DANS NOS CLASSES

APPRÉHENDER LE THÉORÈME DE PYTHAGORE EN SEGPA

Julie BERQUE
Collège Louis Armand - Moulins-lès-Metz

Cette expérimentation s'est faite suite à des échanges entre collègues enseignant les mathématiques dans l'établissement. Le souhait de faire découvrir le théorème en utilisant des aires était présent dans un ancien document de formation de professeurs du second degré. Des versions papier avaient été retrouvées et utilisées comme ressource, il est actuellement téléchargeable sur notre site.

En tant que jeune enseignante, j'ai été affectée pour ma deuxième année consécutive en classe spécialisée : la SEGPA. Cette année, j'ai eu pour la première fois Mathématiques en $4^{\text{ème}}/3^{\text{ème}}$. Les compétences de cycle 4, le DNB professionnel, le double niveau étaient autant d'enjeux que de découvertes pour moi cette année. La difficulté majeure selon moi, était l'écart entre le niveau de mes élèves et les attentes du DNB pro. Avec l'aide de l'équipe de mathématiques au sein de mon collège, j'ai pu être aiguillée, soutenue et ainsi aborder mon année plus sereinement et efficacement. En effet, ma façon d'enseigner les mathématiques est la suivante : un état des lieux des connaissances par le biais d'évaluation diagnostique, révisions des prérequis pour enfin aborder des chapitres de compétences cycle 4. Je vais donc vous présenter une proposition de séquence sur le théorème de Pythagore en SEGPA, un chapitre incontournable lorsqu'on prépare nos élèves au DNB professionnel.

La problématique que je vais aborder dans cet article est la suivante : Comment appréhender un chapitre complexe, tel que le théorème de Pythagore, tout en prenant en compte la difficulté scolaire afin de mettre les élèves en situation de réussite ?

Cette séquence a été réalisée avec une classe SEGPA comprenant 17 élèves de $4^{\text{ème}}/3^{\text{ème}}$ en difficulté scolaire.

1 – État des lieux des connaissances

Pour aborder un tel chapitre, il est important de s'intéresser aux prérequis qu'il sollicite. En effet, le théorème de Pythagore implique différentes compétences à maitriser en amont.

- Connaitre les propriétés du carré ainsi que ses formules (aire/périmètre).
- Construire des figures usuelles (carré, rectangle, triangle).
- Distinguer aire/périmètre.

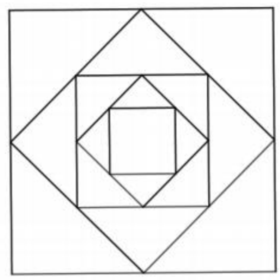
À partir d'une évaluation diagnostique, il a été possible de constater que la classe de $4^{\text{ème}}/3^{\text{ème}}$ devait retravailler ces différentes notions afin d'enlever tout obstacle à la compréhension et à l'application du théorème.

Retour au sommaire

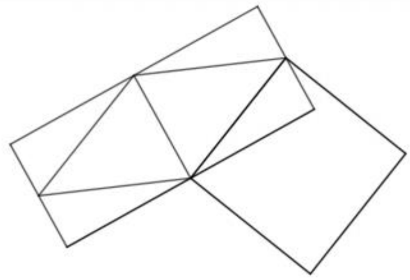
Exemples d'activités proposés en amont sur la remédiation sur les carrés/rectangles

Activité

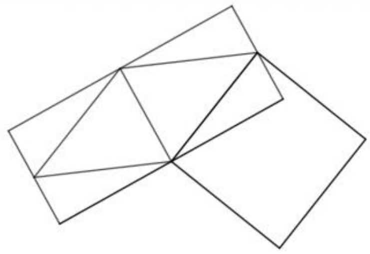
a) Observe bien la figure géométrique ci-contre. Combien de carrés vois-tu ? Repasse-les en rouge.



a) Sur la figure ci-contre, repasse en vert le contour des rectangles que tu reconnais (vérifie les propriétés en utilisant des instruments).



b) Reconnais-tu un carré dans cette figure ? Si oui, repasse en rouge son contour.



Activité

Dans chacune des 2 cases ci-dessous se trouve le début d'une construction d'un carré.
Termine ces constructions en utilisant seulement les instruments indiqués.

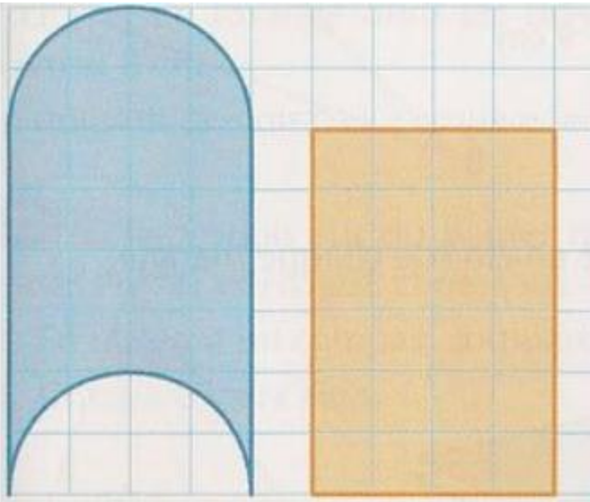
N'efface pas tes traits de construction.

	
Équerre et règle graduée	**Règle non graduée et compas**

Retour au sommaire

Exemples d'activités proposées en amont sur la remédiation aire/périmètre

Activité
Observe les figures suivantes et coche les bonnes réponses.



La figure bleue a un périmètre plus grand que la figure orange	☐
La figure bleue et la figure orange ont le même périmètre	☐
La figure orange a un périmètre plus grand que la figure bleue	☐
La figure bleue a une aire plus grande que la figure orange	☐
Les deux figures ont la même aire	☐
La figure orange a une aire plus grande que la figure bleue	☐

Activité

Classer les situations suivantes en deux catégories en cochant la case "Périmètre" ou la case "Aire".

	Aire	**Périmètre**
On veut acheter du parquet pour changer le sol d'une chambre	☐	☐
Pour le tout nouveau stade de foot on souhaite entourer le stade avec des barrières	☐	☐
Je souhaite rénover mon balcon et le carreler entièrement	☐	☐

2 – Les objectifs de la séquence sur le Théorème de Pythagore

Séances Prérequis (3 séances) : Connaitre les propriétés d'un carré/rectangle, tracer carré, rectangle et triangle, distinguer aire et périmètre.
Chapitre prérequis aire/périmètre (3 séances) : Distinguer aire et périmètre.
Séance 1 : Activité introductive sur les puzzles : Découvrir la propriété du théorème de Pythagore.
Séance 2 : Calculer l'aire du 3eme carré, déterminer la longueur de côté des carrés, compléter le théorème de Pythagore à l'aide de la méthode des puzzles.
Séances 3 et 4 : Calculer une longueur (cas de l'angle droit et de l'hypoténuse).
Séances 5 : Évaluation.
Séance 6 : Problème en lien avec Pythagore.

