LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 39	SEPT. 1994	Abonnement 4 n^{os} par an : 30 F

BIBLIOTHÈQUE

DE LA RÉGIONALE

Nous vous rappelons brièvement le principe de fonctionnement de notre bibliothèque de prêt par correspondance (réservée aux adhérents A.P.M.E.P. lorrains, à jour de leur cotisation) :

1. Choisissez l'ouvrage désiré dans la liste ci-dessous

2. Contactez Marie-Laure SALGUES
1 rue des Lilas
57050 LE BAN SAINT-MARTIN
par courrier, ou par téléphone : 87.32.58.55

Si l'ouvrage est disponible, il vous sera expédié aussitôt.

3. Vous pouvez conserver l'ouvrage 3 semaines, voire même un peu plus si personne ne le réclame après vous.

4. Le retour de l'ouvrage se fera à la demande de Marie-Laure :
- soit en l'expédiant au lecteur suivant (dont elle vous aura communiqué l'adresse) ;
- soit en le lui retournant directement.

Cela ne coûte donc que les frais d'expédition du retour.

LISTE DES OUVRAGES DISPONIBLES

N°1. **Preuves et réfutations**, de Imre LAKATOS.

N°2. **Formes optimales en mathématiques**, de S. HILDENBRANDT et A. TROMBA.

N°3. **L'univers mathématique**, de Ph. DAVIS et R. HEISEL.

N°4. **Aventures mathématiques**, de M. de GUZMAN.

N°5. **Et pourtant ils ne remplissent pas N**, de C. LOBRY.

N°7. **Moyens d'apprendre sûrement et avec facilité**, du Marquis de CONDORCET.

N°8. **Les mathématiques au fil des âges**, de J. DHOMBRES.

... suite page 23 ...

ÉDITORIAL

été 94

Lu dans "*Le Monde*" à l'occasion des deux médailles Fields françaises, Pierre-Louis LIONS et Jean-Christophe YOCCOZ :
En un peu moins d'un demi-siècle, la France aura récolté sept médailles Fields sur les trente huit qui ont été décernées. Un peu moins d'une sur cinq. C'est pour dire la place de tout premier ordre occupée par le pays de Pascal, de Fermat, de Galois, et autres Poincaré, dans le concert mathématique mondial. Et ce, depuis longtemps.

été 94

Les crédits de fonctionnement des I.R.E.M. risquent fort d'être réduits dramatiquement, pour raison de rigueur budgétaire. Combien de médailles Fields pour le pays de Pascal, Fermat, Lions et Yoccoz, dans vingt ans ?

Pol LE GALL

N.D.L.R. Voir au dos l'appel du collectif "Défense des I.R.E.M."

APPEL DU COLLECTIF "DÉFENSE DES IREM"

De récentes restrictions budgétaires ont réduit de moitié les crédits de fonctionnement des commissions inter-IREM mettant gravement en cause leur travail et leur existence même.

Les 26 IREM fonctionnent en réseau, favorisant les échanges, la diffusion de l'innovation, la promotion et la diversité des recherches dans les différents IREM. Les Commissions sont des éléments essentiels de ce réseau. Elles s'appuient sur les équipes locales, coordonnent et stimulent leurs travaux ; elles sont le moteur des recherches pédagogiques menées dans les IREM et des formations qui y sont données.

Cette diminution drastique du budget des commissions remet en question quelques aspects spécifiques de l'activité des IREM :

- la réflexion à long terme sur l'enseignement des mathématiques et les relations des mathématiques avec les autres disciplines,

- le travail en commun d'enseignants des différents ordres d'enseignement (élémentaire, secondaire, supérieur).

L'histoire de ces dernières années a montré que les retombées du travail accompli par les IREM profitent à un grand nombre d'enseignants et à l'école toute entière : en particulier, les IREM ont pu prendre en charge la réponse à certaines commandes du Ministère de l'Education Nationale.

De nombreux enseignants étrangers voudraient mettre en place des structures analogues dans leur pays ; certains pays sont en train de le faire, ainsi la Belgique.

Un Collectif "Défense des IREM" s'est mis en place lors du colloque inter-IREM de Géométrie (16-17-18 juin 1994} : il a alerté la communauté mathématique française et internationale et a déjà reçu de nombreuses lettres de soutien.

La Régionale Lorraine de l'AP.M.E.P. s'associe à la demande du "Collectif de réexamen de cette décision budgétaire.
Voté **à l'unanimité** lors du Comité du 21.09.94.

LE QUESTIONNAIRE DE LA REGIONALE EN DIRECTION DES NOUVEAUX COLLEGUES

La Régionale a souhaité enquêter auprès des collègues sortis de l'IUFM de Lorraine en juin 93 et nommés, soit dans l'académie de Nancy-Metz, soit dans une autre académie, dans le but de savoir :
- d'une part comment ils ont ressenti la formation qui leur avait été dispensée à l'IUFM
- d'autre part, comme ils ont vécu leur première année d'enseignement en autonomie.

59 néo-certifiés ou agrégés de mathématiques sont sortis de l'IUFM de Lorraine en 1993, mais nous n'avons pu envoyer le questionnaire qu'à 34 d'entre eux (certains étant au service national, d'autres n'ayant pas d'affectation indiquée, ou leur affectation étant inexacte, eue). Parmi ces 34 questionnaires, 10 sont revenus avec la mention "inconnu", et finalement nous n'avons eu que 7 réponses utilisables (ce faible nombre peut s'expliquer par l'envoi tardif du questionnaire, ainsi que par le fait que les destinataires n'avaient pas été sensibilisés). Néanmoins les renseignements obtenus, pour partiels qu'ils soient, ne sont pas sans intérêt.

