

REMBOURSEMENT D'UN PRET

Le prêt est consenti à un certain **taux** (par exemple : 8,25 % par an).

Le remboursement se fait par **périodes** (par exemple : tous les mois).

Le **remboursement**, en fin de chaque période, est constitué de 2 parties :

- l'**amortissement** (partie du **capital** restituée),
- les **intérêts** ("loyer" de l'argent emprunté).

PREMIERE PARTIE : AMORTISSEMENTS CONSTANTS

Exemple :

J'emprunte 5 000 F à ma grand-mère, remboursables en 5 mois au taux de 1% par mois.

A la fin du premier mois, je lui rembourse 1 000 F (je reste lui devoir 4 000 F), **plus les intérêts : 50 F** (c'est à dire 1% des 5 000 F empruntés). J'ai donc "sorti" 1 050 F.

A la fin du deuxième mois, je rembourse encore 1 000 F (je reste alors lui devoir 3 000 F), plus les intérêts (1% de 4 000 F), soit au total 1 040 F.

Et ainsi de suite...

Voici la présentation de ces résultats dans un tableau récapitulatif.

| Mois | Capital restant dû | Amortissement | Intérêts | Remboursement |
|------|--------------------|---------------|----------|---------------|
| 1 | 5 000 | 1 000 | 50 | 1 050 |
| 2 | 4 000 | 1 000 | 40 | 1 040 |
| 3 | 3 000 | 1 000 | 30 | 1 030 |
| 4 | 2 000 | 1 000 | 20 | 1 020 |
| 5 | 1 000 | 1 000 | 10 | 1 010 |
| | TOTAUX → | 5 000 | 150 | 5 150 |

Travail à faire pour demain :

* Rechercher le sens des différents mots en gras dans l'introduction.

* Comprendre le mécanisme du remboursement (trouver les relations entre les divers éléments du tableau, être capable de refaire un tableau à partir d'un autre exemple numérique).

SECONDE PARTIE : REMBOURSEMENTS CONSTANTS

Observer le tableau ci-dessous, correspondant à un emprunt de 5 000 F remboursable en 12 mois au taux de 1% par mois.

| Période | C : Capital restant dû | A : Amortissements | I : Intérêts | R : Remboursements |
|---------|------------------------|--------------------|--------------|--------------------|
| 1 | 5 000,00 | 394,24 | 50,00 | 444,24 |
| 2 | 4 605,76 | 398,19 | 46,05 | 444,24 |
| 3 | 4 207,57 | 402,17 | 42,07 | 444,24 |
| 4 | 3 805,40 | 406,19 | 38,05 | 444,24 |
| 5 | 3 399,21 | 410,25 | 33,99 | 444,24 |
| 6 | 2 988,96 | 414,35 | 29,89 | 444,24 |
| 7 | 2 574,61 | 418,50 | 25,74 | 444,24 |
| 8 | 2 156,11 | 422,68 | 21,56 | 444,24 |
| 9 | 1 733,43 | 426,91 | 17,33 | 444,24 |
| 10 | 1 306,52 | 431,18 | 13,06 | 444,24 |
| 11 | 875,34 | 435,49 | 8,75 | 444,24 |
| 12 | 439,85 | 439,85 | 4,39 | 444,24 |
| | TOTAUX → | 5 000,00 | 330,88 | 5 330,88 |

On notera :

| | | | |
|----------|----------|----------|-----|
| C_1 | A_1 | I_1 | R |
| C_2 | A_2 | I_2 | R |
| ... | ... | ... | ... |
| C_{12} | A_{12} | I_{12} | R |

les différentes valeurs de ce tableau.

Travail à faire :

1°) Compléter :

$$A_1 + I_1 = \dots ; A_2 + I_2 = \dots ; \dots \dots \dots \quad A_{12} + I_{12} = \dots$$

$$C_1 - A_1 = \dots ; \dots \dots \dots \quad C_{11} - A_{11} = \dots$$

$$I_1 = \dots ; I_2 = \dots ; \dots \dots \dots \quad I_{12} = \dots$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{12} =$$

On obtient ainsi 36 relations reliant les 37 variables.