Retour au sommaire

3 - Déroulement de la séquence sur le théorème de Pythagore

a) Séance 1

Puzzles de Pythagore

Puzzle 1

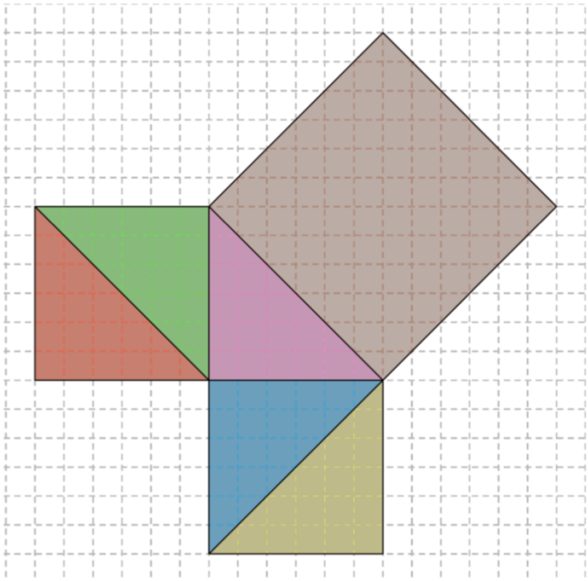
Nous avons entouré un triangle rectangle et isocèle de trois carrés.

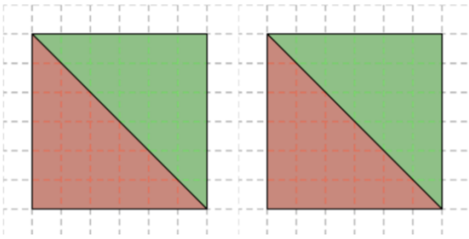
Avec les 4 triangles ci-dessous tu peux recouvrir exactement le plus grand carré.

Découpe et colle ces 4 triangles sur la figure de droite de telle sorte qu'ils recouvrent le grand carré.

Complète la phrase suivante :

L'………….. du grand carré est égale à la ………………des aires des deux autres…………





Puzzle 2

Nous avons choisi cette fois un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit mesure le double de l'autre.

Le carré intermédiaire a été partagé en 4 triangles identiques.

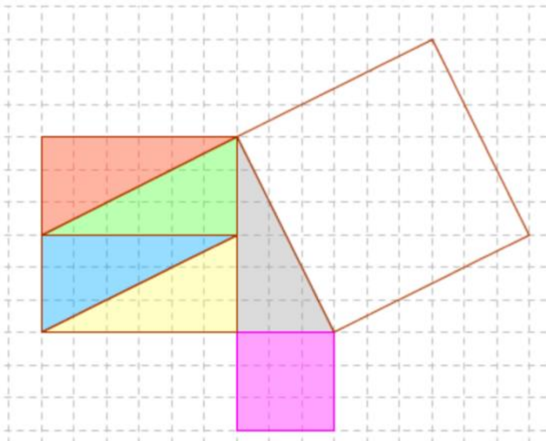
Avec les 4 triangles et le plus petit carré tu peux recouvrir exactement le grand carré.

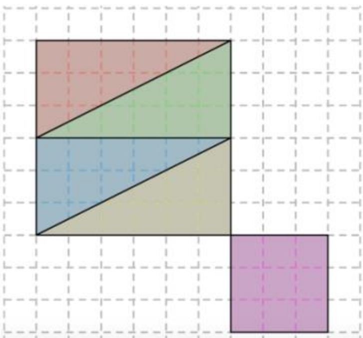
Découpe les 4 triangles et le carré ci-dessous et colle-les sur la figure de droite de telle sorte qu'ils recouvrent le grand carré.

La phrase encadrée (puzzle 1) est-elle encore vraie ?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………





Retour au sommaire

Puzzle 3

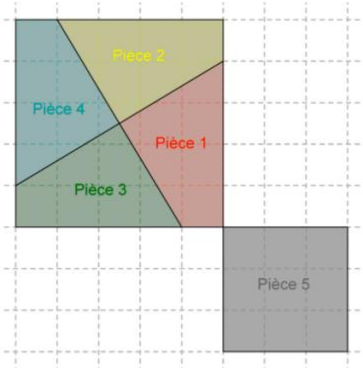
Pour ce puzzle, le carré intermédiaire a été partagé en 4 quadrilatères identiques.

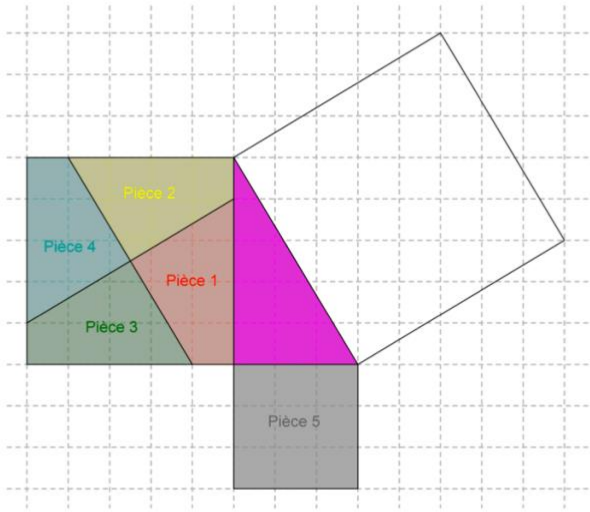
Découpe les 5 pièces ci-dessous et colle-les sur la figure de droite de telle sorte qu'elles recouvrent le grand carré.

La phrase encadrée (puzzle 1) est-elle encore vraie ?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………





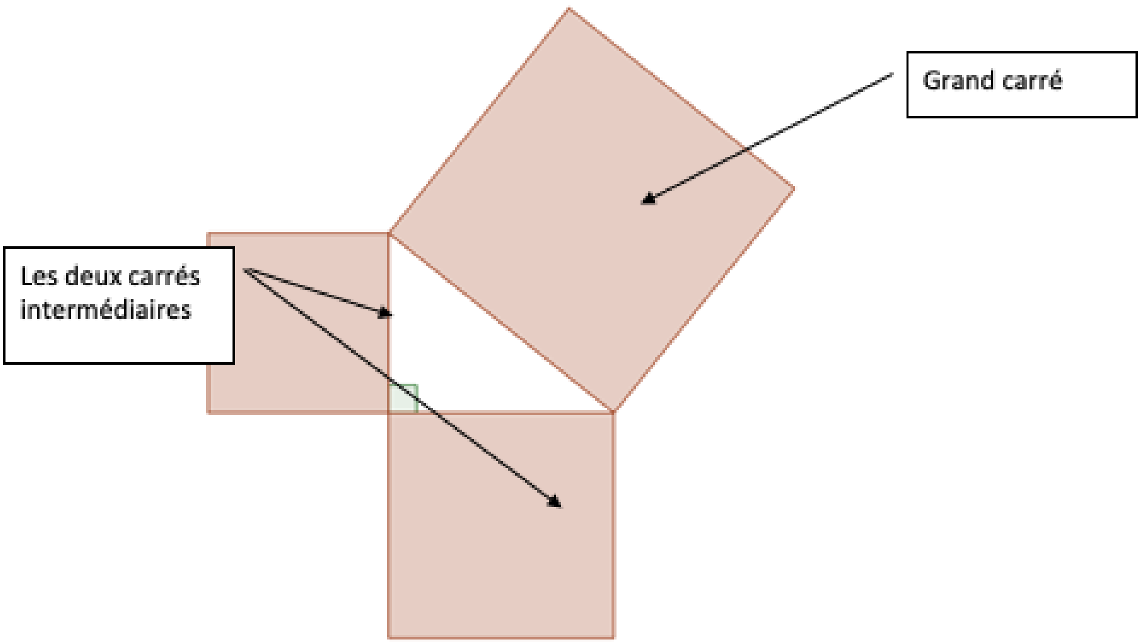
L'objectif de cette activité est de faire comprendre aux élèves par la manipulation que « L'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés. » Lors de l'activité, le puzzle n°2 a posé quelques difficultés pour les élèves puisque la pièce « carré » devait se mettre au milieu. Le puzzle n° 3 est un réinvestissement du puzzle n°2.

b) Séance 2

Rappel de la propriété découverte lors de la séance 1 et début d'institutionnalisation.

