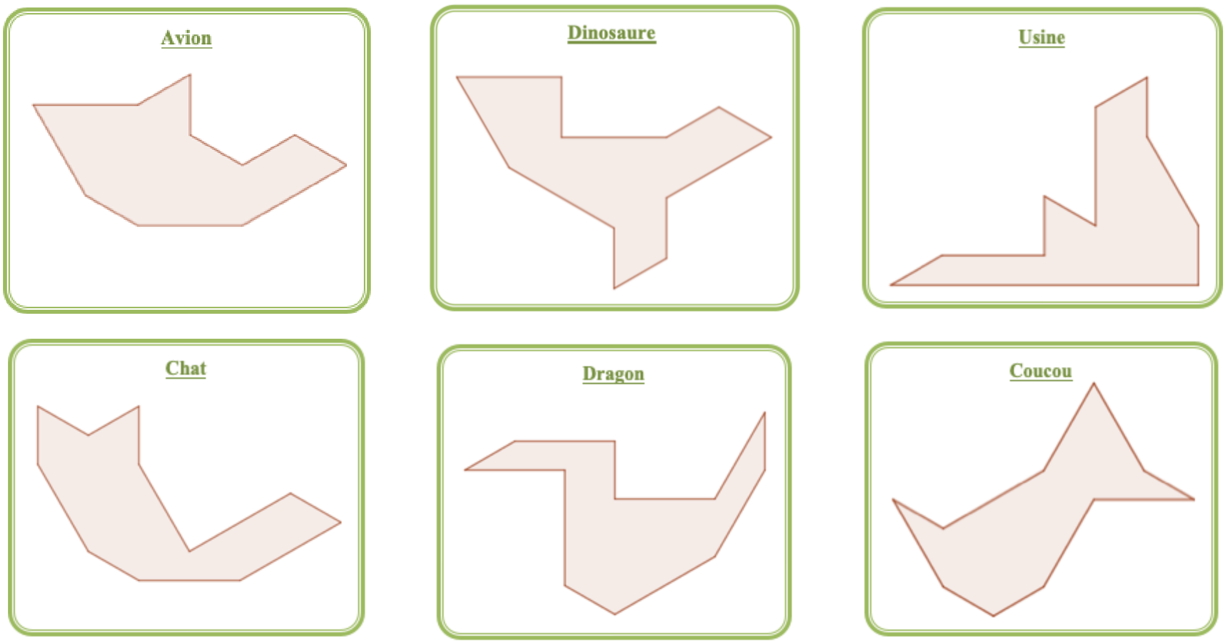
Les tridules



En accolant le triangle rouge à un des quatre côtés de chaque bidule, on obtient les cinq figures différentes ci-contre.

Il y a donc cinq tridules.

Des silhouettes peuvent être recouvertes en utilisant les cinq pièces.

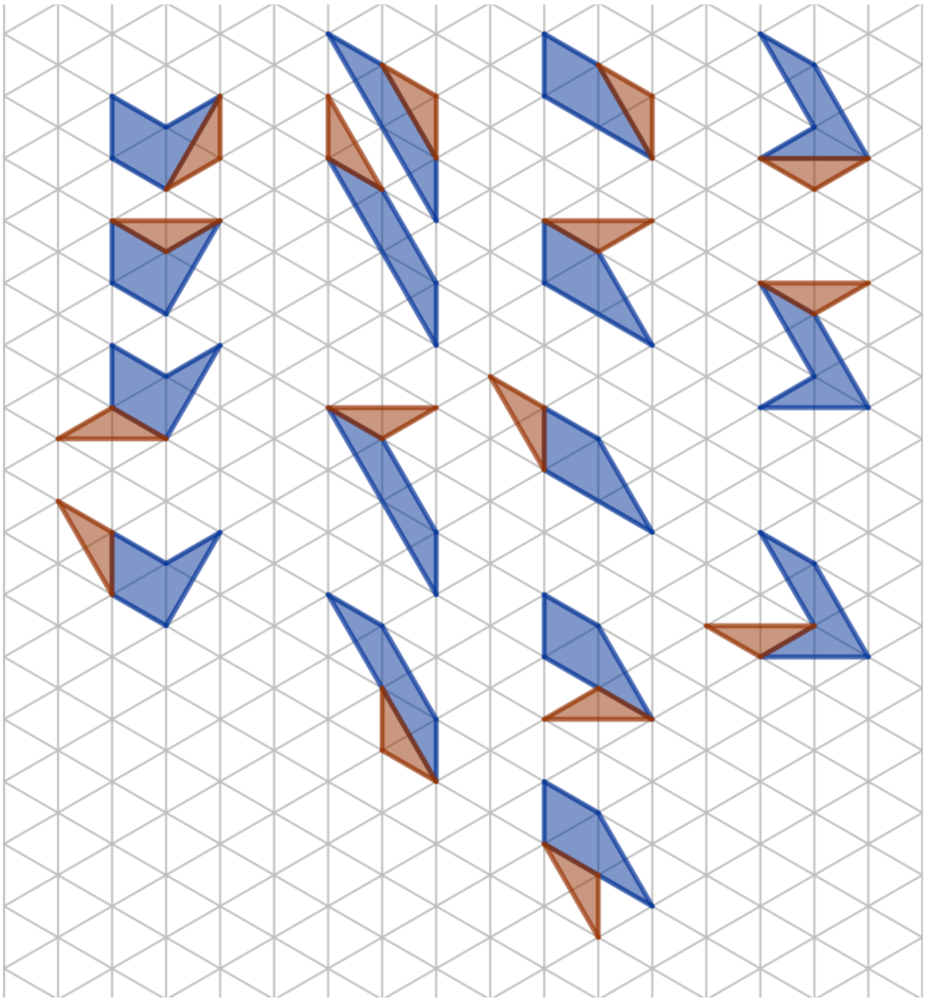


Des pièces à découper et des cartes à utiliser avec les élèves sont accessibles sur notre site.

Retour au sommaire

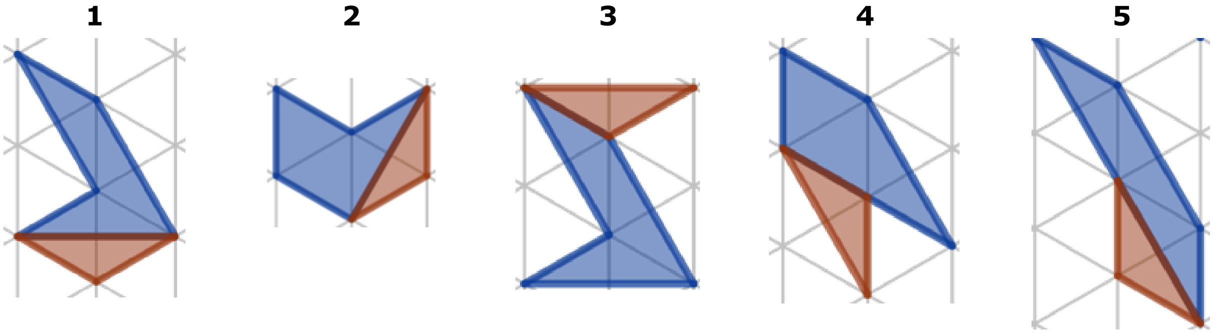
Les tétradules

En continuant la recherche des positions du quatrième triangle autour de chaque tridule, on obtient seize tétradules.



Nos lecteurs désirant savoir si des polydules pentagonaux pavent le plan pourront relire les articles de la revue [« Pour La Science ».]

Lors d'une [recherche effectuée en 2006 en classe de troisième], les élèves étaient arrivés à affirmer que le fait d'avoir un hexagone ayant deux côtés égaux et parallèles fait de lui un hexagone paveur. Ils ont également constaté que cette condition n'est pas nécessaire.

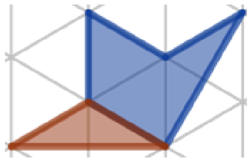


Retour au sommaire

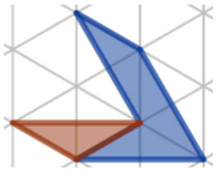
Ces cinq premiers hexagones satisfont à la condition énoncée par les élèves.

Qu'en est-il pour ce sixième et pour et les trois autres reproduits ci-dessous ?

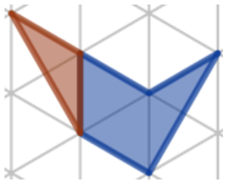
6



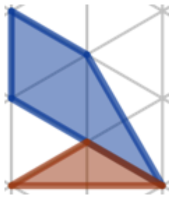
7



8



9



La manipulation des pièces nous met sur la piste de silhouettes figuratives.

Les deux exemples ci-contre ont été imaginés lors d'une rencontre de joueurs et joueuses de la régionale.

Quelques idées d'utilisation avec les élèves

Les documents utilisables en classe sont accessibles sur notre site

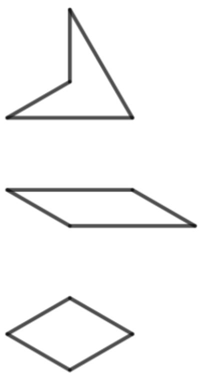
Activité 1

Le motif de base (un « dule ») est dessiné sur un réseau triangulé. Recherchez les bidules, les tridules et les tétradules.

Activité 2

En accolant deux triangles isocèles identiques par un côté, on a obtenu trois quadrilatères.

1) Pour chacun de ces quadrilatères, trouvez les angles qui se superposent puis coloriez-les d'une même couleur.
2) Relevez les angles de chaque quadrilatère et fabriquez des gabarits d'angles. On construira un seul gabarit pour les angles coloriés d'une même couleur.
3) Classez ces gabarits par superposition. Combien d'angles différents avez-vous obtenus ?



Retour au sommaire

Le jeu « Géométriscrabble »

Source du jeu : « Un processus d'enseignement des angles au cycle 3 », René Berthelot et Marie Hélène Salin

Le jeu a été utilisé lors d'un rallye CM2 - sixième, concernant les classes parties prenantes dans le fonctionnement du Labo de Maths de Moulins-lès-Metz. Avant le premier confinement, les élèves pouvaient se déplacer « en vrai » pour vivre des moments mathématiques. Nous ne pouvons que souhaiter que ces temps d'échanges puissent de nouveau se réaliser.