Tous les 7 sont certifiés ; 5 d'entre eux ont préparé le CAPES à l'IUFM, 6 enseignent en collège (dont un en délégation rectorale) et un en lycée.

I- La formation à l'IUFM :

La préparation au CAPES leur a paru utile, mais ils déplorent le "flou" officiel relativement à l'épreuve professionnelle (juin 1992), épreuve aujourd'hui remplacée par l'épreuve "sur dossier".

La seconde année d'IUFM leur a, elle aussi, semblé globalement utile, et en particulier les stages (en responsabilité comme de pratique accompagnée). Plus précisément, le fait d'effectuer ce dernier stage dans le cycle où l'on n'a pas la classe en responsabilité leur a paru très positif.

(La question de la formation des agrégés est posée.)

C'est au niveau de la formation pédagogique que se manifeste un certain malaise: la formation est ressentie comme trop abstraite ("utopique"), et déconnectée de la pratique réelle des classes. Réaction analogue vis-à-vis de certains modules, dans lesquels les exposés sont trop ponctuels et trop abstraits, ou dans lesquels on les considère, non comme des enseignants, mais comme des élèves.

La plupart auraient souhaité recevoir une formation sur le thème "Comment enseigner à un public "difficile" (ZEP, élèves en difficulté, etc.)?"

2- La première année d'enseignement :

Ils sont unanimes à dire que la prise de contact avec leur établissement a été bonne, mais regrettent l'absence de réelle équipe pédagogique: les contacts restent au niveau individuel. Le fait d'être plusieurs néo-certifiés dans le même établissement favorise la communication, car elle crée une solidarité entre eux.

Ils recherchent l'aide d'un collègue expérimenté, mais pas forcément sous forme institutionnelle; d'autre part, ils auraient souhaité travailler en équipe, mais se sont heurtés à la réticence de leurs collègues.

En ce qui concerne les manuels, ils n'ont eu aucune difficulté à se les procurer. Ce qu'ils y recherchent: essentiellement des activités, des TD et des exercices (mais ils les utilisent moins pour le cours). Ils consultent d'autres manuels ou brochures, dans le but de trouver des activités originales et de varier leur enseignement (deux d'entre eux précisent qu'ils utilisent le livre du maître).

Tous disent consulter fréquemment les programmes des niveaux où iîs enseignent, ainsi que ceux de la classe précédente et de la classe suivante. Ils ont tous établi une progression au début de l'année, mais ont eu des difficultés pour la respecter, à cause du niveau de leurs élèves et/ou de la gestion du temps.

C'est surtout au début de l'année qu'ils ont eu le plus de travail: élaboration des premiers devoirs, correction des premières copies; de plus, l'un d'entre eux n'a connu ses classes que lors de la prérentrée. La période des conseils de classe est aussi perçue comme lourde.

Pour eux, la séquence-type se compose ainsi: activités + cours + exercices. Deux d'entre eux ont pratiqué les travaux de groupe, et un autre a fait travailler ses élèves sur ordinateur. Tous sont satisfaits de leur pratique, et la reconduiront.

En ce qui concerne l'évaluation des élèves, elle est essentiellement sommative; tous cherchent à évaluer les connaissances et les savoir-faire, mais certains s'intéressent également à la rédaction, aux méthodes ou à la progression de l'élève.

Les conseils qu'ils donneraient à un jeune collègue :

- concernant la pratique de la classe : bien s'organiser dès le début de l'année, prendre du recul par rapport aux difficultés rencontrées, ne pas se décourager et accepter de se remettre en question.

- concernant les relations professionnelles: oser demander conseil et discuter avec les autres collègues, s'efforcer de s'intégrer à la vie de l'établissement.

…/…

En conclusion, il ressort de ces réponses que la formation reçue à l'IUFM est perçue comme globalement positive, et prépare convenablement les jeunes certifiés à débuter dans le métier (la formation pédagogique, cependant, gagnerait à être un peu plus proche des réalités du terrain). Dans leur établissement, ils souhaiteraient avoir de meilleurs contacts avec leurs collègues et travailler en équipe.

Au vu de ces résultats, nous comptons reconduire ce questionnaire (légèrement modifié) l'an prochain, et organiser à la rentrée un accueil spécifique des jeunes collègues nouvellement nommés dans l'académie.

M. Fabregas et B. Parzysz

I.R.E.M.

Groupe "**Histoire des mathématiques**" (animé par Bernard Parzysz)
Voir informations dans Petit Vert n°38 page 11
Première réunion vendredi 18 novembre à 14 heures.

Groupe "**Calculatrices graphiques**" (animé par Jacques Verdier)
Voir informations dans Petit Vert n°37 page 23
Première réunion le vendredi 25 novembre à 14 heures.

Par ailleurs, la brochure "**ENSEIGNER LES PROBABILITÉS AU LYCÉE**", réalisée l'an passé par le groupe "Probabilités" après deux années de recherche, est en vente à l'IREM pour la modique somme de 30 F.
Un exemplaire sera envoyé, à titre de spécimen, au professeur coordinateur de chaque lycée de l'académie : veillez à ce qu'il "circule" bien parmi vos collègues de première et de terminale.

A.P.M.E.P. LORRAINE

JOURNEE REGIONALE DES MATHEMATIQUES

C.R.D.P. DE NANCY, MERCREDI 18 JANVIER 1995

Planning de la Journée :

9 heures : Accueil au C.R.D.P. de NANCY (99 rue de Metz)

9 h 30 à 11 h : **ATELIER** au choix (voir ci-après)

11 h à 12 h 30 : **ATELIER** au choix (voir ci-après)

14 h 30 à 16 h 45 : Conférence de Monsieur Gérard MATHIEU, Maître de Conférences à l'Université, Henri Poincaré, (NANCY-I)

FONCTIONS ARITHMETIQUES.