Le théorème de Pythagore

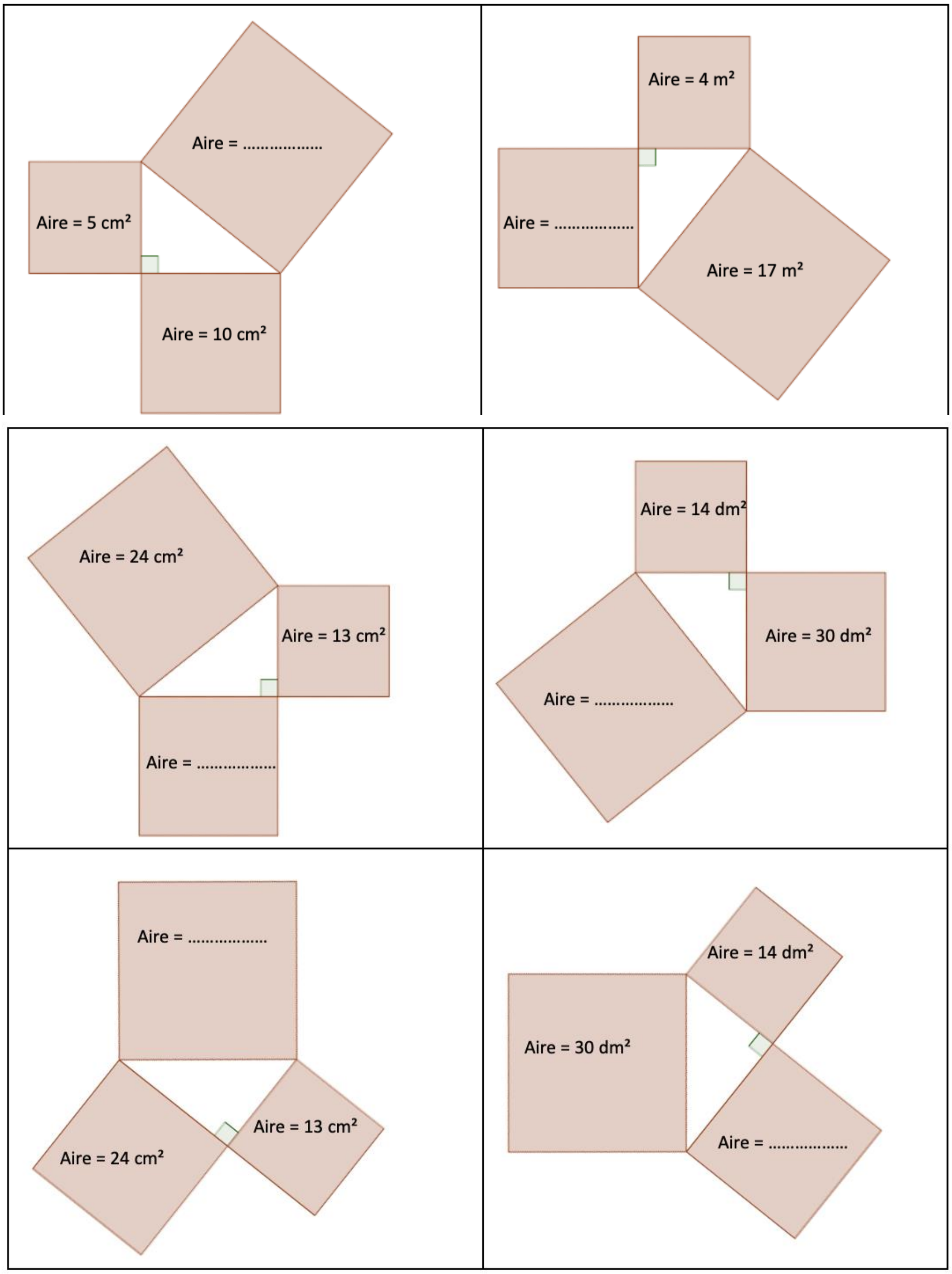
Si l'on entoure **un triangle rectangle** par trois carrés, alors **l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés**.



Retour au sommaire

Exercice 1

Calcule l'aire du troisième carré.

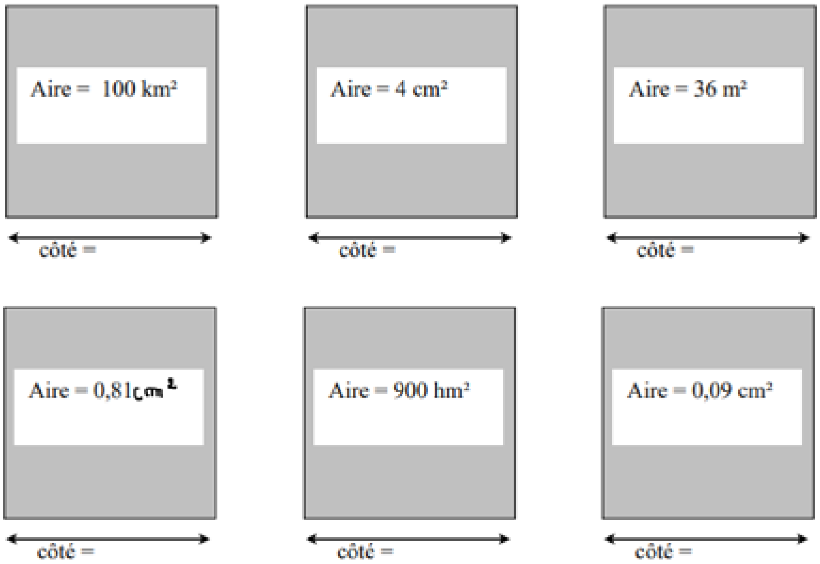


Dans cette activité, mes élèves devaient calculer l'aire du troisième carré à partir des deux autres. Ici, la difficulté pour l'apprenant était d'utiliser deux types d'opérations : soit l'addition lorsqu'on devait chercher l'aire du plus grand carré soit la soustraction lorsqu'on devait trouver l'aire d'un petit carré. Dans un mécanisme de rapidité, certains élèves passaient par l'addition systématiquement. Il est donc important, lors de cette phase, de prendre le temps avec l'élève de distinguer dans quel cas il faut additionner et dans quel cas il faut soustraire.
Attention tout de même à l'unité de longueur, certains élèves ont tendance à mettre tout en cm^2.