Atelier : Géométriscrabble et communication.

Organisation matérielle

Les élèves sont répartis par groupes de trois : deux joueurs (un élève de 6ème et un élève de CM2) et un marchand (un élève de 6ème ou un élève de CM2)

Les premiers sont assis à la même table loin du marchand qui est assis à une table dans un des coins de la salle par exemple.

Ils disposent :

- D'une des cartes sur laquelle se trouve un assemblage des cinq tridules, assemblage qu'ils doivent recouvrir peu à peu, au fur et à mesure de leurs commandes au marchand.
- De feuilles de papier blanc pour les messages.
- D'un crayon à papier.

Le marchand dispose d'une enveloppe contenant les cinq tridules.

Consigne et déroulement

L'enseignant, après avoir décrit l'organisation des groupes et le matériel de chacun, continue ainsi :

« Voici la règle du jeu :

Les trois élèves d'un même groupe sont associés, les quatre groupes sont concurrents.

Dans chaque groupe, un des émetteurs, chacun à son tour, se déplacera jusqu'à son marchand pour lui commander oralement en lui tournant le dos, une pièce s'emboîtant à un endroit du puzzle désigné par lui à l'aide d'un pion.

Le marchand lui remettra la pièce commandée. L'autre émetteur contrôlera que la pièce obtenue convient bien, c'est-à-dire qu'elle s'emboîte à l'endroit prévu.

- *Si c'est bien le cas, la pièce est posée.*
- *Si ce n'est pas le cas, la pièce est renvoyée.*
- *Si l'un des angles de la pièce s'emboîte bien mais qu'il y a chevauchement, les joueurs renvoient la pièce au marchand.*
- *Si le marchand n'a pas la pièce de mandée, il le signale, les joueurs prépare une autre commande.*

Avant de jouer, les membres d'un même groupe doivent se concerter pour trouver un moyen de faire leur commande afin que le marchand puisse comprendre.

Le premier groupe qui a posé les cinq pièces a gagné la manche.

Il y aura six manches en tout. »

L'enseignant laisse environ cinq minutes puis lance le jeu en distribuant le matériel.

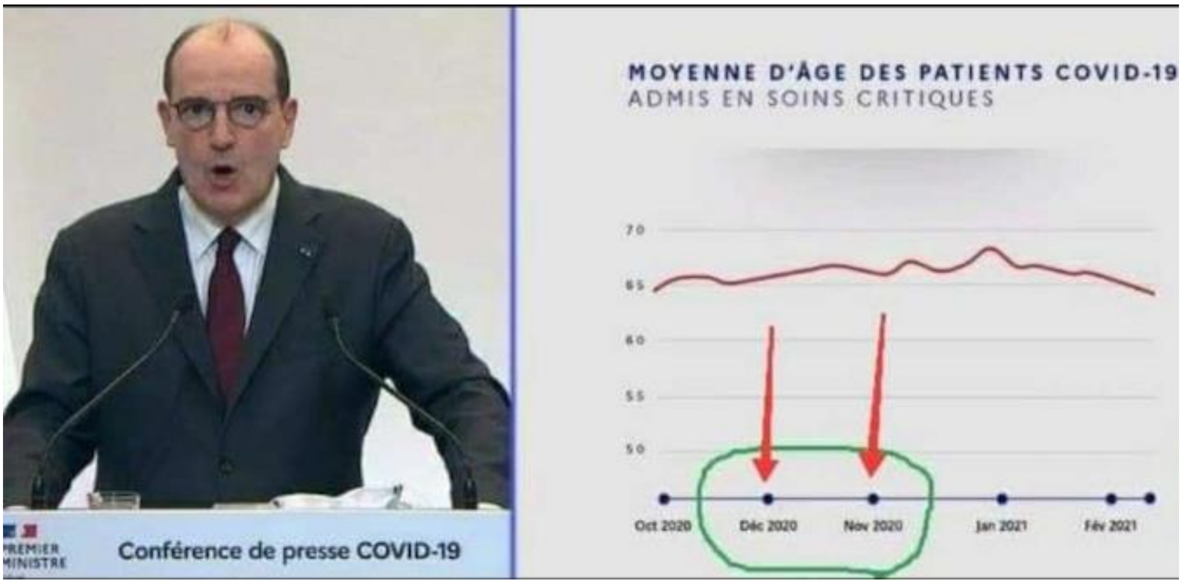
Les documents utilisés lors de cet atelier ainsi qu'une autre proposition utilisant les tétradules sont accessibles sur notre site.

Retour au sommaire

MATHS ET MEDIAS

PENDANT QUE LE PREMIER MINISTRE PARLE

Le 25 février 2021, pendant la conférence de presse télévisée du Premier Ministre sur TF1 et France 2, un collègue enseignant de physique a été interpellé par la graduation horizontale accompagnant les dires de l'homme politique et a fait parvenir quelques instants après à Pierre-Alain cette photo d'écran.



Notre première réaction a été de constater qu'il y avait là sans doute une étourderie du graphiste de service. Nous nous sommes ensuite posé la question de la pertinence de cette moyenne présentée : le nombre de cas graves peut augmenter alors que l'âge moyen baisse. Y avait-il une intention de présenter un indicateur connu des téléspectateurs en leur faisant rapidement croire qu'à 70 ans ou 60 ans tout allait pour le mieux ? Voir cette moyenne baisser semble accréditer le choix de vacciner en priorité chez nous les plus âgés (si c'est vraiment la cause tant mieux) à moins que cela soit corrélé à l'apparition des nouveaux variants. Nous pourrions aller plus loin et consacrer du temps à propos de la différence entre corrélation et causalité…

Pierre-Alain n'ayant pas écouté cette conférence de presse, il a eu envie de la visionner de nouveau pour voir si d'autres curiosités s'y trouvaient.

Les infographistes ont sans doute travaillé dans l'urgence, sans trouver le temps de vérifier ce qui serait présenté :

> Après 10min18, on voit un drapeau français à l'envers (il est rouge-blanc-bleu), idem pour le drapeau italien.
>
> Après 11min40, toujours les deux drapeaux à l'envers, mais curieusement, le belge est à l'endroit.
>
> Après 12min30, il y a la même inversion sur l'abscisse (ah les copier-coller…).
>
> Il est à noter que dix représentations graphiques viennent appuyer les propos des intervenants (TimeCode : 1'47 ; 1'59 ; 10'18 ; 11'40 ; 12'10 ; 12'30 ; 17'08 ; 17'36 ; 17'57 ; 19'05).

Retour au sommaire

Il semble qu'à la télévision, ces représentations sont des images faites pour attirer l'œil, comme les drapeaux… Nous, enseignants de mathématiques, allons devoir dire et redire que de telles représentations ne pourront servir de justification d'un propos que si on a le temps de les étudier, comme on le ferait lors de la lecture de la presse écrite ou en classe.

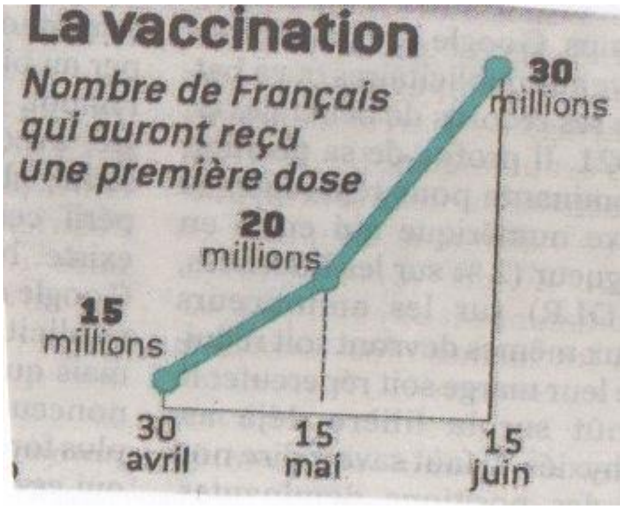
Le taux d'incidence a, de prime abord, des valeurs qui peuvent surprendre mais il s'agit du nombre de tests positifs pour 100000 habitants. Le commentaire du premier ministre est plus surprenant. Il affirme : « Les deux dernières semaines, l'incidence baisse chez les plus de 80 ans alors qu'elle augmente pour l'ensemble de la population. » Si la décroissance est importante chez les plus de 80 ans on ne peut pas parler de croissance par ailleurs. C'est une lecture graphique rapide !

Retour au sommaire

MATHS ET MEDIAS

LA VACCINATION

Dans son édition du 30 avril 2021, l'Est Républicain a consacré une page entière illustrée de nombreux graphiques pour présenter la situation sanitaire et les mesures annoncées par le président de la République.



L'écart en ordonnée entre 15 millions et 20 millions semble être la moitié de celui entre 20 millions et 30 millions. Cependant, en abscisse, l'écart entre le 30 avril et le 15 mai n'est pas la moitié de celui entre le 15 mai et le 15 juin, c'est le même ! Veut-on nous montrer que la vaccination va s'accélérer ? On prévoit de vacciner deux fois plus de personnes entre le 15 mai et le 15 juin qu'entre le 30 avril et le 15 mai mais la durée est deux fois plus importante (ce qui ne parait pas dans le graphique du journal).

Le 30 avril il y a 15 millions de vaccinés, le 15 mai il y a 20 millions de vaccinés ; le taux moyen t journalier d'évolution du nombre de vaccinés vérifie donc $15 \times (1 + \frac{t}{100})^{15} = 20$.

On en déduit : $1 + \frac{\mathrm{t}}{100} = \sqrt[15]{\frac{20}{15}} \sim \mathbf{1{,}019}$.