On se proposera de décrire et d'étudier quelques fonctions permettant de répondre aux questions suivantes (après leur avoir donné, un sens) :

- Combien un nombre entier a-t-il de diviseurs ?
- Combien un nombre entier a-t-il de diviseurs premiers ?
- Combien y a-t-il de manières d'écrire un nombre comme somme de deux carrés ?
- Combien de manières d'écrire un nombre entier comme somme de nombres entiers ?

17 h : **Assemblée Générale** annuelle de la Régionale A.P.M.E.P. (avec élection du nouveau Comité), suivie d'un "**pot d'accueil**" des nouveaux.

19 h : première réunion du nouveau Comité (repas de travail).

REPAS :

Les repas seront pris au Foyer de Jeunes Travailleurs du Grand Sauvoy de MAXEVILLE (environ 500 m à pied du C.R.D.P.).
Prix du repas : 25 Francs. Il est nécessaire de **s'inscrire à l'avance** pour ce repas (chèque à joindre à l'inscription).

LISTE DES ATELIERS :

La liste des ateliers n'est pas encore complète, et nous lançons d'ailleurs un appel aux militants de l'Association pour qu'ils veuillent bien en prendre en charge.

Citons quelques thèmes dont on est sûr qu'ils seront d'ores et déjà proposés :

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES : l'évolution du dessin dans les ouvrages de géométrie de l'espace du XVII^{e} siècle à nos jours (animé, par Bernard PARZYSZ).

L'UTILISATION DE L'ORDINATEUR DANS LA DEMONSTRATION MATHEMATIQUE (animé, par l'équipe du Centre de Ressources Informatiques).

EXPLOITATION EN CLASSE DE JEUX ET DE CASSE-TETES (animé, par François DROUIN et Marie-José BALIVIERA).

L'EVALUATION DES NOUVEAUX PROGRAMMES DE PREMIERE : résultats de EVAPM1 (animé, par Michel BARDY).

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN RUSSIE (animé, par quelques uns des membres de la Régionale qui seront allés en Russie à la Toussaint).

LES "NOUVELLES" FAÇONS DE TRAVAILLER LES MATHS A L'ECOLE ELEMENTAIRE : quelques exemples d'activités intéressant aussi bien les collègues du collège que ceux de l'école ,élémentaire (animé, par Jacqueline EURIAT).

APPEL

Si vous désirez animer un atelier (durée : 1 h 30) dans le cadre de cette Journée Régionale des Mathématiques, prenez immédiatement contact par écrit ou par téléphone avec Jacques VERDIER, 15 rue de Château-Salins à NANCY, 83.32.39.64.

MERCI D'AVANCE

bulletin d'inscription
au dos de cette page

BULLETIN D'INSCRIPTION

A retourner à Michèle FABREGAS, 4 rue Foës, 57070 METZ,
au plus tôt, et en tout cas avant le 1er décembre.

Les personnels en activité, seront inscrits par nos soins au stage 93RCA750V auprès de la MAFPEN et recevront un ordre de mission sans frais, les autorisant à s'absenter le mercredi 18 janvier, et les couvrant en cas d'éventuel accident de trajet.

NOM Prénom

Adresse personnelle

Etablissement d'exercice

Code personnel de formation (8 chiffres et une lettre) :

Numéro INSEE+clé, :

Le choix des ateliers sera fait après parution du PETIT VERT de décembre, qui les présentera tous.

REPAS :

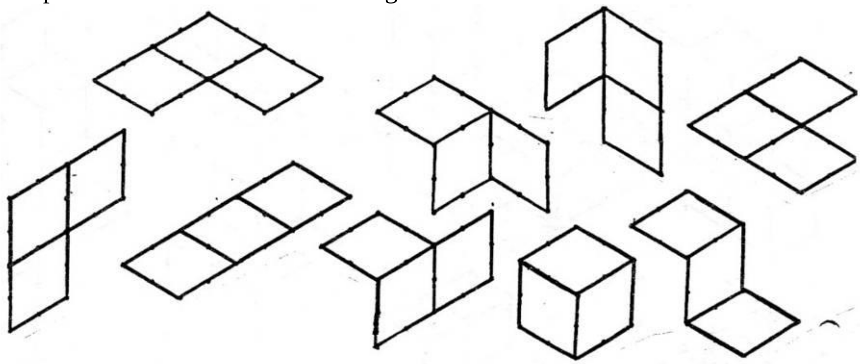
Prendra le repas au F.J.T. : OUI (1) NON

(1) Dans ce cas, joindre un chèque de 43 F à l'ordre de A.P.M.E.P.-Lorraine.

les neuf trilosanges

par François DROUIN
Collège « Les Avrils »
55300 SAINT MIHIEL

Voici les neuf assemblages possibles de trois losanges superposables dont les angles mesurent 60° et 120°.
Construisez-les en carton, en bois, en plastique... en traçant sur les deux faces des pièces les limites des trois losanges :