Retour au sommaire

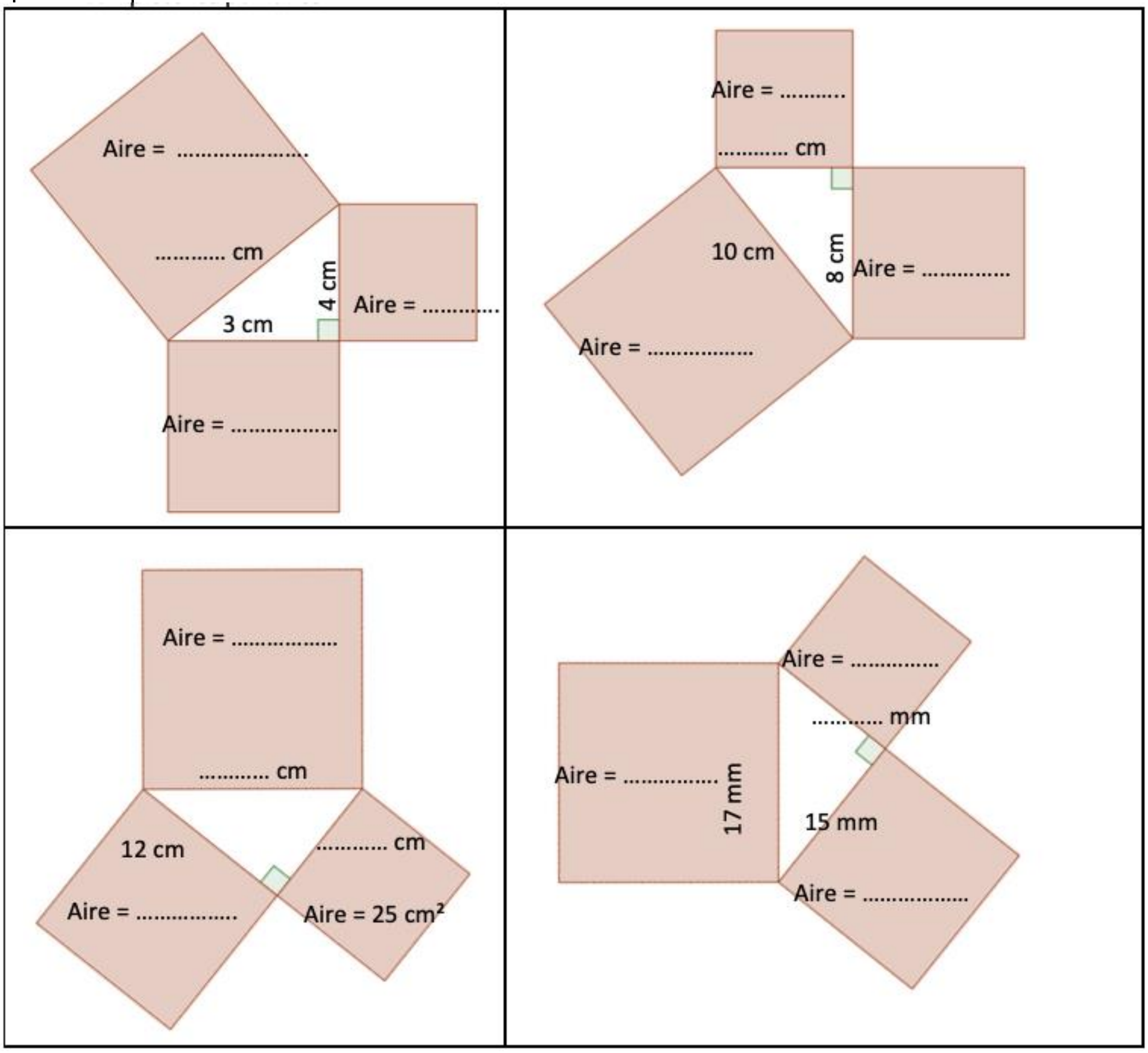
Exercice 2

Déterminer la longueur du côté des carrés.



Exercice 3

Complète les pointillés



Retour au sommaire

L'exercice 2 demande un réinvestissement des prérequis vus lors des premières séances : « connaitre la formule de l'aire d'un carré », « distinguer aire et périmètre ». Ici, les élèves devaient retrouver à partir de l'aire du carré la longueur du côté du carré. Ils découvrent la racine carrée.

L'exercice 3 est la démarche attendue par un élève de SEGPA pour déterminer une longueur à l'aide du théorème de Pythagore.

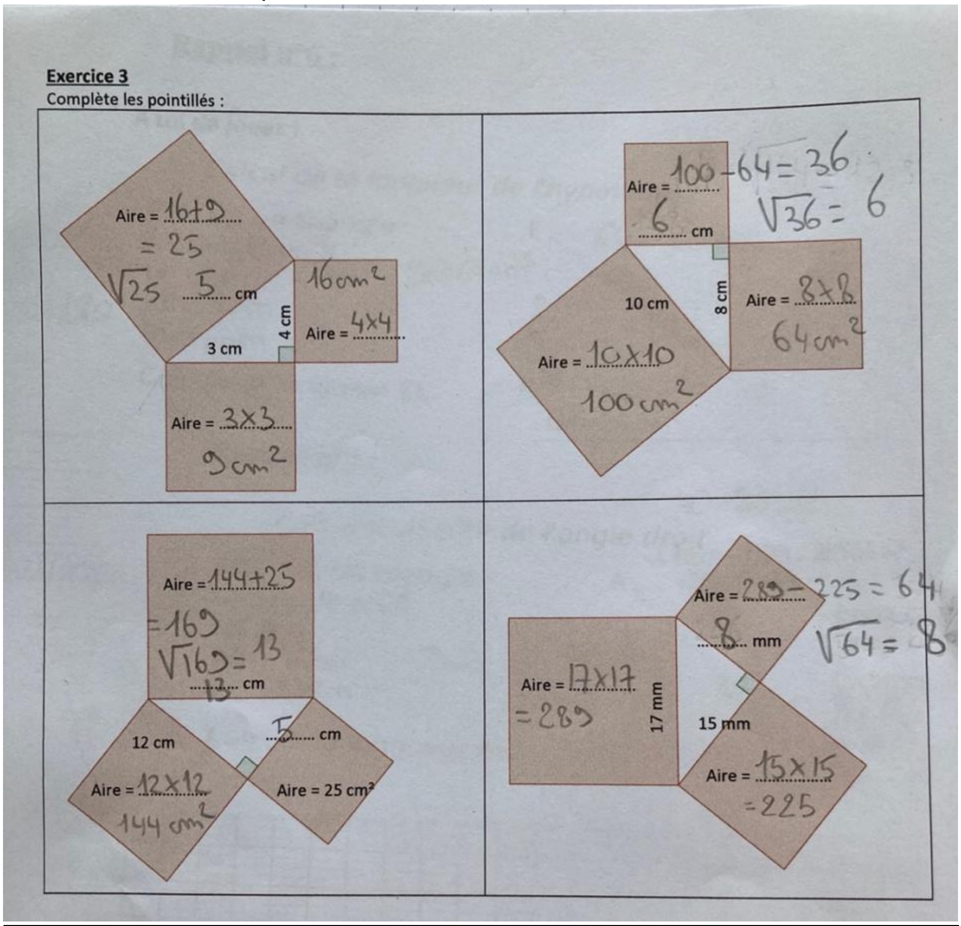
<u>La démarche lorsqu'il faut calculer la longueur du grand carré (l'hypoténuse)</u>

1) L'élève doit calculer les aires des deux plus petits carrés.
2) L'élève doit additionner les deux aires des petits carrés pour déterminer l'aire du grand carré (cf propriété : **l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés**).
3) Une fois l'aire du grand carré connue, l'élève réinvestit ce qu'il a appris dans l'exercice 2 et utilise la racine carrée pour déterminer la longueur du grand carré.

<u>La démarche lorsqu'il faut calculer la longueur du petit carré (un côté de l'angle droit)</u>

1) L'élève doit calculer les aires du grand et d'un des deux petits carrés.
2) L'élève doit soustraire l'aire du grand carré à l'aire du petit carré pour déterminer l'aire du troisième carré.
3) Une fois l'aire du petit carré connue, l'élève réinvestit ce qu'il a appris dans l'exercice 2 et utilise la racine carrée pour déterminer la longueur du petit carré.

Ci-dessous, l'exercice 3 réalisé par un élève.



