TEXAS DERIVE-T-IL LES FONCTIONS ?

Par Jacques VERDIER

Dans la publicité des T.I.81, T.I.82 et autres T.I.85, vous pouvez lire « Tracé des fonctions dérivées ». Est-ce à dire que ces calculatrices sont capables de déterminer la fonction dérivée d'une fonction donnée ? Il n'en est rien (la calcul formel n'est pas encore intégré à ces calculatrices bon marché...) ; la seule possibilité est le calcul approché du nombre dérivé d'une fonction donnée, en un point x_0 donné, par la méthode dite de la « dérivée symétrique ».

§1. La « dérivée symétrique »

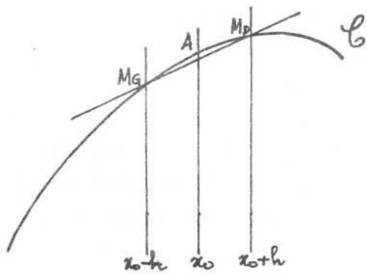
On a l'habitude de la définition suivante :
La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, elle est définie dans un voisinage de x_0, et si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe (et est finie). On note $f'(x_0)$ cette limite.
Définition équivalente : $f(x_0+h) = f(x_0) + a.h + h.\varepsilon(x_0,h)$, avec lim $\varepsilon(x_0,h)$ = lorsque $h\to 0$.
On a alors $a = f'(x_0)$.

On appelle dérivée symétrique de f en x_0 la limite en 0 (si elle existe et si elle est finie) de

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Interprétation graphique :

Soit ($\boldsymbol{C}$) la courbe d'équation $y = f(x)$, et les points A, M_G et M_D d'abscisses respectives x_0, x_0-h et x_0+h. La dérivée symétrique est la limite de la pente de la droite M_GM_D quand $h\to 0$.



Remarque : dans le cas d'une fonction polynôme du second degré, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, on démontre aisément que la droite M_GM_D est parallèle à la tangente en A, quelle que soit la valeur de h.

§2. Lien entre la dérivée "classique" et la dérivée symétrique

On peut démontrer le théorème suivant :

Si f est dérivable en x_0 (au sens "classique"), alors la dérivée symétrique existe et vaut $f'(x_0)$.

La réciproque est fausse.

Démonstration du théorème : il suffit de calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ en utilisant $f(x_0+h) = f(x_0) + a.h + h.\varepsilon(x_0,h)$.

La réciproque est évidemment fausse : une fonction comme $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, et pourtant $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ existe (et vaut $2h$).

§3. Pourquoi ce choix de la dérivée symétrique ?

Si on utilise le développement limité de f en x_0, on a :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + a.h + b.h^2 + c.h^3 + \ldots$$

et

$$f(x_0-h) = f(x_0) - a.h + b.h^2 - c.h^3 + \ldots$$

d'où : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a + bh + ch^2 + \ldots$

alors $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = a + ch^2 + \ldots$

Pour h « petit », le premier quotient vaut environ $f\,'(x_0) + bh$ (en première approximation), alors que le second vaut environ $f\,'(x_0) + ch^2$:

L'erreur commise avec la dérivée symétrique est en h^2, alors que l'erreur commise avec la forme "classique" est en h.

D'où, en utilisant cette forme « symétrique », une bien meilleure précision pour le calcul approché de $f\,'(x_0)$.

§4. La syntaxe sur les machines

<u>Sur la T.I.81</u> la syntaxe est NDeriv(fonction,h).

exemple 1 : NDeriv(x^3-x+1,1E-6) calcule une valeur approchée du nombre dérivé de la fonction $f(x) = x^3-x+1$, au point dont l'abscisse x_0 est rangée en mémoire X, avec $h = 10^{-6}$, selon l'expression donnée au §l.

exemple 2 : NDeriv(Y1,H) calcule une valeur approchée du nombre dérivé de la fonction stockée en Y1 , avec pour h valeur stockée en H.

<u>Sur la T.I.82/83</u> la syntaxe est nDeriv(fonction,variable,valeur,h) ou bien nDeriv(fonction,variable,valeur) ; dans le second cas, $h = 10^{-3}$ par défaut.

exemple 1 : nDeriv(X^3-X+1,X,5,1E-6) calcule une valeur approchée du nombre dérivé de la fonction $f(x) = x^3-x+1$, par rapport à la variable x, au point d'abscisse $x = 5$, avec $h = 10^{-6}$.

exemple 2 : nDeriv(3A^{2}V-A/2V,A,S) calcule une valeur approché du nombre dérivé (par rapport à la variable a) de la fonction à deux variables $f(a,v) = 3a^2v - \dfrac{a}{2v}$, pour la valeur a_0 stockée en S de cette variable a, avec $h = 10^{-3}$ (par défaut).

Bien entendu, nDeriv(x^3-X+1,X,X) correspond à une fonction (et peut être stockée en Yi), qui associe le nombre dérivé à chaque valeur prise par la variable X ... ce qu'on a coutume d'appeler fonction dérivée.
C'est cette fonction qui permet de « tracer la fonction dérivée ».

§5. Augmenter la précision en augmentant *h* ?