Si le taux d'évolution journalier entre le 15 mai et le 15 juin était **identique à la période du 30 avril au 15 mai**, le nombre de vaccinés le 15 juin serait :

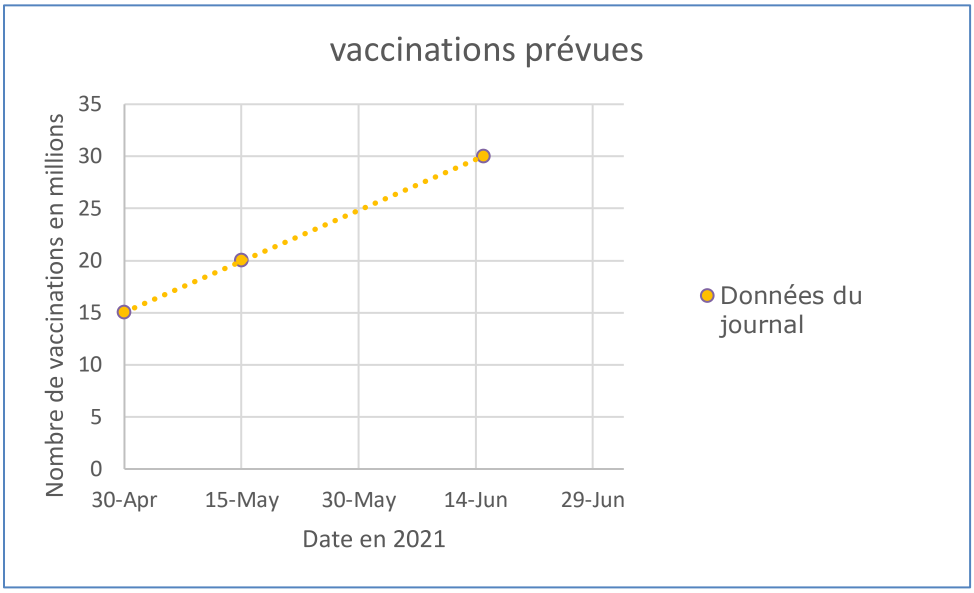
$$20 \times \left(\sqrt[15]{\frac{20}{15}}\right)^{31} \sim 36{,}24 \text{ millions}$$

Le graphique du journal peut donner l'idée d'un accroissement de la vitesse de vaccination à partir du 15 mai et pourtant le taux d'évolution journalier diminue : $\left(\sqrt[31]{\frac{30}{20}}\right) \sim \mathbf{1{,}013}$.

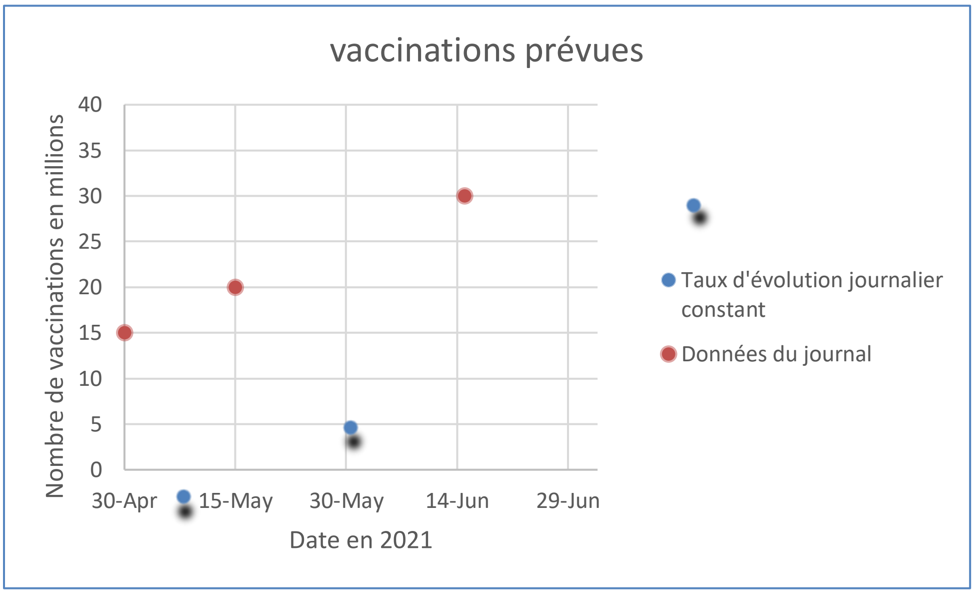
Retour au sommaire

D’autres représentations graphiques :

- *Une représentation graphique possible avec les valeurs proposées dans l’article*



- *Une représentation graphique possible avec un taux d’évolution constant sur toute la période considérée*

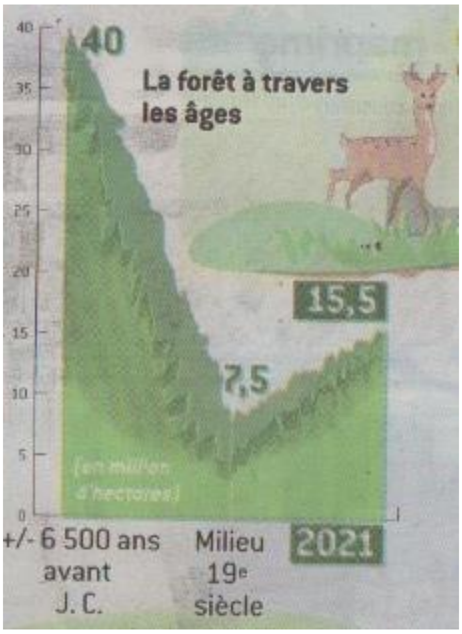


Retour au sommaire

MATHS ET MEDIAS

L'ARBRE, NOTRE PARTENAIRE PARTICULIER

Sous ce titre, le 17 mars 2021, l'EST RÉPUBLICAIN proposait dans son supplément mensuel huit pages consacrées à ce thème. De nombreux graphiques illustraient les pages 6 et 7. Deux d'entre eux ont attiré notre regard.



Le lecteur doit rapidement comprendre que pour l'infographiste « +/- » signifie « plus ou moins », c'est à dire « environ ». Nos traitements de texte nous fournissent le signe « ≈ » peut-être moins connu.

À première vue, la longueur visualisant l'intervalle de temps « Milieu 19ème siècle – 2021 » est très voisin de celle visualisant l'intervalle de temps « +/- 6 500 ans avant J.C. – Milieu 19ème siècle » (environ 47% et 53% après des mesures faites sur l'image). Les durées des périodes évoquées sont pourtant loin d'être voisines…

Des nombres sont indiquées en ordonnée, laissant le lecteur tenter de deviner ce qu'ils évoquent. L'indication est fournie en blanc sur fond vert, ce sont des millions d'hectares. Il serait intéressant de savoir ce qui a permis d'affirmer les 40 millions d'hectares à « environ 6500 ans » avant J.C.

Il faut rappeler qu'à partir du milieu du 19ème siècle, l'utilisation du charbon et de l'électricité ont fait diminuer l'exploitation des forêts, cette information aurait intéressé les lecteurs.

Après des mesures faites sur cette représentation, la mesure en degrés de « l'angle au centre » de la zone verte représente environ 28% de 360°, mais cela représente-il environ 28% du territoire français dessiné (nos collègues corses sont oublié(e)s) ?

Retour au sommaire

MATHS ET VIE COURANTE

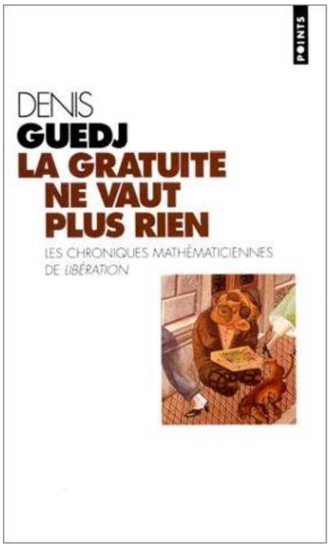
CADEAUX ET GRATUITÉ

Sébastien DANIEL

Commander en *drive* fait voir des choses intéressantes : les trois prix sont les mêmes, quel produit sera le plus acheté ? Il est vrai que les trois produits sont différents…

Que se passe-t-il dans la tête des communicants lorsqu'ils proposent ces trois « cadeaux » ? Si l'acheteur doit payer pour avoir des choses gratuites, il y a un problème, elles ne sont plus gratuites. Gratuit, c'est quand on vient, on prend et on peut partir sans payer (pas en courant ☺).

Mais l'acheteur sera peut-être tenté par le conditionnement dans lequel huit rouleaux lui sont annoncés « offerts ».



Voici une bonne occasion de relire ce livre passionnant réédité en format de poche en 2000.

La première chronique donne son titre à l'ouvrage. Denis Guedj y évoque deux slogans repérés dans le monde de la publicité et de la grande distribution :

> Tout ce qui a un prix peut être vendu moins cher.
>
> Tout ce qui a un prix ne vaut rien.

Le Petit Vert est preneur de ce qui vous interpelle lors de vos achats « essentiels » ou « non essentiels » !

Retour au sommaire

MATHS ET PHILO

(A + BN) / N = X DIT LE CYCLOPE

Didier Lambois

Condorcet disait à son propos que tous les mathématiciens étaient ses élèves[3], et il est vrai que bien peu de voix cherchent à contester son génie et le rôle immense qu'il a joué dans l'histoire des mathématiques. Il est considéré comme le mathématicien le plus prolifique de toute l'histoire et il ne faut pas moins de quatre-vingts volumes à l'Académie des Sciences suisse pour regrouper l'essentiel de ses travaux. Mireille Schumacher, professeure suisse, dit de lui que c'est un « mathématicien universel » ; il a effectivement travaillé dans tous les domaines et nous ne pouvons faire une liste exhaustive de ses contributions, en géométrie, dans le calcul infinitésimal, la théorie des nombres, des graphes, la trigonométrie, l'algèbre… Ce géant des mathématiques a aussi beaucoup œuvré pour les autres sciences, en physique, sur la mécanique des fluides, l'optique, en astronomie etc.[4] En s'intéressant à toutes les sciences de son époque, ce géant fait beaucoup d'ombre aux autres scientifiques, et il va contribuer pour une large part, avec Kant, à l'idée qu'une science est une science à la seule condition que la mathématique puisse s'y appliquer.