Retour au sommaire

c) Séances 3 et 4

La séance 3 est l'institutionnalisation du chapitre. Elle permet à l'élève de distinguer les différentes étapes pour appliquer le théorème. Il peut s'y référer autant de fois que nécessaire. La séance 4 est une application de l'institutionnalisation dans une série d'exercices.

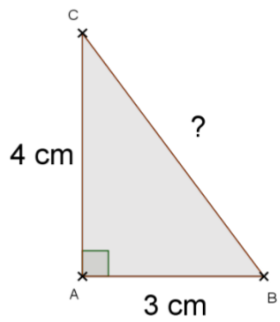
Le théorème de Pythagore

Si l'on entoure **un triangle rectangle** par trois carrés, alors **l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés**.

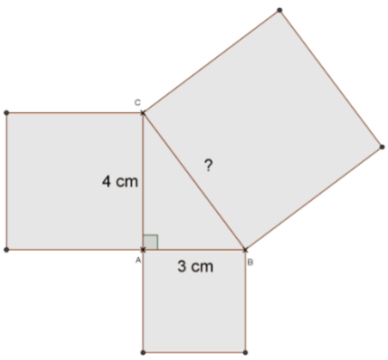
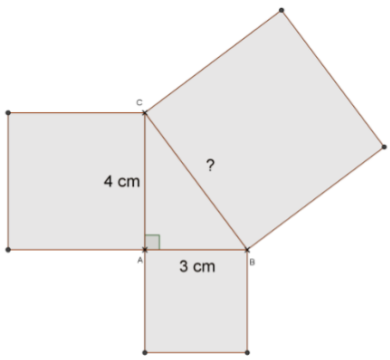
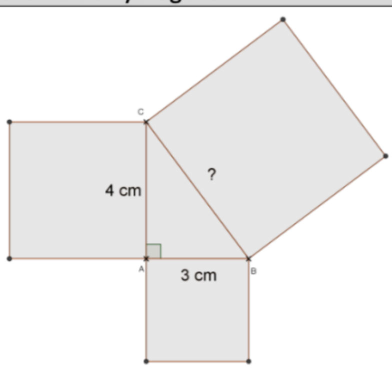
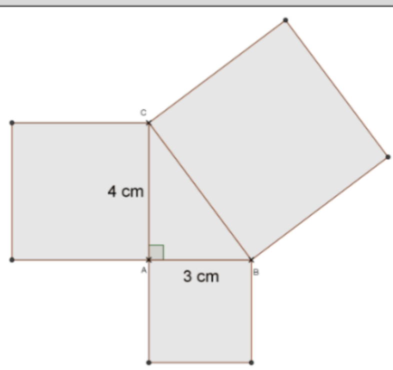
Quand utiliser ce théorème ?
On utilise **le théorème de Pythagore** pour déterminer la longueur d'un des trois côtés d'un **triangle rectangle** connaissant la longueur des deux autres.

Exemple

Le triangle ABC est rectangle en A avec AB = 3 cm et AC = 4 cm.
Calculer BC.



Solution

Etape 1 : On entoure le triangle rectangle par trois carrés.	**Etape 2 :** On calcule l'aire des deux carrés (ceux dont on connait la longueur du côté).
	
Etape 3 : On calcule l'aire du troisième carré à l'aide du théorème de Pythagore.	**Etape 4 :** On calcule la longueur du côté de ce carré.
	

Retour au sommaire

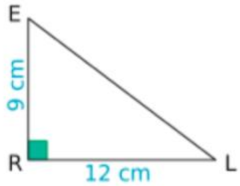
Exercices (extraits du manuel Parcours Maths – cahier d'exercices 4ème – Génération 5)

À toi de jouer !

2 *Calcul de la longueur de l'hypoténuse*

ERL est un triangle rectangle en R, tel que :
ER = 9 cm ;
RL = 12 cm.

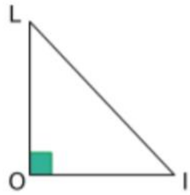
Calcule la longueur EL.



3 *Calcul de la longueur de l'hypoténuse (bis)*

LOI est un triangle rectangle en O, tel que :
LO = 21 cm ;
OI = 20 cm.

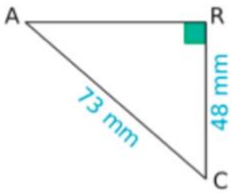
Calcule la longueur LI.



4 *Calcul d'un côté de l'angle droit*

ARC est un triangle rectangle en R, tel que :
AC = 73 mm ;
RC = 48 mm.

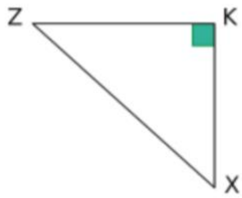
Calcule la longueur AR.



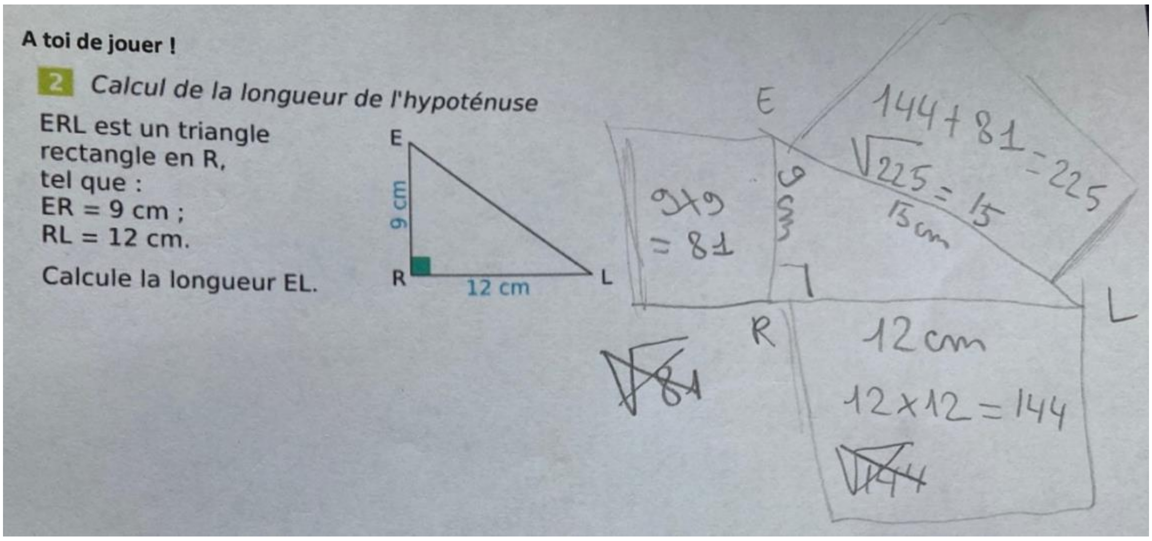
5 *Calcul d'un côté de l'angle droit (bis)*