Le mode d'emploi de la T.I.81 (page 2-7) précise : « ***A mesure que h diminue, l'approximation devient plus précise*** ». Nous allons montrer sur un exemple que, contrairement à l'intuition, cette affirmation est fallacieuse.

Prenons par exemple $f(x) = Atg\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$ [Atg est la fonction 'Arc tangente'] dont la dérivée est $f'(x) = \frac{1-x^2}{x^2+(1+x^2)^2}$.

Au point $x_0 = \frac{1}{2}$, on a $f'(x0) = \frac{11}{29} \approx 0,41379310344828$.

Sur une T.I.81 on peut calculer (avec une précision de 10^{-13}) les valeurs de $f(x_0+h)$, $f(x_0-h)$, $d = f(x_0+h) - f(x_0-h)$ et $a = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ (c'est le nombre donné par nDeriv), pour des valeurs de h de plus en plus petites.

On obtient le tableau suivant :

h	$f(x_0+h)$	$f(x_0-h)$	d	a
10^{-1}	0,4154920959408	0,3320594675429	0,0834326283979	0,4171631419895
10^{-2}	0,3845771148209	0,3763005666629	0,0082765481580	0,4138274079
10^{-3}	0,3809194951727	0,3800919082796	0,0008275868931	0,41379344655
10^{-4}	0,3805747496692	0,3804649910478	0,0000827586214	0,413793107
10^{-5}	0,3805105149759	0,3805022391138	0,0000087258621	0,413793105
10^{-6}	0,3805067909048	0,3805059631860	0,0000008275862	0,4137931
10^{-7}	0,3805064184917	0,3805063357330	0,0000000827587	0,4137935
10^{-8}	0,3805063812503	0,3805063729744	0,0000000082759	0,413795
10^{-9}	0,3805063775261	0,3805063766986	0,0000000008275	0,41375
10^{-10}	0,3805063771537	0,3805063770710	0,0000000000827	0,4135
10^{-11}	0,3805063771165	0,3805063771082	0,0000000000083	0,415
10^{-12}	0,3805063771128	0,3805063771119	0,0000000000009	0,45
10^{-13}	0,3805063771124	0,3805063771123	0,0000000000001	0,5
10^{-14}	0,3805063771124	0,3805063771124	0	0

On constate que (au moins à partir d'un certain rang) plus h est petit, plus la différence d s'approche de 0 et (la machine ne travaillant qu'avec 13 chiffres significatifs) plus la valeur calculée a s'éloigne de $f'(1/2) = 12/29$. C'est ce qu'on appelle les « effets de bord » : **on n'a donc pas du tout intérêt à prendre *h* trop petit**. Dans l'exemple ci-dessus, la meilleure valeur approchée a été obtenue pour $h = 10^{-5}$.

Pour travailler cela avec des élèves de première, on pourrait prendre un exemple plus simple : calcul de $f'(x_0)$ pour $f(x) = x^2$ au point $x_0 = 1/6$ (la valeur exacte étant 1/3).

L'instruction nDeriv(X^2,X,1/6,H) sur T.I.82/83 donnera zéro à partir de $h = 10^{-15}$. Dans ce dernier exemple, cependant, les premières valeurs calculées sont très précises : voir remarque à la fin du §l.

§6. Les « pièges » de nDeriv

Outre les effets de bord signalés ci-dessus, les difficultés d'utilisation viennent du fait que la réciproque du théorème énoncé au §2 est fausse.

En effet, si on calcule à la machine nDeriv(1/X,X,0) on obtiendra 1 000 000.
Explication : soit $f(x) = 1/x$, et $h = 10^{-3}$; $f(x_0+h) - f(x_0-h) = 10^{-3} - (-10^{-3})$, ce qui donne $a = 10^{-6}$. De là à conclure que la dérivée en 0 de $1/x$ vaut 1 000 000 (ou même qu'elle est infinie), il y a un pas qui sera vite franchi par les élèves.

Cela montre qu'il faudra « travailler » ce sujet en classe, au moins dans les sections scientifiques. Pour que les élèves n'aient plus une confiance aveugle en leur calculatrice, il faut qu'ils disposent de référents théoriques leur permettant de dire « Ce que ma calculatrice affiche actuellement est aberrant, pour telle et telle raison ».

L'idée de cet article m'est venue parce que j'avais donné en exercice à mes élèves de 1ère S l'énoncé suivant, extrait du manuel Terracher (Hachette) :

> 47 Représenter graphiquement la fonction f :
>
> $f(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$ sur l'intervalle]-1 ; +∞[, et tracer la tangente à l'origine. En déduire la courbe représentative de $x \to |f(x)|$ en précisant les demi-tangentes à l'origine.

et après que certains de ces élèves, heureux possesseurs d'une TI-82, avaient trouvé comme pente de la tangente à l'origine (pour $y = |f(x)|$) la valeur $a = -0{,}002$. Ce résultat m'a intrigué, et j'ai voulu comprendre d'où il « sortait ».

Bibliographie

Manuels d'utilisation de TI-81, TI-82, TI-83, *voir annexe ci-dessous*.
Cours de mathématiques de DEUG B, par Yvon NOUAZÉ (Université de Montpellier II), 1992.
Revue Repères-IREM n° 21. Mathématiques et calculatrices en DEUG B 1ère année (par Yvon Nouazé).