C'est Frédéric II, le « despote éclairé », qui a donné à notre mathématicien le surnom quelque peu méchant de « cyclope », et ce mathématicien, chacun l'a reconnu, c'est Euler (1707-1783).

Frédéric II avait fait venir à Berlin tous les plus grands savants d'Europe et c'est pour se moquer de l'infirmité dont souffrait Euler (par suite d'une fièvre il avait perdu l'usage de son œil droit en 1735[5]) qu'il lui avait donné ce surnom. Mais ce sobriquet est peut-être aussi une réaction à l'ombre froide qu'apportait la rigueur mathématique d'Euler. À l'exigence rationnelle des mathématiques, Frédéric II préférait l'esprit vif et novateur de Voltaire par exemple. Il ne fait aucun doute qu'Euler souffrit de cette préférence et c'est pourquoi il accepta volontiers l'invitation de Catherine II de Russie pour travailler, à partir de 1766, à l'Académie des Sciences de Saint Pétersbourg.

6 G a 7, c'est ce que répond Voltaire à Frédéric II qui lui avait envoyé ce mot :

$$\frac{AR}{CE}\ \frac{P}{1}\ \text{à}\ \frac{6}{100}$$

Voilà comment Frédéric et Voltaire occupaient leur esprit et vous comprenez que cela ne passionnât pas Euler. Mais si vous ne comprenez pas ce rébus, adressez-vous à la rédaction du Petit Vert.

---

[3] Éloge d'Euler par Condorcet à l'Académie des Sciences

[4] Les *Lettres écrites à une princesse d'Allemagne* donnent un aperçu de tous ses centres d'intérêt ; elles sont consultables en ligne (cliquez ici) et pour vous perdre dans le labyrinthe de toutes ses œuvres rendez vous sur les Archives d'Euler.

[5] En 1771 une cataracte privera Euler de son œil gauche, mais ces douze années de cécité ne l'empêchèrent absolument pas de poursuivre ses travaux.

Retour au sommaire

Être évincé par Voltaire explique peut-être aussi l'attitude d'Euler à l'égard des philosophes français, comme Diderot par exemple. Si personne ne prend très au sérieux l'anecdote rapportée par Dieudonné Thiébault[6] dans ses *Souvenirs de séjour de vingt ans à Berlin*, elle mérite d'être racontée une fois encore, pour mieux comprendre le siècle des Lumières et les contradictions inhérentes à notre nature humaine.

Diderot a séjourné plusieurs mois à Saint Pétersbourg (il y est arrivé le 1er octobre 1773) et il avait des entretiens réguliers avec Catherine II, curieuse de s'instruire auprès de cet esprit brillant et libertin[7]. Mais « l'impératrice de toutes les Russies » restait méfiante à l'égard des idées démocrates du penseur, et très agacée par son athéisme qui représentait aussi un danger pour l'empire. Elle demanda à Euler de faire taire ce mécréant, et lors d'une séance publique, Euler présenta une démonstration implacable de l'existence de Dieu. Il dit à Diderot :

« $(a + b^n) / n = x$, *donc Dieu existe. Répondez.* »

Le désarroi de Diderot face à une telle assurance et à un tel non-sens suscita des rires dans l'assemblée et, selon Thiébault, c'est ce qui provoqua le retour un peu précipité de Diderot en France (avril 1774).

Si l'anecdote était véridique, on peut légitimement penser que ce n'est pas la formule mathématique qui aurait troublé Diderot. Ce dernier avait une culture mathématique suffisante pour comprendre qu'il n'y avait rien à comprendre[8]. Outre la moquerie, c'est évident, ce qui pouvait gêner le matérialiste Diderot c'est la présence de Dieu au sein de cette assemblée de savants de l'Académie des sciences, et c'est, à nos yeux, ce qui fait l'intérêt de cette anecdote. Elle montre comment, au siècle des Lumières, l'irrationnel reste prégnant, même au sein des sociétés les plus savantes.

Ce qui est étonnant, en effet, c'est qu'un esprit aussi brillant qu'Euler, un modèle de clarté et de rigueur (il suffit de lire son *Introduction à l'algèbre* pour s'en rendre compte) puisse rester aussi étroit et intransigeant lorsqu'il s'agit de religion, et donc de questions qui, nous le savons, ne relèvent en rien de la raison. Sans reprendre les propos de ceux qui affirment qu'Euler contraignaient ses élèves à dire des prières (nous n'y étions pas) il suffit de voir comment Euler défend l'idée d'inerrance biblique pour s'interroger sur son peu d'esprit critique. Certains de ses contemporains s'en étonnaient d'ailleurs.

« *Il est incroyable qu'un aussi grand génie que lui sur la géométrie et l'analyse soit en métaphysique si inférieur au plus petit écolier, pour ne pas dire si plat et si absurde, et c'est bien le cas de le dire, Non omnia eidem Dii dedere* » écrit d'Alembert (1717-1783) dans une *Lettre* à Lagrange (7 août 1769), et le physicien Georges-Louis Lesage (1724-1803), avec qui Euler a beaucoup échangé, est encore plus sévère. Au dos d'une de ses cartes à jouer, qui lui servaient de bloc-notes, il écrit : « *Mr. Euler. Borgne. Sot dans le monde, et dans toute matière*

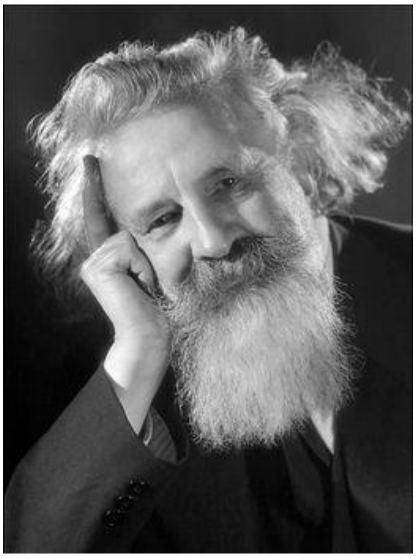
[6] Dieudonné Thiébault (1733-1807) est un homme de lettres français, né dans les Vosges, qui avait obtenu la chaire de grammaire générale à Berlin et était devenu un intime de Frédéric II. Ses *Souvenirs* sont riches en anecdotes et consultables sur Gallica.
[7] De nombreux ouvrages historiques font état d'une vie sentimentale et sexuelle très agitée, d'où le surnom donné à cette impératrice à la fois religieuse et nymphomane : « la messaline du Nord ».
[8] Diderot s'intéressait aux mathématiques et est l'auteur de *Mémoires sur différents sujets de mathématiques* (1748).

Retour au sommaire

non-Mathématique. Communicatif et officieux. Aimant l'argent. N'a pu résoudre aucun des Problèmes que lui a posé Mr. Lambert. Religieux jusqu'à la superstition. »

Mais notre propos n'est pas de discréditer l'attitude religieuse[9] ni de critiquer Euler, nous serions alors bien présomptueux et bien ridicules ; Euler reste l'un des plus grands, il reste et restera longtemps encore un modèle de rationalité, « *notre maître à tous* » comme le dit Laplace. Et c'est précisément parce qu'il a cette grandeur et cette supériorité que son exemple est intéressant. Il nous montre, si besoin est de le rappeler, que nous ne sommes pas, par nature, des êtres de raison. Il y a, et il y aura toujours en nous, une part d'irrationnel.

Rationaliste ? Nous essayons de le devenir. BACHELARD



Continuons, suivons Bachelard en regardant Euler.

[9] Cette question a été abordée dans le n°139 du Petit Vert.

Retour au sommaire

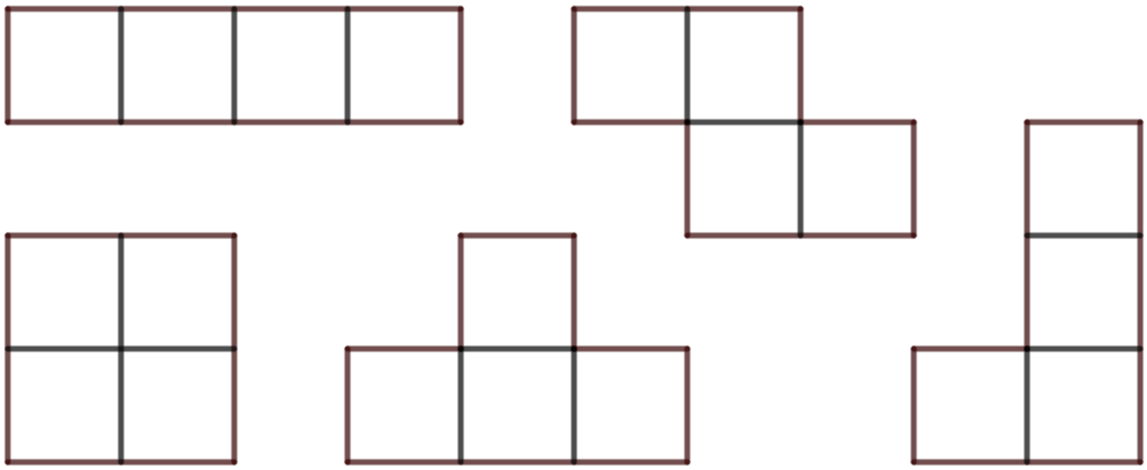
DES DÉFIS POUR NOS ÉLÈVES

LES CINQ TÉTRAMINOS

(d'après Martin Gardner)

On pourrait dans un premier temps demander aux élèves de trouver tous les tétraminos (formés par quatre carrés identiques joints par un côté). Il y en a bien cinq.