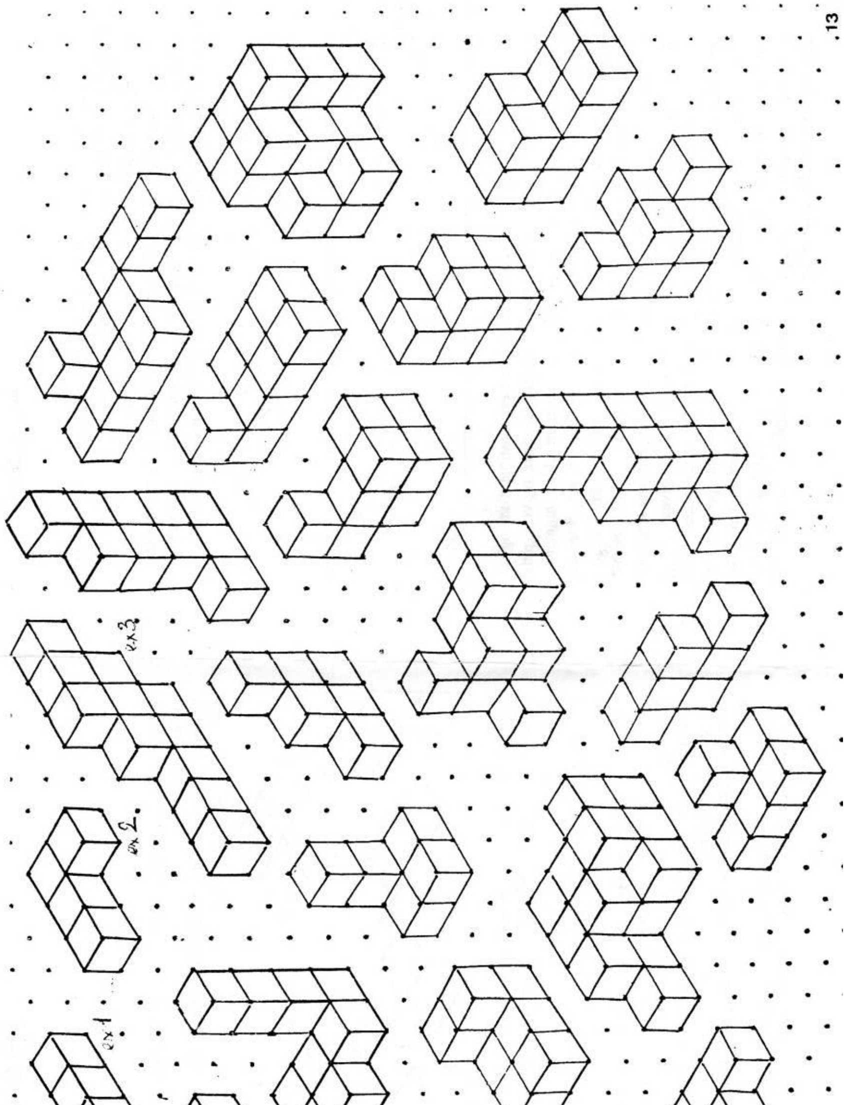


Avec les trilosanges, il est possible de réaliser certains assemblages de cubes vus en perspective, chaque pièce n'étant utilisée qu'au plus une fois (voir certaines figures sur la page suivante).

Quelques problèmes à résoudre...

★ Chercher un assemblage de cubes réalisé avec les neuf trilosanges.
★ Quel est le plus grand <u>assemblage plat</u> (voir exemples n° 1, 2 et 3 page suivante) représentable avec les 9 trilosanges ?
★ Trouver tous les assemblages dont le pourtour est un hexagone de côté deux fois le côté du losange unitaire.
★ Trouver le plus grand assemblage possible possédant au moins un élément de symétrie.
★ Trouver un assemblage des 9 pièces recouvrant un hexagone de côté trois fois le côté du losange unitaire, et représentant un empilement de cubes vus en perspective.
★ Etc.

Voir figures page suivante


ex 1
ex 2
ex 3
13

En attendant ils sont là et je suis là

S'il fallait que j'attende d'avoir bien compris les subtiles distinctions entre pédagogie et didactique, s'il fallait attendre qu'ils aient construit un sens à leur présence ici et maintenant avec moi, s'il fallait attendre que moi aussi j'en aie construit un, s'il fallait attendre l'invention du dénoyauteur à tête chercheuse capable d'extraire les objectifs-noyaux du fatras des programmes, s'il fallait qu'ils en aient fini avec leur soi-disant crise d'ados confrontés à une soi-disant crise de société, s'il fallait vraiment attendre, je ne serais pas prêt d'être sur le point de commencer à démarrer.

Alors, en attendant, je fais - semblant, parfois. Je fais le méchant, le grognon, le râleur. Je fais ; mais je le fais mal, le sévère mais juste. Non pas que je sois injuste, mais c'est du côté de la sévérité que c'est approximatif. Je fais aussi dans le spectacle. Je ne rate jamais un bon mot. Je fais dans le naturel. Je dis quand c'est bien, quand je suis satisfait d'eux, de nous, de moi. Et je peste quand ça ne va pas. Bref, j'essaie de faire en sorte d'être moi-même comme si, dès que l'on se pose la question de l'être ou pas, forcément on ne l'est plus.

Je fais.

Mais le pire tout de même, si on m'avait dit ça, et ne le répétez pas à ma mère qui me prend pour un pédagogue avancé, le pire, donc, c'est que je fais dans le cours magistral. Oui, bien sûr, je mets de fleurs autour, j'utilise le rétroprojecteur, ce qui met de la couleur dans leur matinée, ai-je pu lire dans un bilan, je les fais travailler par groupes de deux, homogènes ou hétérogènes suivant les cas. Je lance alors des pistes de réflexion ou, prosaïquement, des exercices. Mais rapidement je reprends les choses en main.

Mais ça, c'est en attendant ; car j'ai une excuse en béton : je suis nouveau dans l'établissement et béotien en tant que prof de lycée. Alors il me faut bien un temps d'adaptation. Il faut bien que je m'approprie le programme derrière lequel je cours comme un débutant.

En attendant, je pense au débutant, au vrai. Comment fait- il donc en attendant d'être chevronné ? Comment ai-je donc fait moi, en débutant ? Sans doute que je faisais avant de me poser des questions, alors que maintenant c'est souvent l'inverse. Et la seule, qui n'est toujours pas résolue, c'est la sempiternelle « Tout ça c'est bien beau, mais qu'est-ce que je fais demain matin ? ».