2°) Essayer de trouver comment a été déterminé A_1 .

.../...

.../...

Le seul moyen de savoir si vous avez "compris" la structure d'un tel tableau est d'en refaire un autre.

Énoncé : Remboursement de 200 000 F en 6 ans, au taux de 6% par an (**remboursements constants** en fin de chaque année).

Compléter le tableau **jusqu'à la dernière ligne** (conseil : au crayon !!!).

| Année | C | A | I | R |
|-------|----------|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| | TOTAUX → | | | |

En cas de difficulté,
consulter la fiche d'aide n°1.

Note de l'auteur (non incluse dans la fiche de T.D. distribuée aux élèves) :

A ce moment là, la plupart des élèves commencent à remplir le tableau à partir d'une valeur A_1 quelconque, déterminée plus ou moins "au pifomètre"...

Et ce n'est qu'à la dernière ligne du tableau que l'on peut s'apercevoir qu'il y a erreur (car C_{12} n'est alors pas égal à A_{12} ; or le dernier amortissement doit nécessairement être égal à la partie du capital due à ce moment, sinon cela n'aurait aucun sens...).

*C'est la raison pour laquelle **il faut** que les élèves continuent jusqu'au bout, et ne se contentent pas de dire "Et ainsi de suite..."*

AIDE N°1

Cette fiche doit vous aider à comprendre la structure de tableau.
Les valeurs utilisées sont celles du tableau de la page 2.

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----|
| C_j | A_j | I_j | R |
| C_{j+1} | A_{j+1} | I_{j+1} | R |

Reprenons les relations relatives à deux lignes consécutives :

$$I_j = 0,01 \times C_j \quad (\text{car le taux est de 1\% sur l'exemple donné})$$

$$I_{j+1} = 0,01 \times C_{j+1}$$

$$A_j + I_j = R$$

$$A_{j+1} + I_{j+1} = R$$

$$C_j - A_j = C_{j+1}$$

Déduire de ces cinq relations que : $A_{j+1} = 1,01 \times A_j$ (*).

Cela est vrai quelque soit j .

Conclusion :

La colonne A_1, A_2, \dots, A_{12} est une suite **géométrique** de raison 1,01.

Que peut-on en déduire de la colonne A_1, A_2, \dots, A_6 du tableau que vous aviez à construire ?

L'encadré ci-dessus doit vous fournir des indications pour remplir intégralement le tableau demandé : faites-le.

En cas de difficultés à nouveau, consultez la fiche d'aide n°2.

(*). Si vous n'arrivez pas à déduire cette égalité des cinq autres, vous pouvez cependant continuer en admettant le résultat.

Faites appel au professeur si vous voulez des indications quant à la démarche à suivre pour démontrer cette égalité.

AIDE N°2

Reprenons le tableau de la page 2.

La colonne A_j est une suite géométrique de raison 1,01 (1,01 parce que le taux est de 1% ; avec un autre taux, cela ne serait plus 1,01).

D'autre part, $A_1 + A_2 + \dots + A_{12} = C_1$ (le total des amortissements est par définition égal au capital emprunté).

On a vu dans le cours que la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme U_1 était donnée par la formule :

$$U_1 + U_2 + \dots + U_{12} = U_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1} = A_1 \times \frac{1,01^{12} - 1}{1,01 - 1}$$

$$\text{D'où } C_1 = A_1 \times \frac{1,01^{12} - 1}{1,01 - 1} \quad (\text{or } C_1 \text{ est donné au départ}).$$

$$\text{D'où } A_1 = C_1 \times \frac{1,01 - 1}{1,01^{12} - 1} \approx 394,24$$

Dans le cas du tableau que vous devez remplir à la page 3 :

la raison est $r = \dots\dots\dots$ (correspondant au taux de 6%),

le nombre de termes est $n = \dots\dots\dots$

la somme des A_j est $C_1 = \dots\dots\dots$

Cela doit vous permettre de déterminer le premier terme A_1 .