Les voici :



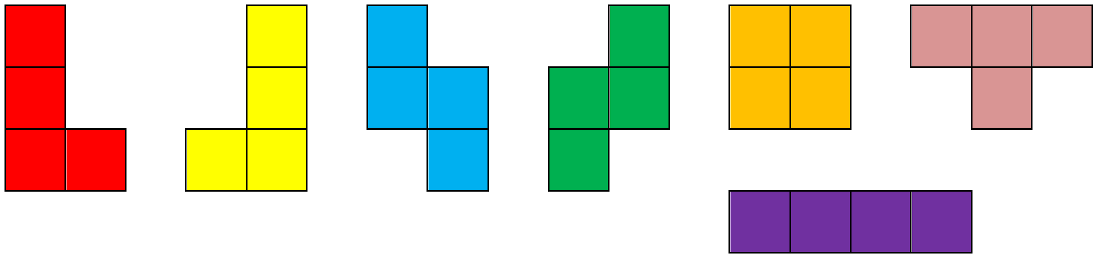
Est-il possible de les assembler pour recouvrir un rectangle 4×5 ?

Si oui, faire une figure et à démontrer si non.

NB : Les pièces sont retournables.

Prolongement 1 : On propose d'utiliser deux pièces de chaque sorte de tétramino pour un recouvrir un rectangle deux fois plus vaste, c'est-à-dire ayant une aire de 40 carreaux (plusieurs rectangles ont cette aire).

Prolongement 2 : Avec les pièces du jeu TETRIS (**pièces non retournables**), est-il possible de recouvrir un rectangle 7x4 ? Et avec deux exemplaires de chaque pièce, est-il possible de recouvrir un rectangle 7x8 ?



Retour au sommaire

DES DÉFIS POUR NOS ÉLÈVES

QUEL EST CE NOMBRE ?

(cycle 3)

Mon nombre de centaines est le double du nombre formé par mes deux derniers chiffres. Mon chiffre des unités est la moitié de mon chiffre des dizaines.
La somme de tous mes chiffres est un nombre inférieur à 10.

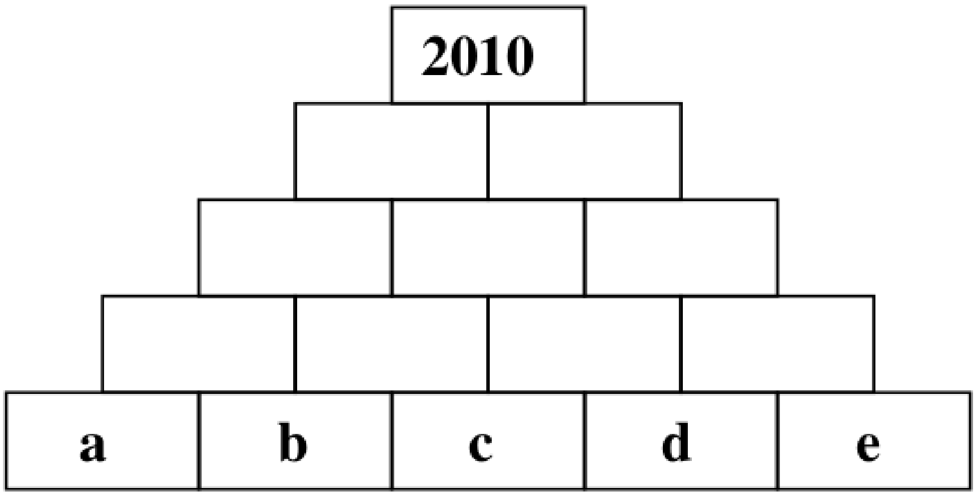
Qui suis-je ?

DÉFI ALGORITHMIQUE N° 146

Certaines énigmes du rallye mathématique de Lorraine auraient certainement été plus simples à résoudre à l'aide d'un petit programme informatique.

Nous vous proposons ici, comme défi, de résoudre l'exercice ci-dessous à l'aide d'un programme.

L'exercice suivant avait été proposé en 2010.



Dans ce mur, le nombre inscrit sur chaque brique est la somme des deux nombres inscrits sur les briques sur lesquelles elle repose.

Les nombres a, b, c, d et e inscrits sur les briques de la base sont des entiers non nuls tous différents et le commissaire Albert Girard a même réussi à déterminer que le nombre a est le plus grand nombre possible tel que la brique du sommet soit égale à 2010.

Aidez-le à retrouver les valeurs des nombres a, b, c, d et e.

On demande d'écrire une fonction mur(N) qui, pour un entier N au sommet du mur ci-dessus, renvoie les valeurs a, b, c, d et e, avec a le plus grand possible.

Retour au sommaire

SOLUTIONS DÉFIS N°145

1 - DATES PYTHAGORICIENNES

Le but est de déterminer les dates au format jj/mm/aa telles que $jj^2 + mm^2 = aa^2$, comme par exemple le 16 décembre 2020 : 16²+12²=20². Notons que c'est l'année qui joue le rôle de l'hypoténuse.

Petit rappel théorique

Les acteurs intervenant dans ce qui suit sont évidemment des entiers positifs.

- Un triplet de nombres entiers positifs $(u\,;\,v\,;\,w)$ est *pythagoricien* si et seulement si $u^2 + v^2 = w^2$.

- Un triplet $(u\,;\,v\,;\,w)$ est *pythagoricien primitif* si et seulement si $u^2 + v^2 = w^2$ et $\{u\,;\,v\,;\,w\}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

- Dans un triplet pythagoricien, u et v ne peuvent être tous les deux impairs. En effet, dans ce cas $u^2 + v^2$ serait congru à 2 modulo 4 alors que w^2 ne peut être congru qu'à 0 ou 1 modulo 4 suivant la parité de w.

- Dans un triplet pythagoricien primitif, u et v ne peuvent être tous les deux pairs car alors w le serait aussi, ce qui nuirait gravement à l'irréductibilité de $(u\,;\,v\,;\,w)$. Pour un triplet primitif, u et v sont donc de parités différentes, et w impair.

- Un triplet pythagoricien est de la forme $(ku\,;kv\,;\,kw)$ où $(u\,;\,v\,;\,w)$ est un triplet pythagoricien primitif et $k \in \mathbb{N}^*$. L'entier k est simplement le PGCD du triplet d'origine. Il suffit donc de connaître les primitifs pour en déduire les autres par proportionnalité.

- Les triplets pythagoriciens primitifs $s\,(u\,;\,v\,;\,w)$ avec u impair et v pair sont de la forme :

$$\begin{cases} u = b^2 - a^2 \\ v = 2ab \\ w = b^2 + a^2 \end{cases} \text{ avec } 0 < a < b\ ;\ a + b \text{ impair et } a \wedge b = 1.$$

a) Il est clair qu'un tel triplet est pythagoricien. Remarquons aussi que $u = b^2 - a^2$ est impair puisque $a + b$ et $a - b$ le sont, et que $v = 2ab$ est pair.

b) Si un nombre premier p divise les trois éléments d'un tel triplet, alors $p \neq 2$ et il divise $w + v$ et $w - v$;
Il divise donc $a - b$ et $a + b$, par conséquent $2a$ et $2b$.
Étant premier avec 2, p divise donc a et b… d'où $p = 1$.

c) Un tel triplet est donc bien un triplet primitif avec u impair et v pair.
Considérons maintenant un triplet primitif $(u\,;\,v\,;\,w)$ avec u impair et v pair.
Nous avons donc $v = 2t$ et par conséquent $4t^2 = w^2 - u^2 = (w - u)(w + u)$.
$w - u$ et $w + u$ étant tous les deux pairs, posons $w - u = 2r$ et $w + u = 2s$.
Il en découle que $u = s - r\,;\,w = s + r$ et $t^2 = rs$.
r et s sont premiers entre eux car un diviseur commun le serait aussi de u, w, t et donc de v.
Qui plus est $r < s$ et $r + s$ étant impair, r et s sont de parités différentes.
Si un nombre premier p divise r, alors il divise t et donc le facteur p apparaît avec une puissance paire dans $t^2 = rs$. Ne pouvant figurer dans la décomposition de s, il est donc élevé à une puissance paire dans celle de r. Cela prouve que r est un carré parfait et par symétrie s aussi.
Nous avons donc $r = a^2\,, s = b^2$ avec $0 < a < b$, a et b de parités différentes et $a \wedge b = 1$.
En reportant la chose, $u = b^2 - a^2$, $v = 2ab$ et $w = b^2 + a^2$. Ce qui achève la démonstration.

Retour au sommaire

- Les triplets pythagoriciens primitifs $(u\,;\,v\,;\,w)$ avec u pair et v impair sont évidemment obtenus par échange de u et v dans le cas précédent.

Revenons à nos moutons

On va donc chercher les triplets primitifs pour lesquels la première coordonnée n'excède pas 31 et la deuxième 12. De ceux-là on déduira par proportionnalité les triplets non primitifs qui conviennent.

Premier cas :
Les triplets $(b^2-a^2\,;2ab\,;\,b^2+a^2)$ avec $0<a<b$, $a+b$ impair, $a\wedge b=1$, $ab\leq 6$, $b^2-a^2\leq 31$.

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b^2-a^2}$	$\boldsymbol{2ab}$	primitif	déduits
1	2	3	4	(3 ; 4 ; 5)	(6 ; 8 ; 10) (9 ; 12 ; 15)
1	4	15	8	(15 ; 8 ; 17)	
2	3	5	12	(5 ; 12 ; 13)	

Les triplets $(2ab\,;b^2-a^2\,;\,b^2+a^2)$ avec $0<a<b$, $a+b$ impair et
$a\wedge b=1$, $2ab\leq 31$, $b^2-a^2\leq 12$.

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{2ab}$	$\boldsymbol{b^2-a^2}$	primitif	déduits
1	2	4	3	(4 ; 3 ; 5)	(8 ; 6 ; 10) (12 ; 9 ; 15) (16 ; 12 ; 20)
2	3	12	5	(12 ; 5 ; 13)	(24 ; 10 ; 26)
3	4	24	7	(24 ; 7 ; 25)	

Les 12 dates répondant au problème posé sont donc :

04/03/05 ; 03/04/05 ; 08/06/10 ; 06/08/10 ; 12/05/13 ; 05/12/13 ;

12/09/15 ; 09/12/15 ; 15/08/17 ; 16/12/20 ; 24/07/25 ; 24/10/26.