Jean- Claude PAUL
12/04/94

Rosaces (3)

Suite des numéros précédents

Bernard PARZYSZ

Un autre type de remplage – c'est le terme technique – des verrières de la cathédrale de Metz apparaît digne d'intérêt : c'est celui de la *fig. 14,* qui coiffe en particulier les verrières des bas-côtés de la nef.
N.B. Les trois cercles qui figurent dans ce remplage sont agrémentés chacun de 6 arcs de cercle qui leur sont tangents intérieurement, comme décrit plus haut dans le présent article, arcs de cercle qui ne seront pas représentés ici.

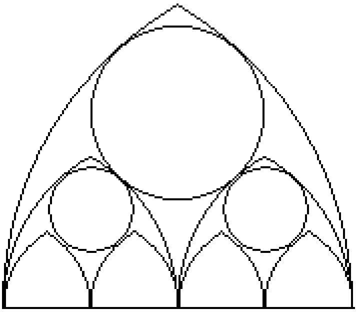


fig. 14

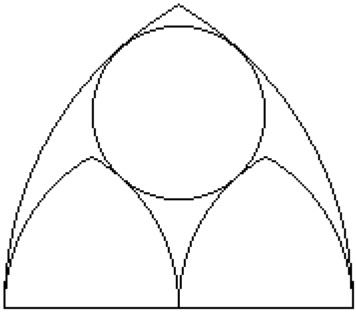


fig. 15

Le motif sur la base duquel est construite la *fig. 14* est constitué (*fig. 15*) d'une ogive en tiers-point à l'intérieur de laquelle sont placées deux ogives du même type et de taille moitié, ayant même base, tangentes entre elles et tangentes à la grande ogive. Enfin, un cercle est tangent intérieurement aux côtés de la grande ogive et extérieurement aux côtés des petites ogives qui sont les plus proches de l'axe de la configuration. On pourrait d'ailleurs décrire ce motif plus simplement comme dérivé du motif étudié plus haut, les deux petits demi-cercles étant ici remplacés par deux ogives.

Ce motif est fréquent dans les églises gothiques ; on le trouve en particulier à Amiens et à Reims. Sa réalisation est nettement plus simple que celle des deux motifs précédemment étudiés, comme nous allons le voir. Au départ, on trouve le tracé des ogives, qui n'offre aucune difficulté, puisqu'il s'agit en fait de la classique construction au compas du triangle équilatéral[1]. Reste celle du cercle tangent aux 4 arcs de cercle.

[1] On la trouve en particulier dans le premier livre des *Éléments* d'Euclide (proposition 1).

Commençons donc par nommer les éléments dont nous aurons besoin (*fig. 16*).

[AB] la base de la grande ogive et S son sommet
I le milieu de [AB]
s et s' les sommets des deux petites ogives
C (resp. C') le cercle support de l'arc AS (resp. BS)
γ le cercle support des arcs As et Bs'
γ_1 (resp. γ_2) le cercle support de l'arc Is (resp. Is')

Les cercles C et $\gamma 2$ sont centrés en B, les cercles C' et γ_1 sont centrés en A, le cercle γ est centré en I.

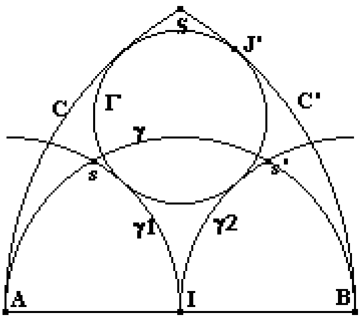


fig. 16

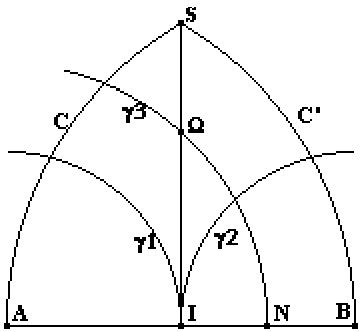


fig. 17

Il s'agit donc de construire un cercle Γ tangent intérieurement aux cercles C et C', et extérieurement aux cercles γ_1 et γ_2. Ou encore, en tenant compte de la symétrie de la figure, de construire le cercle Γ tangent intérieurement à C' et extérieurement à γ_1 (par exemple), et de plus centré sur [IS]. Si nous ne tenons par compte de cette dernière contrainte, et en remarquant que C' et γ_1 sont concentriques, le lieu du centre Ω du cercle Γ est le cercle γ_3 de centre A passant par le milieu N de [IB]. Le point Ω peut donc être obtenu comme intersection de ce cercle avec [IS] (*fig. 17*).

Remarquons d'ailleurs que **la figure peut aisément être construite au compas seul**, sur la donnée du segment [IN] (*fig. 18*).

1° On détermine d'abord le symétrique B de I par rapport à N (« demi-hexagone » inscrit dans le cercle de centre N passant par I (*fig. 19*), puis de même le symétrique A de B par rapport à I et le symétrique M de N par rapport à I.

2° On construit ensuite les cercles C (de centre B, passant par A) et C' (de centre A, passant par B), qui fournissent les côtés de la grande ogive.

3° On trace les cercles γ (de centre I, passant par A) et γ_1 (de centre A, passant par I), et symétriquement le cercle γ_2, qui donnent les côtés des deux petites ogives.

4° On trace enfin les cercles auxiliaires γ_3 (de centre A, passant par N) et γ_4 (de centre B, passant par M), dont l'intersection fournit le centre Ω du cercle cherché. Quant au rayon de ce cercle, il est égal à IN, ce qui permet d'achever la construction de Γ.