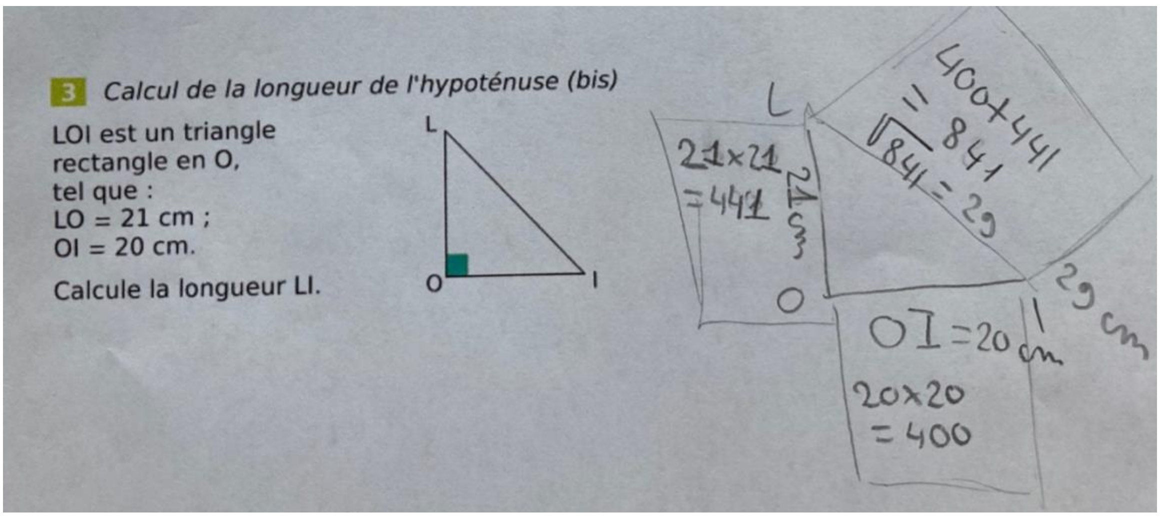
KXZ est un triangle rectangle en K, tel que :
KX = 6,5 cm ;
ZX = 9,7 cm.

Calcule la longueur KZ.



Exemple de productions d'un élève





Retour au sommaire

d) Séance 5 **: Évaluation sur le chapitre**

Nom : ___________________

Prénom : ________________________

Évaluation : Théorème de Pythagore

Compétences :

- Connaître le théorème de Pythagore 1 2 3 4
- Utiliser le théorème pour calculer une longueur 1 2 3 4

Exercice 1 : Citer la définition du théorème de Pythagore. **(2pts)**

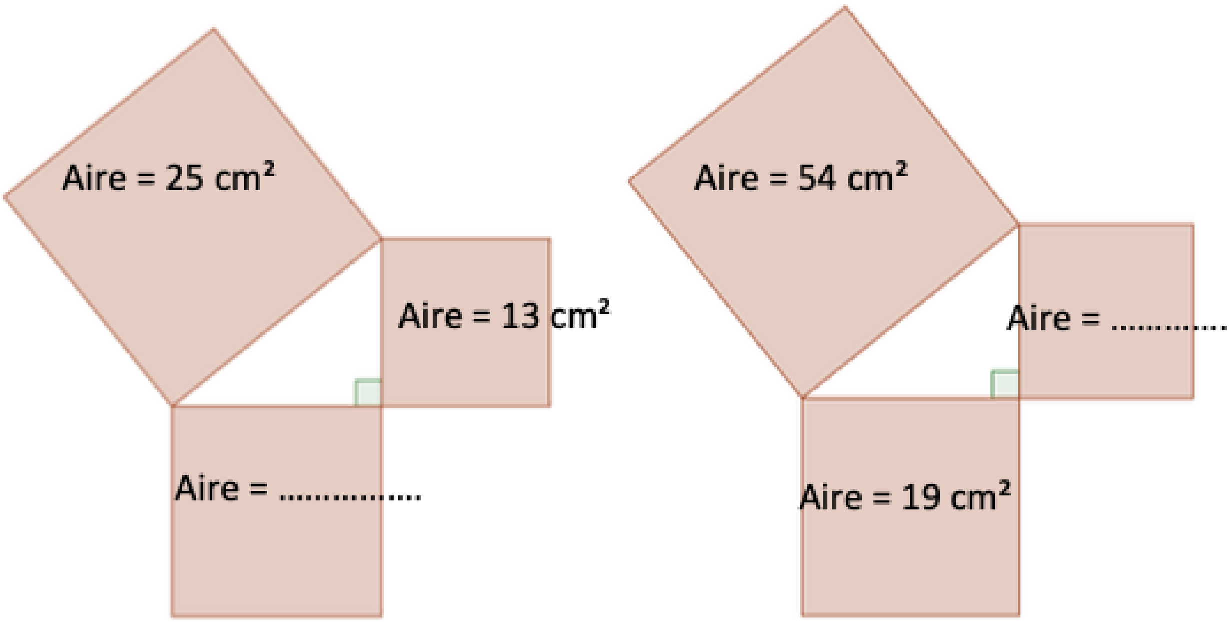
____

____

____

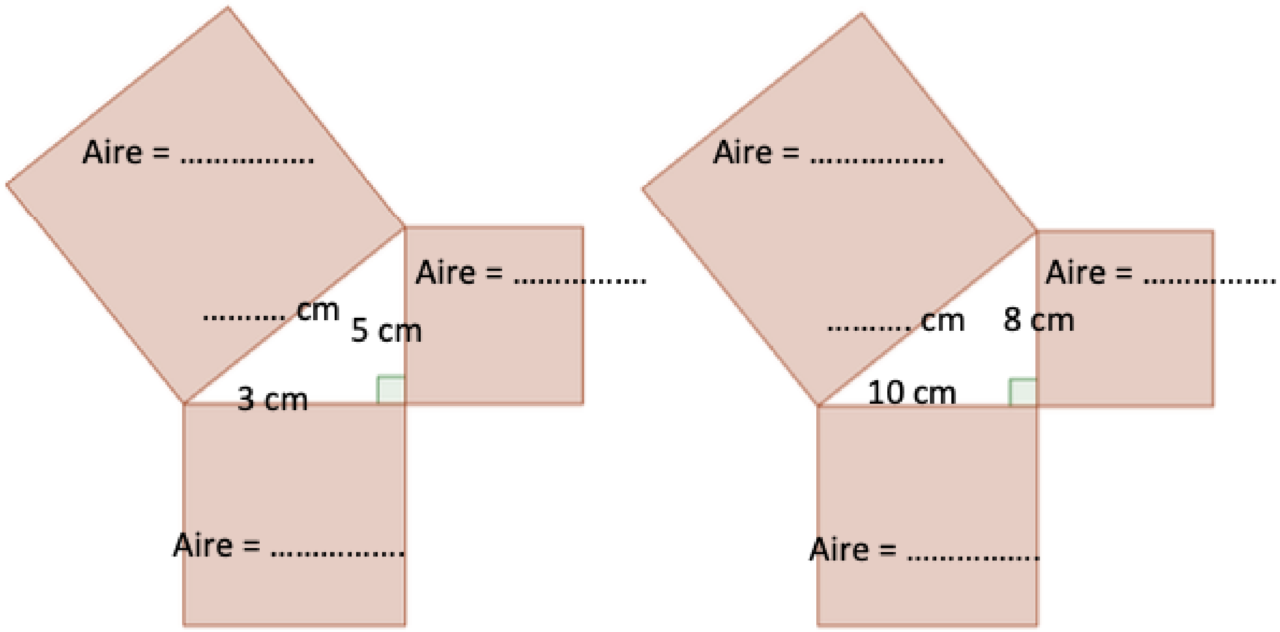
____

Exercice 2 : Consigne : Calculer l'aire du 3eme carré**. (2pts)**



Retour au sommaire

<u>Exercice 3</u> : Consigne : Compléter les pointillés. **(2pts)**

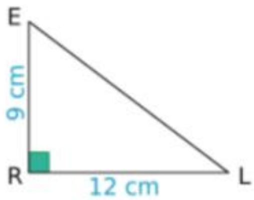


<u>Exercice 4</u> : (5pts) (Exercice extrait du manuel Parcours Maths – cahier d'exercices 4ème)

Consigne : Calculer la longueur de l'hypoténuse de chaque triangle rectangle.