2 – PUZZLE DE GRENOBLE

Nous vous renvoyons à l'article « LE PUZZLE DE GRENOBLE » dans notre rubrique MATHS et JEUX.

Retour au sommaire

SOLUTION ALGO-RALLYE 145

Le défi algorithmique du PV 145 reprenait la question subsidiaire du Rallye 2009 concernant le jeu du loup et de l'agneau dans un quadrillage. On demandait de produire des échantillons de plusieurs parties pour estimer la proportion des parties gagnées par le loup et celles gagnées par l'agneau. Il était alors possible de connaître les espérances de gains de chacun des deux animaux.

La fonction **échantillonnage(N)** renvoie les proportions de séries de 100 parties où le gain du loup est supérieur à celui de l'agneau et celles où c'est celui de l'agneau qui est supérieur.

Pour simuler une partie (dans la fonction **partie(n)**), on considère un tableau de 3 tableaux de 3 entiers : 0 pour une case vide, 1 pour une case occupée par le loup et 2 pour une case occupée par l'agneau.

Chacun lance un dé (variable **de**) et leur fonction de déplacement (procédures **déplacement_loup(res)** et **déplacement_agneau(res)** selon le résultat **res** du dé) respective modifie la position des deux acteurs selon les règles du jeu. Après chaque déplacement, on vérifie si une des situations de fin de partie (fonction **fin()**) est rencontrée.

La fonction **position(acteur)** renvoie les coordonnées de l'acteur dans le tableau. Si l'acteur a disparu du plateau, alors le loup a gagné. On effectue quand même la procédure de déplacement.

Le programme peut paraître relativement complexe. Toutefois, certains raccourcis de programmation n'ont pas été employés pour préserver une certaines lisibilité. Il faut enfin noter que les lignes d'un tableau de tableaux correspondent aux ordonnées dans le quadrillage avec l'origine du repère en haut à gauche du quadrillage.

Pseudo-code :

```
Fonction partie(n : entier ; agneau, loup : entiers)
    plateau ← [[0,0,1],[0,0,0],[2,0,0]] ;      0 : case vide, 1 : loup, 2 : agneau
    agneau ← 0 ;                    gain de l'agneau
    loup ← 0 ;                gain du loup
    pour i allant de 1 à n, faire :
        tant que fin()=0, faire :    fin() renvoie 0 si la partie n'est pas terminée
            dé ← entier_aléatoire(1,6) ;
            déplacement_agneau(dé) ;
            dé ← entier_aléatoire(1,6) ;
            déplacement_loup(dé) ;
        finTantque ;
        si fin()=1, alors :    fin() renvoie 1 si le loup gagne et 2 si c'est l'agneau
            loup ← loup + 2 ;
        sinon :
            agneau ← agneau + 1 ;
        finSi ;
        plateau ← [[0,0,1],[0,0,0],[2,0,0]] ;      réinitialisation du plateau
    finPour ;
    renvoyer agneau,loup.Fonction fin(;acteur : entier)    vérifie la fin de la partie
    xl,yl ← position(1) ;          coordonnées du loup
    xa,ya ← position(2) ;                coordonnées de l'agneau
    acteur ← 0 ;                   personnage gagnant
    si xl = -1 ou xa = -1, alors :      position renvoie (- 1 ; - 1) si l'un des personnages a
        acteur ← 1 ;                          disparu : le loup a alors gagné
    sinon :
        si xa > xl ou ya < yl, alors :      l'agneau gagne s'il dépasse une position
            acteur ← 2 ;                           possible pour le loup
        finSi ;
    finSi ;
    renvoyer acteur
```

Retour au sommaire

Fonction position(acteur : entier ; x,y : entiers) *renvoie les coordonnées de l'acteur*
    x ← -1 ; *position renvoie (- 1 ; - 1) si l'acteur n'est plus sur le plateau*
    y ← -1 ;
    pour i **allant de** 1 à 3, **faire** :
        pour j **allant de** 1 **à** 3, **faire** :
            si plateau[i][j] = acteur, **alors** :
                x ← j ;
                y ← i ;
            finSi ;
        finPour ;
    finPour ;
    renvoyer x,y

Procédure déplacement_agneau(res : entier;)
    x,y ← position(2) ;
    plateau[y][x] ← 0 ; *on remplace la position de départ par une case vide*
    si res est pair, **alors :**
        si x<2, **alors** : *déplacement vers la droite en restant dans le tableau*
            x ← x+1 ;
        finSi ;
    sinon :
        si y>0, **alors** : *déplacement vers le haut en restant dans le tableau*
            y ← y-1 ;
        finSi ;
    finSi ;
    plateau[y][x] ← 2 ; *on remplace la position d'arrivée par 2*

Procédure déplacement_loup(res : entier;)
    x,y ← position(2) ;
    plateau[y][x] ← 0 ; *on remplace la position de départ par une case vide*
    si res est pair, **alors :**
        si x>0, **alors** : *déplacement vers la gauche en restant dans le tableau*
            x ← x-1 ;
        finSi ;
    sinon :
        si y<2, **alors** : *déplacement vers le bas en restant dans le tableau*
            y ← y+1 ;
        finSi ;
    finSi ;
    plateau[y][x] ← 2 ; *on remplace la position d'arrivée par 1***Fonction** échantillonnage(N : entier ; agneau, loup : flottants)
    loup ← 0 ;
    agneau ← 0 ;
    pour i **allant de** 1 **à** N, **faire :**
        résultat ← partie(100) ;
        si résultat[0] > résultat[1], **alors :**
            agneau ← agneau + $\frac{1}{N}$;
        sinon :
            loup ← loup + $\frac{1}{N}$;
        finSi ;
    finPour ;
    renvoyer agneau, loup

Retour au sommaire

Python

```
from random import randint

# Déplacement des acteurs

def deplacement_loup(res):
    global plateau
    x,y=position(1)
    plateau[y][x]=0
    if res%2==0:
        if x>0:     # déplacement vers la gauche
            x=x-1
    else:
        if y<2:     #déplacement vers le bas
            y=y+1
    plateau[y][x]=1

def deplacement_agneau(res):
    global plateau
    x,y=position(2)
    plateau[y][x]=0
    if res%2==0:
        if x<2:     # déplacement vers la droite
            x=x+1
    else:
        if y>0:     #déplacement vers le haut
            y=y-1
    plateau[y][x]=2

# Détermination de la fin de la partie et du numéro du gagnant

def fin():
    xl,yl=position(1)
    xa,ya=position(2)
    acteur=0
    if xl==-1 or xa==-1:        # le loup gagne s'il atteint
        acteur=1                # la position de l'agneau
    else :
        if xa>xl or ya<yl:      # l'agneau gagne s'il dépasse
            acteur=2            # la position du loup
    return acteur

# Détermination de la position de l'acteur sur le plateau

def position(acteur):
    global plateau
    x,y=-1,-1
```

Retour au sommaire

```
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            if plateau[i][j]==acteur:
                x,y=j,i
    return x,y      # si l'acteur n'est plus sur la grille, # c'est que son adversaire a pris sa place

# Répétition de n parties

def partie(n):
    global plateau
    plateau=[[0,0,1],
             [0,0,0],
             [2,0,0]] # 1 : loup, 2 : agneau
    loup,agneau=0,0 # nombre de parties gagnées par chaque acteur
    for i in range(n):
        while fin()==0:
            de=randint(1,6)
            deplacement_agneau(de) ## test de position !!
            de=randint(1,6)
            deplacement_loup(de)
        if fin()==1:
            loup=loup+2
        else:
            agneau=agneau+1
        plateau=[[0,0,1],
                 [0,0,0],
                 [2,0,0]]
    return agneau,loup

# Création des échantillons et comparaison

def echantillonnage(N):
    loup,agneau=0,0
    for i in range(N):
        resultat=partie(100)
        if resultat[0]>resultat[1]:
            agneau+=1/N
        else:
            loup+=1/N
    return agneau,loup
```