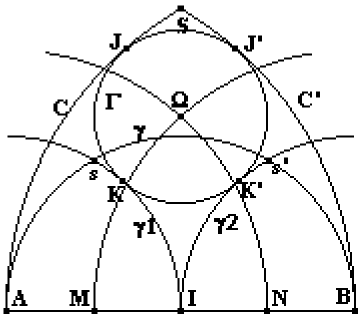


fig. 18

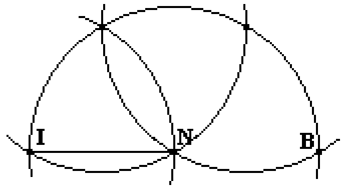


fig. 19

Remarquons au passage que, d'après la *fig. 18,* les points de contact de Γ avec les cercles C' et γ_1 (soit respectivement J' et K) sont alignés sur (AΩ) et que, symétriquement, les points de contact de Γ avec les cercles C et γ_2 (soit respectivement J et K') sont alignés sur (BΩ).

Cependant, la facilité d'exécution de cette figure n'est pas, à mon avis, son principal mérite. Comme on peut le constater sur la *fig. 14,* ce motif apparaît trois fois en grand dans l'ogive principale, et aussi deux fois à l'échelle ½. En effet, on passe du grand motif à l'un des petits par une homothétie de rapport ½ et de centre A ou B, selon le cas.

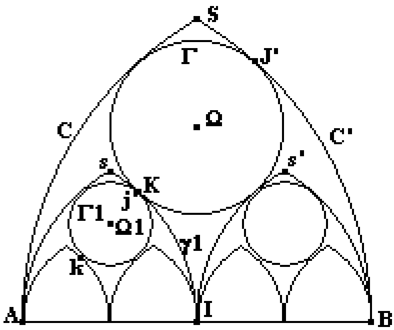


fig. 20

Soit maintenant le cercle Γ_1, analogue de Γ dans la petite ogive de base [AI]. Appelons Ω_1 son centre, et j' et k les points de contact respectifs de Γ_1 avec les cercles analogues de C' et γ_2 (*fig. 20*). Ces points sont les images respectives de J' et K dans l'homothétie de centre A et de rapport ½, donc j' = K. Ce qui démontre en outre l'alignement des 6 points A, Ω, J', K, Ω_1 et k.

Allons plus loin… La présence des 4 petites ogives « vides » de la fig. 14 suggère l'idée d'une itération du processus suivant (*fig. 21*). Partant d'une ogive vide (niveau 0), on la transforme en le motif de la *fig. 15* (niveau 1), et on itère ensuite le même processus *ad libitum*.

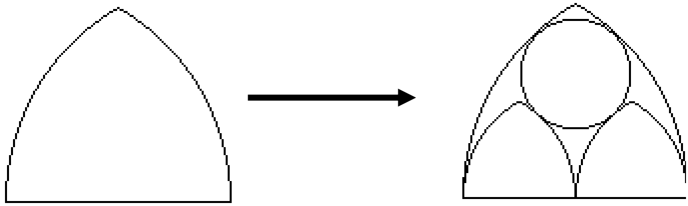


fig. 21

On obtient ainsi une courbe qui peut être parcourue sans lever le crayon. En effet, prenons par exemple la figure de niveau 2, qui n'est autre que celle du remplage des verrières de Metz (*fig. 22*).

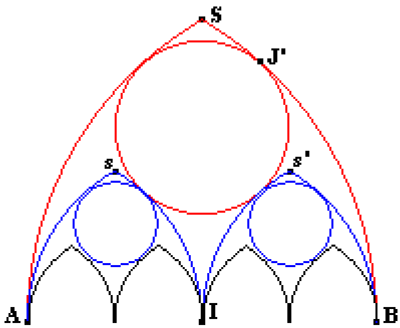


fig. 22

Partant du point A, on peut décrire (en rouge) l'arc AS, puis l'arc SJ', puis le cercle Γ (retour en J'), puis l'arc J'B. On décrit ensuite successivement (en bleu), de façon analogue mais dans l'autre sens, les deux ogives Bs'I et IsA avec leurs cercles inscrits. On est alors prêt à repartir dans le sens initial le long des 4 ogives inférieures, et l'on voit ainsi que ce trajet peut se poursuivre indéfiniment.

…/…

Quelle est la longueur de cette courbe ?

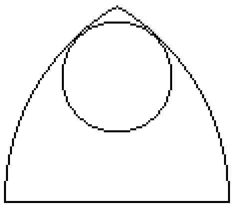
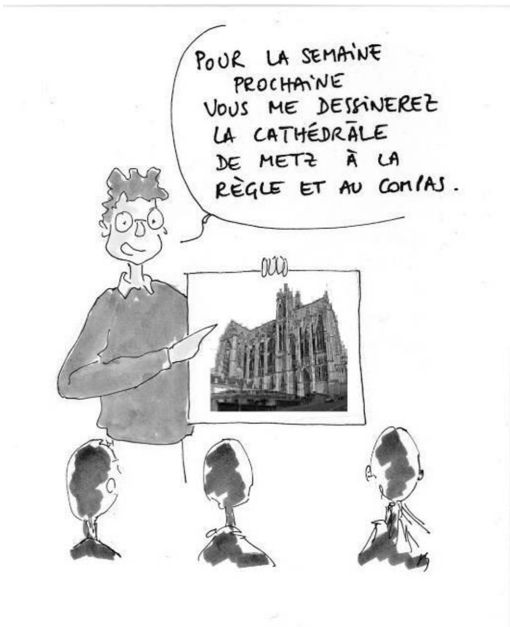


fig. 23

Considérons le motif « ogive + cercle » (*fig. 23*). Il est réalisé une fois au niveau 1, deux fois (mais à l'échelle moitié) au niveau 2, … et 2^{n-1} fois (à l'échelle$2^{-(n-1)}$ au niveau *n*. Puisqu'au niveau *n* on ajoute 2^{n-1} motifs dont la longueur est 2^{n-1} fois plus petite que celle du motif initial, on ajoute à chaque niveau une longueur égale à celle du motif de départ. Ce qui signifie qu'au niveau *n* on a déjà n fois la longueur du motif initial, et donc que la longueur de la courbe est infinie.