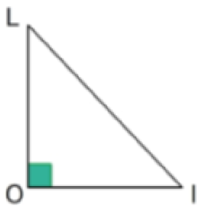
ERL est un triangle
rectangle en R,
tel que :
ER = 9 cm ;
RL = 12 cm.

Calcule la longueur EL.



LOI est un triangle
rectangle en O,
tel que :
LO = 21 cm ;
OI = 20 cm.

Calcule la longueur LI.

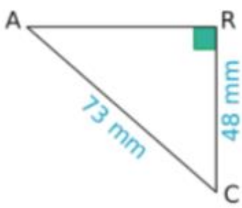


<u>Exercice 5</u> : (5pts) (Exercice extrait du manuel Parcours Maths – cahier d'exercices 4ème)

Consigne : Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit de chaque triangle rectangle.

ARC est un triangle
rectangle en R,
tel que :
AC = 73 mm ;
RC = 48 mm.

Calcule la longueur AR.



KXZ est un triangle
rectangle en K,
tel que :
KX = 6,5 cm ;
ZX = 9,7 cm.

Calcule la longueur KZ.

Retour au sommaire

Exercice 6 : (4pts)

Sur une carte, le triangle CLP formé par les villes de Caen, Lisieux et Pont l'Évêque est considéré comme étant rectangle en L.
On donne CP = 46 km et PL = 17 km.

Consigne :
Montrer par le calcul que la distance CL est d'environ 43 km.

(Exercice tiré de https://maths-pdf.fr/le-theoreme-de-pythagore-exercices-maths-quatrieme-2)

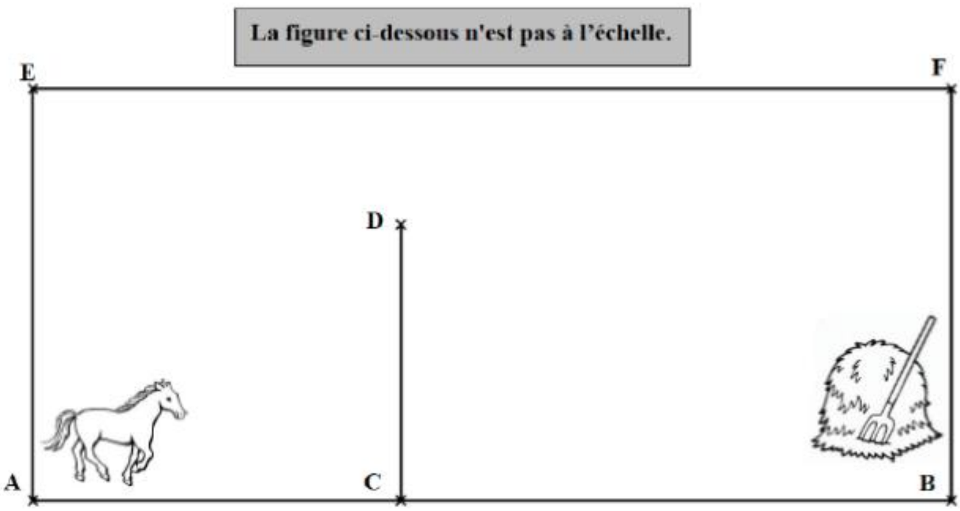
Après coup, les axes d'amélioration de cette évaluation seraient les suivants :

- Je supprimerai l'exercice 6. En effet, il intervient trop tôt pour mes élèves, la carte en fond les a perturbés.
- Je donnerai en préalable une petite feuille explicite sur ce qu'ils doivent connaitre et savoir faire.
- Pour les élèves encore en trop grande difficulté : uniquement des exercices sur le calcul de longueur d'une hypoténuse.

e) Séance 6

Problème tiré du site : https://www.maths974.fr

Dans l'enclos ABFE, Vincent attache un cheval au point A avec une corde de 25 m. [DC] représente une barrière que le cheval ne peut pas franchir. Pour aller jusqu'au point B, le cheval doit contourner cette barrière.
La corde est-elle assez longue pour que le cheval aille jusqu'au point B ?
Toute trace de recherche, même partielle, sera prise en compte dans l'évaluation.



On donne : AC = 8 m, AE = 8 m, DC = 6 m et BC = 12 m.
AEFB est un rectangle et la barrière est perpendiculaire à [AB].

Retour au sommaire

Exemple de rédaction d'une élève de la classe de 4éme/3éme

On donne : AC = 8m, AE = 8m, DC = 6m et BC 12m
AEFB est un rectangle et la barrière est perpendicul
à [AB].

A et D	D et B
$8 \times 8 = 64$	$6 \times 6 = 36$
$6 \times 6 = 36$	$12 \times 12 = 144$
$64 + 36 = 100$	$36 + 144 = 180$
$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{180} \approx 13,41$

La somme du grand carré et égale à la somme des deux autres petit carrés.

A et B mesure 10m
D et B mesure environ 13,41.

Oui la corde et assez longue car elle fait 23,4 mètre.

En amont, j'ai laissé le temps aux élèves de réfléchir seuls à ce problème. J'ai pu constater qu'ils avaient des difficultés à cerner ce qu'ils devaient chercher. Nous avons repris la fiche méthodologie pour résoudre un problème (réalisée lors de la première période cf annexe 1). Puis, au tableau, un élève est venu ajouter des informations supplémentaires au schéma telles que les segments [AD] et [DB], les mesures de certains segments. Les élèves encore en difficulté ont repris la leçon sur le théorème de Pythagore pour revoir la méthode, un petit groupe a réussi à faire seul.

Dans l'exemple ci-dessus, il reste encore quelques axes de progrès comme :

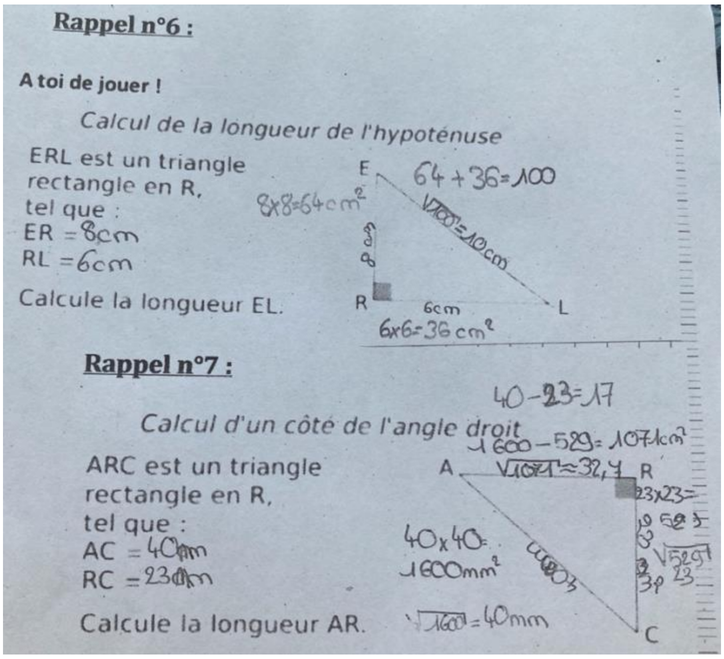
- expliciter l'utilisation du théorème de Pythagore ;
- faire un schéma pour que le correcteur comprenne la démarche ;
- citer la propriété exacte (omission du mot « aire »).

Dans l'ensemble, la démarche reste assimilée. Le résultat a pu être trouvé, ce qui est encourageant pour l'élève.

Retour au sommaire

f) Quelques rappels au cours de l'année

exemple de production d'un élève



Rappel n°6 :

A toi de jouer !