Retour au sommaire

DÉFI POUR NOS COLLÈGUES

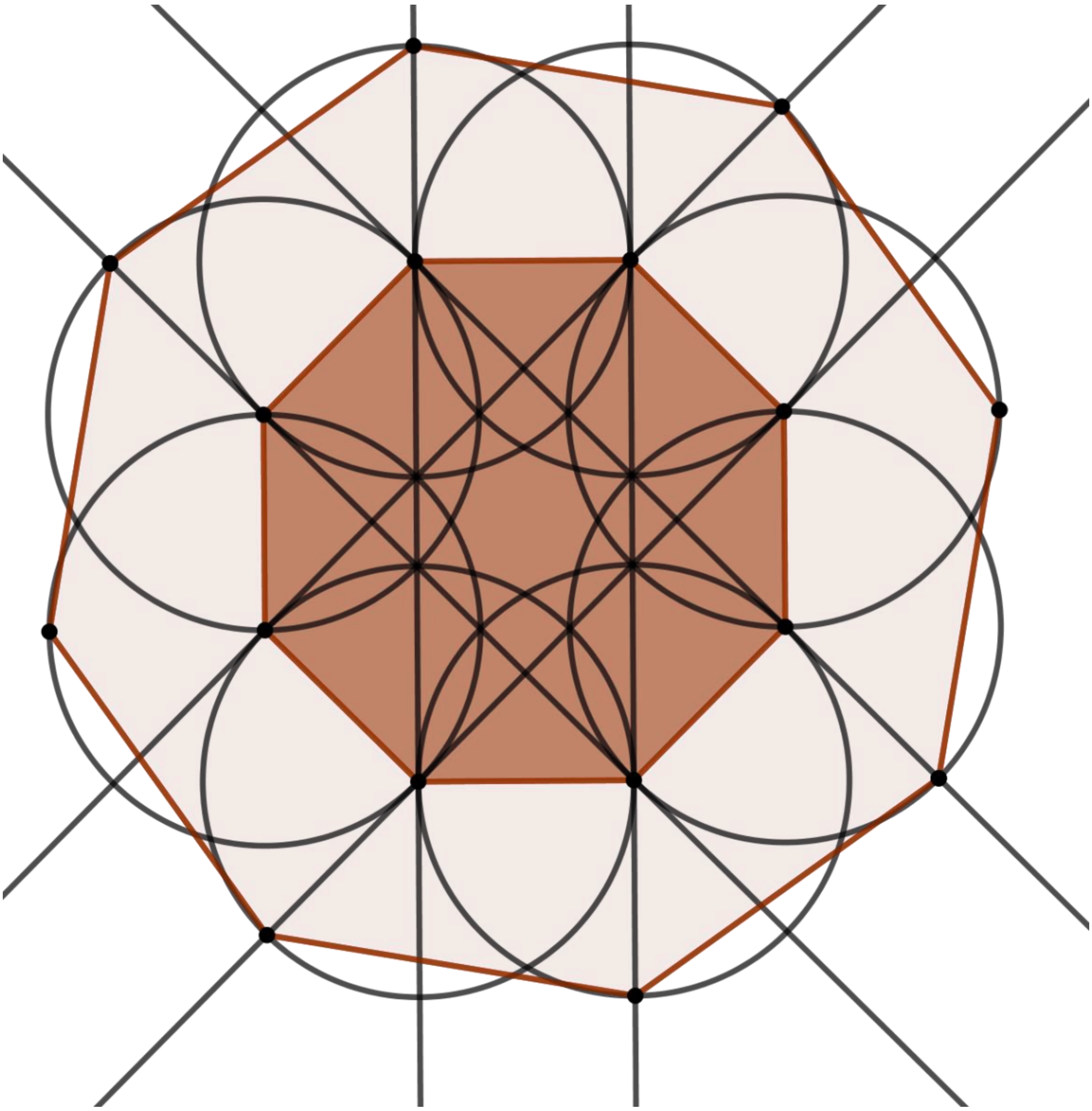
OCTOGONES

Proposé par Fathi DRISSI

En cherchant une trisection de l'octogone régulier pour un futur article de la rubrique « Maths et découpages », j'ai trouvé une construction dont la justification pourrait être donnée comme défi aux collègues dans le prochain numéro du PV.

Sur la figure ci-dessous, le petit octogone est un octogone régulier.

Démontrer que le grand octogone est aussi un octogone régulier et son aire vaut trois fois celle du petit octogone.



Retour au sommaire

PROBLÈME 146

Proposé par Fabien Lombard

On considère un livre de *n* pages, numérotées 1, 2, 3, …, 10, 11, …, *n* et on note u_n le nombre de caractères utilisés pour la pagination depuis la première page.

Ainsi $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, …, $u_{10} = 11$, $u_{11} = 13$, …

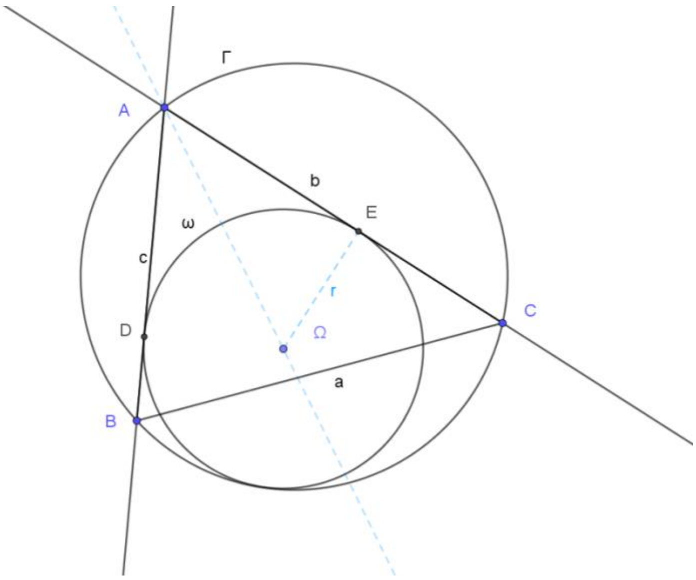
1) Donner une expression explicite de u_n.
2) On écrit les nombres utilisés dans la pagination à la suite les uns des autres : 1234…101112…
    a) Quel est le 365ième chiffre écrit ? Sur quelle page se trouve-t-il ?
    b) Quel serait le millionième chiffre écrit ? Sur quelle page se trouverait-t-il ?

SOLUTION PROBLÈME 145

Proposé par Jacques Choné

Enoncé

On considère un triangle ABC, son cercle circonscrit Γ et ω le cercle tangent intérieurement à Γ et aux côtés $[A,B]$ et $[A,C]$. Déterminer le rayon r de ω en fonction des longueurs des côtés a, b, c des côtés $[B,C]$ et $[A,C]$. $[A,B]$ du triangle ABC.



Solution

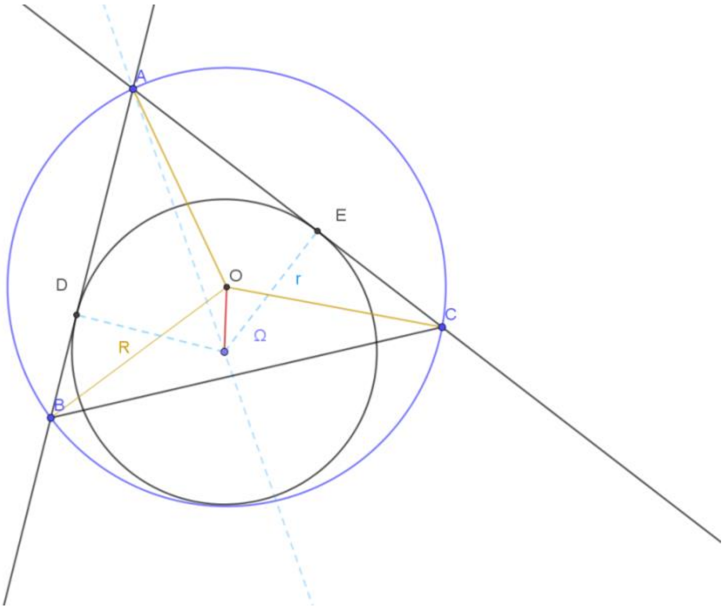
Trois solutions ont été proposées, par Fabien Lombard qui s'appuie sur des relations trigonométriques, par l'auteur Jacques Choné qui introduit des transformations, et par Renaud Dehaye qui étudie des cas particuliers.

Fabien Lombard rappelle en préalable la méthode des « translations parallèles » de Viète, qui a résolu les problèmes de tracé de cercles astreints à des conditions comme passer par des points, être tangents à des droites ou des cercles, dans sa solution du problème des trois cercles d'Apollonius.

Cette méthode permet de construire le cercle ω à la règle et au compas. Pour cela on pourra voir par exemple l'article de Debart ou le résumé que j'en propose.

Retour au sommaire

Fabien Lombard donne ensuite une démonstration qui s'appuie sur les relations trigonométriques dans des triangles.
Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et R son rayon.



Dans le triangle $AO\Omega$, : $O\Omega^2 = OA^2 + A\Omega^2 - 2OA.A\Omega\cos(\widehat{OA\Omega})$

Soit $(R-r)^2 = R^2 + \frac{r^2}{\sin^2\frac{\hat{A}}{2}} - 2R\frac{r}{\sin\frac{\hat{A}}{2}}\cos(\widehat{OA\Omega})$ (*)

Dans la démonstration ci-dessous, on se place dans le cas de la figure où Ω est extérieur au secteur angulaire. On obtiendrait le même résultat dans l'autre cas.

$\widehat{OA\Omega} = \frac{\hat{A}}{2} - \widehat{OAC}$ et, en utilisant le fait que le triangle ABC est isocèle et des propriétés des angles inscrits, $\widehat{OAC} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{AOC}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - 2\hat{B}\right)$ ou encore

$\widehat{OAC} = \frac{1}{2}\left(\pi - 2\hat{B}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 2\hat{B}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C}\right)$

Par conséquent $\widehat{OA\Omega} = \frac{1}{2}\left(\hat{B} - \hat{C}\right)$

En reportant ce résultat dans (*), on obtient :

$$R^2 - 2Rr + r^2 = R^2 + \frac{r^2}{sin^2\frac{\hat{A}}{2}} - 2R\frac{r}{sin\frac{\hat{A}}{2}}cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$

Soit $r\left(1 - sin^2\frac{\hat{A}}{2}\right) = 2Rsin^2\frac{\hat{A}}{2} - sin\frac{\hat{A}}{2}cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$

On a donc : $rcos^2\frac{\hat{A}}{2} = 2Rsin\frac{\hat{A}}{2}\left(sin\frac{\hat{A}}{2} - cos\,\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)$

En notant que $sin\frac{\hat{A}}{2} = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{A}}{2}\right) = cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$, on obtient que

$$r\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = 2R\sin\frac{\hat{A}}{2}\left(\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} - \cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)$$

Soit $\quad r\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = 4R\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}$

On obtient alors la relation simple : $r\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = r_i$

où r_i le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

On sait de plus que si on note $p = \frac{a+b+c}{2}$, on a $aire(ABC) = r_i p$ et la formule de Héron : $aire(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Par conséquent $r\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$

Retour au sommaire

Il reste à exprimer $cos^2\frac{\hat{A}}{2}$ en fonction de a, b, c.