Les bâtisseurs des cathédrales gothiques ont-ils eu l'intention, par l'utilisation de ce motif, de suggérer l'idée de l'infini divin ? Il serait téméraire de l'affirmer, mais il n'en demeure pas moins que cette figure médiévale, aisément constructible au compas seul et consistant en la reproduction à différentes échelles d'un même élément de base, peut passer à juste titre pour un lointain ancêtre des courbes fractales.



(dessin de Pol Le Gall)

Problème du trimestre n°39, de septembre 1994

La « tourniquette »

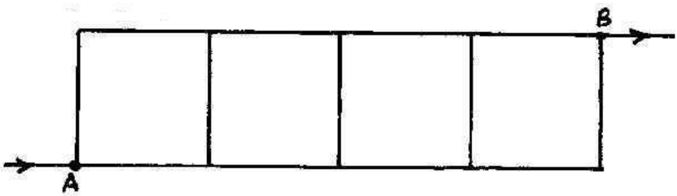
Sur une conique (***C***) on choisit quatre points **quelconques** A_0, A_1, A_2 et A_3. On construit les points A_4, A_5 et A_6 (***C***) de façon à avoir $(A_3A_4)//(A_0A_1)$, $(A_4A_5)//(A_1A_2)$ et $(A_5A_6)//(A_2A_3)$.
Montrer que A_6 est alors confondu avec A_0.

Notre objectif est de trouver le plus grand nombre de solutions pour ce problème « classique ». Alors, même si vous n'en connaissez qu'une, envoyez-la nous…
Envoyez vos solutions à Bernard PAZRZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

Solution du problème n°38 (PETIT VERT n° 38 de juin 1994)

proposé par André **VIRICEL** (VILLERS-LES-NANCY)

Un conducteur électrique AB est formé de quatre mailles carrées assemblées pour former une sorte d'échelle (voir schéma ci-dessous). Chacun des côtés du carré a une résistance de 1 Ω.
Quelle est la résistance équivalente de l'ensemble ? Peut-on généraliser à ***n*** mailles ?

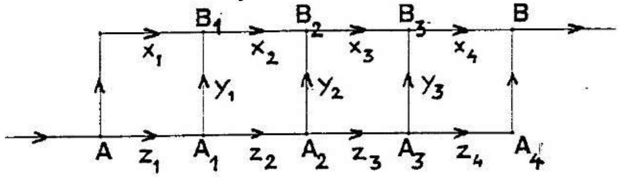


Peu de réponses sont parvenues pour ce problème : la résistance a ... résisté !
Nous n'en avons reçu que trois : de Denis **PÉPIN** (55, BELRUPT), de Richard **BECZKOWSKI** (71, CHALON-SUR-SAÔNE) et d'André **VIRICEL** (54, VILLERS-LES-NANCY).

Voici la solution proposée par Denis PÉPIN.

1. Cas du conducteur à 4 mailles

Dans toute la suite, on considérera que l'intensité du courant qui entre dans la résistance est de 1 ampère.
On raisonne sur les intensités x_i, y_i, z_i sur le schéma ci-dessous :



On obtient les 8 équations en écrivant qu'à chaque nœud la somme algébrique des intensités est nulle :

$x_1 + z_1 = 1$ $\quad$ $x_2 + y_2 = x_3$ $\quad$ $z_2 = y_2 + z_3$

$x_4 + z_4 = 1$ $\quad$ $x_3 + y_3 = x_4$ $\quad$ $z_3 = y_3 + z_4$

$x_1 + y_1 = x_2$ $\quad$ $z_1 = y_1 + z_2$

On obtient quatre autres équations en calculant de deux façons différentes les différences de potentiel entre A_i et B_{i+1} ($A = A_0$ et $B = B_4$) :

$2x_1 = y_1 + z_1$ $\quad$ $y_1 + x_2 = z_2 + y_2$

$2z_4 = y_3 + x_4$ $\quad$ $y_2 + x_3 = z_3 + y_3$

La symétrie du système obtenu donne les égalités suivantes :

$x_1 = z_4$; $x_2 = z_3$; $x_3 = z_2$; $x_4 = z_1$ et $y_1 = y_3$

Pour résoudre ce système, on exprime toutes les intensités à l'aide de $x_1 = i$:

$x_2 = x_1 + y_1 = 4i - 1$

$x_3 = x_2 + y_2 = 15i - 5$

$x_4 = x_3 + y_3 = 56i - 20$

$z_1 = 1 - i$

$z_2 = z_1 - y_1 = 2 - 4i$

$z_3 = z_2 - y_2 = 6 - 15i$

$z_4 = z_3 - y_3 = 21 - 56i$

$y_1 = 2x_1 - z_1 = 3i - 1$

$y_2 = y_1 + x_2 - z_2 = 11i - 4$

$y_3 = y_2 + x_3 - z_3 = 41i - 15$

(on obtient deux fois cette dernière égalité, le système est donc compatible).

$$z_4 = \frac{1}{2}(y_3 + x_4) = \frac{97i - 35}{2}$$

Les deux dernières égalités permettent de calculer $i = \frac{7}{19}$.

Par substitution, il vient alors :

$$x_1 = z_4 = \frac{7}{19} \;;\; x_2 = z_3 = \frac{9}{19} \;;\; x_3 = z_2 = \frac{10}{19} \;;\; x_4 = z_1 = \frac{12}{19} \;;\; y_1 = y_3 = \frac{2}{19} \;;\; y_2 = \frac{1}{19}$$

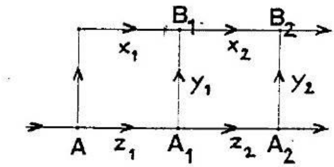
.