Calcul de la longueur de l'hypoténuse

ERL est un triangle rectangle en R, tel que :
ER = 8cm
RL = 6cm

Calcule la longueur EL.

64 + 36 = 100
8x8=64cm²
√100 = 10cm
6x6=36cm²

Rappel n°7 :

Calcul d'un côté de l'angle droit

ARC est un triangle rectangle en R, tel que :
AC = 40mm
RC = 23mm

Calcule la longueur AR.

40−23=17
1 600 − 529 = 1071cm²
√1071 ≈ 32,7
23x23=529
40x40=1600mm²
√1600 = 40mm

g) Annexe 1

Méthodologie : Les étapes pour résoudre un problème

Étape 1 : Lire l'énoncé

Je lis attentivement l'énoncé, si nécessaire je lis l'énoncé plusieurs fois.

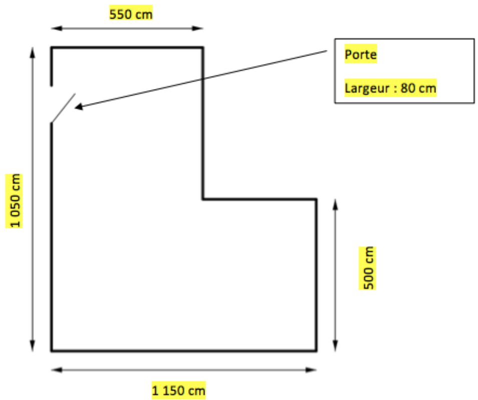
Étape 2 : Repérer ce que je cherche

Je **repère** dans mon problème **ce que je cherche,** je le **surligne** et je le **note** dans mon **cahier de brouillon.**

Exemple problème 1 :
« Le carreleur-mosaïste doit estimer la quantité de carrelage à poser ainsi que la longueur totale de plinthe ».

Étape 3 : Repérer les données utiles

Je **repère** les **données utiles** dans mon énoncé, je les **surligne** et je les **note** dans mon **cahier de brouillon**.



Retour au sommaire

Étape 4 : Chercher dans son classeur la leçon qui peut aider

Je **cherche** dans mon classeur, **quel a été le chapitre étudié** pour m'aider à résoudre le problème.

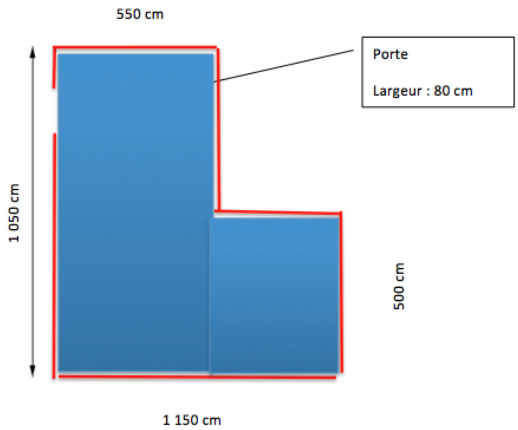
Exemple problème 1 : Chapitre sur les aires et les périmètres

Le carreleur-mosaïste doit estimer la quantité de carrelage à poser → aire

La longueur totale de plinthe → périmètre

Étape 5 : Faire un schéma/un dessin (éventuellement)

Je **construis** mon raisonnement en m'aidant éventuellement **d'un dessin ou d'un schéma.**

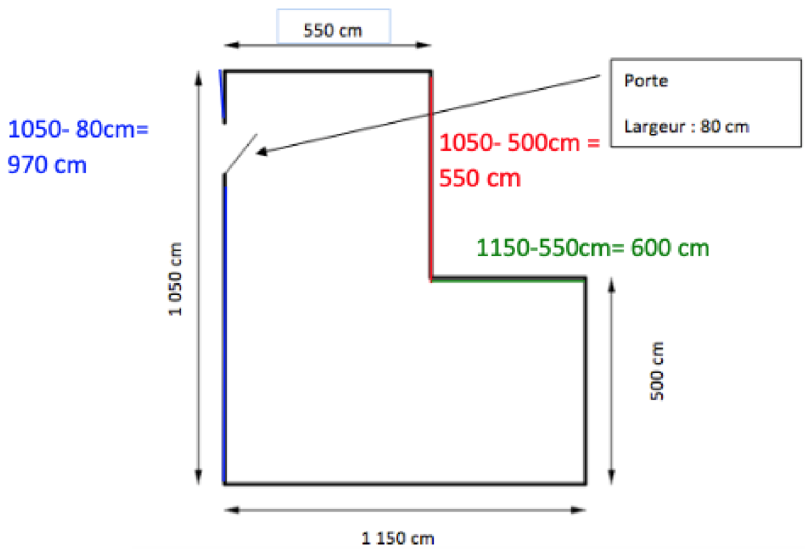


En rouge le périmètre
Attention il faudra enlever la porte

En bleu l'aire

Étape 6 : Écrire les calculs

J'écris le ou les **calculs** nécessaire(s) et je les **effectue.**



- **Pour calculer la longueur totale des plinthes**

Je trouve les valeurs qu'il me manque sur mon schéma.
Je déduis (-) la porte.
J'additionne toutes les valeurs :

550 + 550+600+ 500 + 1150+ 970 + 550 = 4870 cm

Retour au sommaire

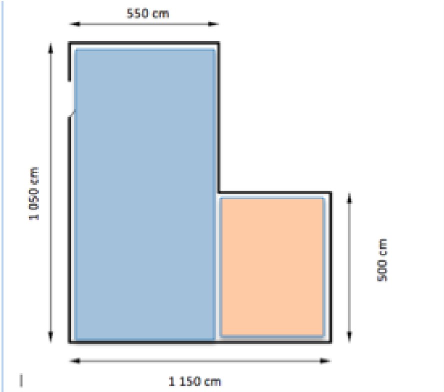
- **Pour calculer l'aire de la surface à carreler**

Il suffit de découper la figure en 2 rectangles et calculer l'aire de chaque rectangle.

Aire du rectangle bleu :
A = L x l
A = 550 X 1050
A = 577 500 cm^2

Aire du rectangle orange :
A = L x l
A = 550 X 600
A = 330 000 cm^2

Aire totale à carreler : 557 500 cm^2 + 330 000 cm^2 = 887 500 cm^2



Étape 7 : Se relire et rédiger une phrase réponse

- Je vérifie que la solution finale à mon problème est vraisemblable.
- Je rédige une phrase réponse. Elle doit être comprise par un camarade.
- L'aire de la surface à carreler est de 887 500 cm^2
- La longueur totale de plinthe à poser est de 4870 cm.

Bilan

À travers cette séquence, cela m'a permis en tant que jeune enseignante de :

- Travailler en collaboration avec l'équipe de Mathématiques, échanger sur les différentes pratiques afin de renforcer mon champ de compétences dans cette matière et ainsi renforcer ma pédagogie.
- Prendre confiance en moi car à la rentrée, je pensais qu'il me serait très difficile en tant que novice d'élaborer des séquences comprenant des compétences du cycle 4 en les menant de manière abordable et bien construites mathématiquement.

Pour mes élèves, cette séquence leur a permis :

- De retravailler différentes notions du cycle 3 et atteindre certaines compétences de cycle 4.
- De prendre confiance en eux car à la fin de cette séquence, certains se sentaient fiers de pouvoir dire qu'il réussissait à calculer une longueur à l'aide du théorème de Pythagore.
- D'acquérir une rigueur et de la méthodologie.
- D'avoir un autre regard sur le statut de l'erreur en mathématiques.

Retour au sommaire