Or $cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}(1 + cos\hat{A})$

En utilisant la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$, on obtient $cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)$

Soit $cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{4bc}(2bc - a^2 + b^2 + c^2)$ ou encore $cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{4bc}(b + c - a)(b + c + a)$

On retrouve une autre relation connue dans le triangle : $\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$

On obtient finalement $r = \frac{bc}{p^2}\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$, soit après simplification $r = \frac{bc}{p}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

Par ailleurs Fabien Lombard transforme cette expression pour en obtenir une plus concise. En s'appuyant sur les formules (voir par exemple « la géométrie du triangle » de René et Yvonne Sortais) reliant les rayons des cercles circonscrit, inscrit, exinscrits et mesure des angles. On a :

$r_i = 4R\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}$, $r_A = 4R\sin\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}$ et des formules analogues pour r_B et r_C

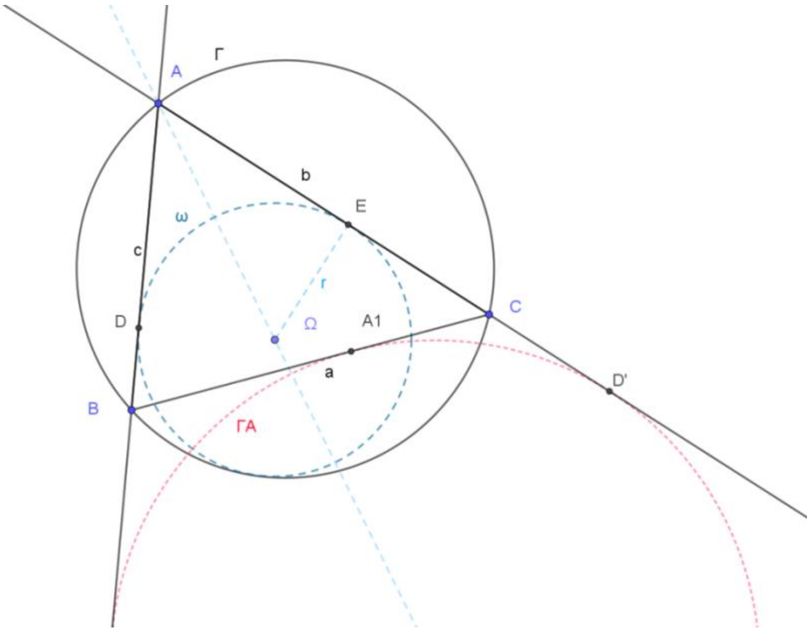
On en déduit que $r_A + r_B + r_C = 4R + r_i$ et que $r_A - r_i = 4Rsin^2\frac{\hat{A}}{2}$.

Par conséquent $r_B + r_C = 4Rcos^2\frac{\hat{A}}{2}$ et pour finir $r = \frac{4Rr_i}{r_B+r_C}$ ce qui est, comme il dit, plus « joli ».

Enfin, Fabien Lombard signale une extension de ce problème dans un exercice corrigé par un élève du lycée Louis-Legrand en … 1897 ! Autre temps, autres mathématiques.

La solution de Jacques Choné suit l'idée, assez naturelle, d'introduire une application qui transforme un problème de tangence entre cercles en un problème de tangence cercle – droite. On introduit pour cela une inversion qui transforme l'un des deux cercles en une droite « remarquable ».

D'où l'idée d'introduire une inversion I de pôle A et de rapport $k > 0$.



Soit $B' = I(B)$ et $C' = I(C)$. On a alors $AB' = \frac{k}{b}$ et $AC' = \frac{k}{c}$

En choisissant $k = bc$, on obtient alors $AB' = c$ et $AC' = b$, ainsi $B' = \sigma(B)$ et $C' = \sigma(C)$ où σ est la symétrie par rapport à la bissectrice intérieure du triangle ABC issue de A.

En notant $f = I \circ \sigma$, on vérifie aisément que I et σ commutent, que f est involutive et que f échange B et C.

On en déduit que $f(\Gamma \setminus \{A\}) = (BC)$, $f(AB) = (AC)$ et $f(AC) = (AB)$.

De plus I et σ, conservent les contacts, donc $f = I \circ \sigma$ les conserve également.

Par conséquent ω étant tangent au cercle Γ, et aux droites (AB) et (AC), son image est tangente aux droites (BC), (AC) et (AB). C'est donc le cercle inscrit au triangle ABC ou le cercle relatif à A exinscrit à ce même triangle.

Retour au sommaire

Soit D le point de contact du cercle ω et de la droite (AB) et notons D' l'image de D par la transformation f. Le point $D \in [A,B])$ donc $D' \in (AC)$ et $AD < c$

Or $AD \times AD' = bc$, par conséquent $AD' > b$; ce qui signifie que $D' \notin [A,C])$.

On en déduit que $f(\omega) = \Gamma_A$ cercle relatif à A exinscrit au triangle ABC.

f est involutive donc $f(\Gamma_A) = \omega$, soit $I \circ \sigma(\Gamma_A) = \omega$.

Sachant que $\sigma(\Gamma_A) = \Gamma_A$, on en déduit que $I(\Gamma_A) = \omega$.

Pour déterminer le rayon r de ω il suffit de connaitre la relation entre le rayon d'un cercle et celui de son image par une inversion :

<u>Prop 1</u> : si Σ est un cercle de centre O et de rayon R qui a pour image le cercle Σ' de rayon R' par l'inversion de centre A et de rapport k, alors $\frac{R'}{R} = \frac{k}{P(A,\Sigma)}$, où $P(A,\Sigma)$ désigne la puissance du point A par rapport au cercle Σ.

Donc si on note r_A le rayon du cercle exinscrit Γ_A, on a $\frac{r}{r_A} = \frac{bc}{P(A,\Gamma_A)} = \frac{bc}{AD'^2}$

Or $AD' = AC + CD' = b + CA_1$ et $AD' = AE' = AB + DE' = c + BA_1$

On en déduit que $2AD' = b + c + CA_1 + BA_1 = b + c + a$.

En notant $p = \frac{a+b+c}{2}$, le demi-périmètre du triangle ABC, on a donc $AD' = p$ et $\frac{r}{r_A} = \frac{bc}{p^2}$

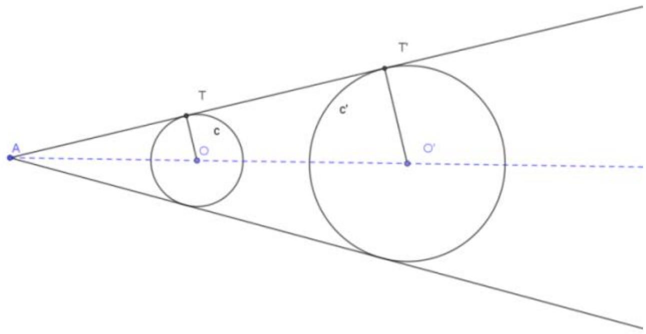
Il reste à déterminer r_A en fonction de a , b et c

<u>Prop 2</u> : $r_A(p-a) = aire(ABC)$

En utilisant la formule de Héron : $aire(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, on obtient finalement $r = \frac{bc}{p^2}\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$, soit après simplification $r = \frac{bc}{p}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

ANNEXE

<u>Démonstration Prop1</u>



O' n'est pas l'image de O par l'inversion I, mais l'image de T est T'

donc $OT' = \frac{k}{OT}$ et par conséquent $\frac{OT'}{OT} = \frac{k}{OT^2} = \frac{k}{P(A,c)}$

Les triangles ATO et $AT'O'$ sont homothétiques, donc $\frac{R'}{R} = \frac{OT'}{OT} = \frac{k}{P(A,c)}$

<u>Démonstration Prop 2</u>

Si on note I_A le centre du cercle relatif à A, exinscrit au triangle ABC, on a :

$$aire(ABC) = aire(ABI_AC) - aire(I_ABC) = aire(ABI_A) + aire(ACI_A) - aire(BCI_A)$$

Donc $aire(ABC) = \frac{1}{2}(AB \times r_A) + \frac{1}{2}(AC \times r_A) - \frac{1}{2}(BC \times r_A)$

Soit $aire(ABC) = \frac{1}{2}(c + b - a) \times r_A) = \frac{1}{2}(2p - 2a) \times r_A) = (p-a) \times r_A)$

Retour au sommaire

LU POUR VOUS

LA PETITE HISTOIRE DES FLOCONS DE NEIGE

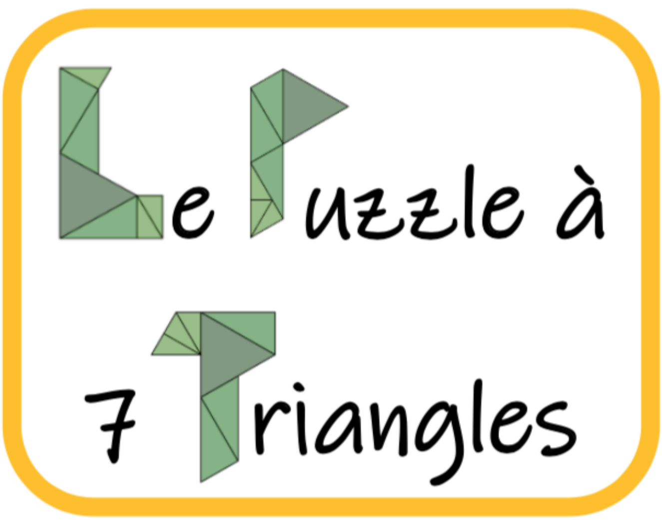
Étienne Ghys, mathématicien et secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, sait enchanter petits et grands. Bien connu des membres de l'APMEP pour ses conférences lors des Journées Nationales, il met à portée de tous des notions complexes et rend passionnant n'importe quel sujet.

Les flocons de neige nous font rêver par leur forme, leur silence et leur apparition quasi magique. Dans son livre « La petite histoire des flocons de neige », Étienne Ghys nous raconte quelques étapes de recherche sur la formation et la géométrie des flocons depuis Olaf Månnson jusque Kenneth Libbrecht.

Superbes illustrations, jeux, humour, démonstrations mathématiques ponctuent ce livre. Même le pavage du Caire, à l'origine d'un puzzle du groupe Jeux de l'APMEP Lorraine, est mentionné !

Un livre à lire absolument !

Un produit de notre régionale à ne pas manquer !



APMEP RÉGIONALE LORRAINE

En complément du puzzle, des documents complémentaires sont accessibles en utilisant le QRcode de l'étiquette ou le lien indiqué sur la feuille jointe aux pièces. Ce dossier sera modifié et complété au fur et à mesure des envies et des propositions des utilisateurs.

Il est vendu au prix de 5€. Pour un envoi postal, il faut rajouter les frais de port (2 x 1,08 €).

Les commandes peuvent être envoyées à cette adresse .

Retour au sommaire