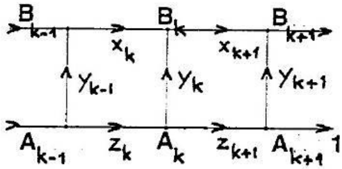
On peut maintenant calculer la résistance équivalente :

$$R_4 = 2 \times \frac{7}{19} + \frac{9}{19} + \frac{10}{19} + \frac{12}{19} \text{ soit } \boldsymbol{R_4 = \frac{45}{19}}$$

2. Généralisation à *n* mailles

On généralise les notations précédentes :





On a les 3 relations de récurrence :
$x_{k+1} = x_k + y_k$; $z_{k+1} = z_k - y_k$ et $y_{k+1} = y_k + x_{k+1} - z_{k+1} = x_k - 3y_k - z_k$.

Remarque qui sera utilisée plus loin : la symétrie du montage entraîne que les $3n - 1$ nombres $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \dots x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, x_n, z_n$ vérifient les mêmes égalités que $z_n, y_{n-1}, x_n, z_{n-1}, y_{n-2}, x_{n-1}, \dots z_2, y_1, x_2, z_1, x_1$ respectivement. Ce qui entraîne les égalités $x_k = z_{n+1-k}$ et $y_k = y_{n-k}$.

On obtient, pour tout k, $x_{k+1} + z_{k+1} = x_k + z_k$ (la somme des intensités qui entrent dans une maille est égale à la somme des intensités qui en sortent). Donc, pour tout k, $z_k = 1 - x_k$. D'où :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k - 1 \end{cases} \quad (\textit{avec } x_1 = i,\ z_1 = 1 - i \textit{ et } y_1 = 3i - 1).$$

En posant $X_k = x_k - \frac{1}{2}$ et $Y_k = y_k$, on a $\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix}$, où $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

D'où $\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = M^k \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$, avec (X_0, Y_0) solution du système $\begin{cases} X_0 + Y_0 = i - 0,5 \\ 2X_0 + 3Y_0 = 3i - 1 \end{cases}$, soit $X_0 = -0,5$ et $Y_0 = i$.

Détermination de M^k :

- M a pour valeurs propres 2+√3 et 2-√3
- $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ est une matrice de vecteurs propres.
- $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 3-\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$.
- On a $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix} = J$, d'où $M^k = PJ^kP^{-1}$.

On obtient $M^k = \begin{bmatrix} a_k - b_k & b_k \\ 2b_k & a_k + b_k \end{bmatrix}$,

où $a_k = \dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k\right]$ et $b_k = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left[(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k\right]$.

Résolution du problème :

Pour déterminer i, on utilise $x_1 = z_n = 1 - x_n = i$, d'où :

$x_n + i = 1$, $i(b_n + 1) = \dfrac{1}{2}(a_n - b_n + 1)$ et $i = \dfrac{a_n - b_n + 1}{2(b_n + 1)}$.

$R_n = 2x_1 + x_2 + ... + x_n = i + x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Or, compte tenu des relations $\begin{cases} x_k = z_{n+1-k} \\ x_k + z_k = 1 \end{cases}$ (symétrie du circuit), on a

$x_1 + x_2 + ... + x_n = \dfrac{n}{2}$ et donc $\boldsymbol{R_n = \dfrac{a_n - b_n + 1}{2(b_n + 1)} + \dfrac{n}{2}}$.

Vérification :

Pour $n = 4$, on trouve $a_4 = 97$, d'où $i = \dfrac{7}{19}$ et $R_4 = \dfrac{45}{19}$.

... suite de la page 2 ...

N°9. **Cauchy, un savant, une époque**.

N°10. **J'apprends, donc je suis**, de H. TROCMÉ-FABRE.

N°12. **Des objets mentaux “ aire ” et “ volumes ” au calcul des primitives**.

N°13. **Apprivoiser l'infini**, de C. HAUCHART et N. ROUCHE.

N°14. **Les mathématiques**, de Ian STEWART.

N°15. **Schéma prévisionnel des formations**, par le Conseil Général de Lorraine.

N°17. **Lycée, peut mieux faire**, de S. GASQUET et N. RUFFIEUX.

N°18. **L'apprentissage de l'abstraction**, de B.-M. BARTH.

N°19. **Histoire illustrée des mathématiques**, de J.L. ROMET.

N°20. **Les mathématiques au quotidien**, de P. RESSEGUIER.

N°22. **La physique de hasard, de Blaise Pascal à Niels Bohr**, de Ch. RUHLA.

N°23. **La démonstration mathématique dans l'histoire**. I.R.E.M. de Lyon

N°25. **¿ Enseigner la mathématique ?**, par la S.B.P.M.E.F.

N°26. **Pythagore, Euclide et toute la clique**, de Marc GUINOT.

N°27. **Les mathématiques dans l'occident médiéval**, de Jean de SIEBENTHAL.

N°28. **Le mode des illusions d'optique (objets impossibles et figures ambiguës)**, par Bruno ERNST.

N°29. **La mathématique des jeux**, Bibliothèque "Pour la Science".

SOMMAIRE

LE PETIT VERT n° 39
(BULLETIN DE LA REGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N° CPPAP 2 814 D 73 S. N° ISSN 0760-9825. Dépôt legal : 1994
Imprimé au siège de l'Association :
IREM (Faculté des Sciences), B.P. 239. 54506-VANDŒUVRE

Ce numéro a été tiré à 500 exemplaires

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 30 F

L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P. à jour de leur cotisation.

NOM :
ADRESSE :

Désire m'abonner pour 1 an (année civile) au PETIT VERT

Joindre règlement à l'ordre de APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)