LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 52	DECEMBRE 97	Abonnement 4 n^os par an : 30 F

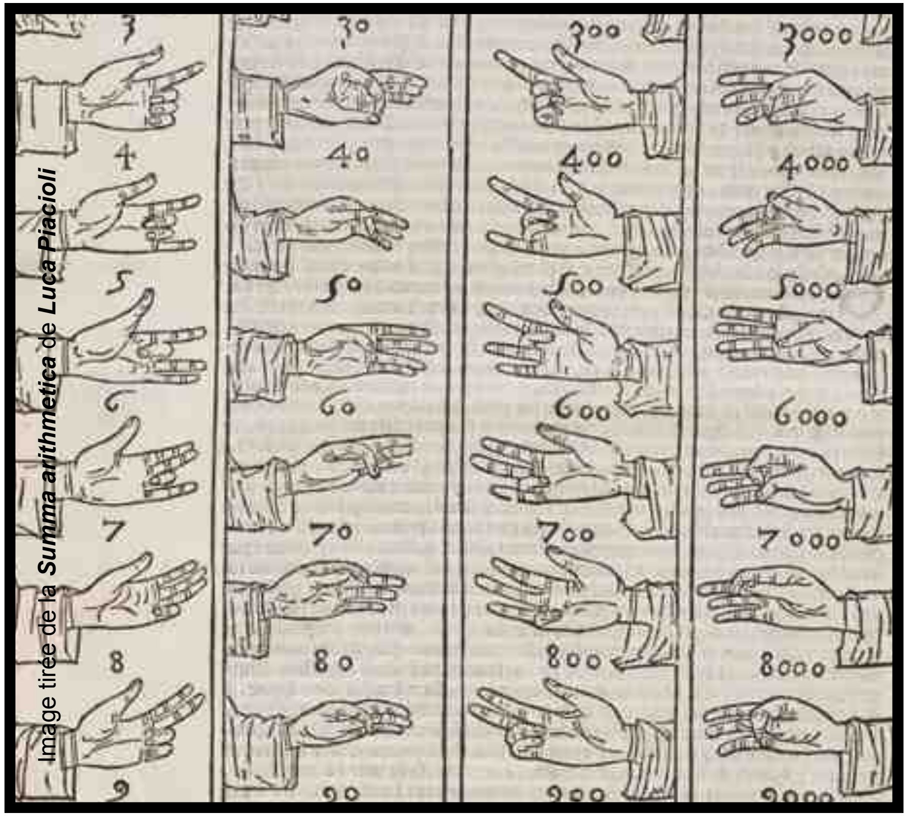


Image tirée de la *Summa arithmetica* de *Luca Piacioli*

PETIT VERT N°52. DECEMBRE 1997

AVIS DE RECHERCHE

1. Chacun d'entre nous a, une fois au moins dans son année scolaire, construit de lui-même un énoncé de problème, un petit exercice, une fiche d'activités...

Nous sommes à la recherche de tels documents : si vous en avez « inventés ([1]) », envoyez-les nous !

Quel usage en sera fait ?

d'une part cela permettra d'alimenter la Banque d'Énoncés de l'association (cf. BGV de rentrée) ;

d'autre part, certains seront publiés dans notre petit bulletin vert régional, ou seront utilisés pour faire « avancer » certains groupes de travail, de recherche...

N'HÉSITEZ PAS ! ENVOYEZ CES FICHES OU ÉNONCÉS TELS QUE VOUS LES AVEZ DONNÉS A VOS ÉLÈVES... NOUS ATTENDONS DE TRÈS TRÈS NOMBREUSES RÉPONSES

2. Vous avez certainement des élèves qui ont passé un concours ou un examen pour entrer dans la fonction territoriale, les transports, la santé, ou dans tout autre organisme ou entreprise.

Dans ce concours, il y avait une épreuve de mathématiques. Et le programme de cette épreuve n'avait absolument rien à voir avec ce que l'on enseigne actuellement dans les collèges ou dans les lycées.

Si vous connaissez de tels cas, et si vous disposez du sujet ou du programme (le *ou* n'est pas exclusif), faites-les parvenir à la Régionale (François DROUIN, 2 allée du Cerisier, 55300-CHAUVONCOURT).

Au niveau National, l'A.P.M.E.P. pourra aussi intervenir (auprès des services publics) pour qu'ils se mettent un peu à jour sur les connaissances et capacités exigées actuellement des élèves.

MERCI D'AVANCE.

3. Tout collègue qui aurait des renseignements, quels qu'ils soient ([2]), sur l'enseignement des probabilités et des statistiques (niveau collège et lycée) dans un quelconque pays d'Europe serait bienvenu de le faire savoir à Bernard PARZYSZ (3 rue Marie Sautet, 57000-METZ, e-mail : parzysz@poncelet.univ-metz.fr) ou à Jacques VERDIER (46 rue de la Grande Haie, 54510-TOMBLAINE ; e-mail : j.verdier@ac-nancy-metz.fr).

Ces informations permettront d'alimenter le travail de recherche d'un groupe I.R.E.M. sur le thème « Enseignement des probabilités et des Statistiques en Europe ».

MERCI D'AVANCE

(1) u si vous vous êtes inspiré d'un sujet déjà publié, mais que vous l'avez profondément remanié (il faut alors citer votre source de référence)

(2) programmes, manuels, items d'évaluation, cahiers d'élèves, articles de presse, etc., en français ou en V.O.

ÉDITORIAL

1986 : METZ

1999 : GÉRARDMER

Treize ans sépareront ces Journées Nationales en Lorraine et quelques teintes grisonnantes sont apparues dans les cheveux (et la barbe ...) d'organisateurs de celles de Metz, de nouveau sur la brèche pour Gérardmer ! Heureusement des têtes nouvelles sont venues apporter leurs idées et donner un peu de leur temps pour le fonctionnement de leur régionale.

Cependant, inexorablement le temps passe et des membres actifs et passionnés de notre comité font valoir leurs justes droits à la retraite. Persuadés que la vitalité d'une association se mesure aussi par la poussée des jeunes désireux de faire entendre leur point de vue, nous ne pouvons qu'inciter nos collègues fraîchement sortis de l'I.U.F.M ou retrouvant notre académie à venir nous rejoindre. Le comité de la régionale leur a récemment envoyé un courrier de présentation de l'A.P.M.E.P. : ce sont eux qui organiseront les Journées Nationales de 2012 en Lorraine

Une trentaine d'adhérents lorrains se sont retrouvés lors des Journées de Marseille et nous sommes allés à Schoeneck discuter de « Problématiques Lycées ». Sans aller loin, en explorant nos salles des profs, ne pourrions nous pas aborder nos jeunes collègues et leur présenter la convivialité du monde associatif ? Et si parmi les bonnes résolutions de rentrée, nous faisions tout notre possible pour susciter au moins une adhésion nouvelle ? Pas de classement pour connaître l'adhérent le plus performant, mais la satisfaction de voir se régénérer notre vénérable association, si riche par ses diversités.

Alli Kollege sin willkomme. Es wâr schen, wenn jungi Leit â mitmache dèdde. „Freh ibt sich, wer später Meischter ware will".

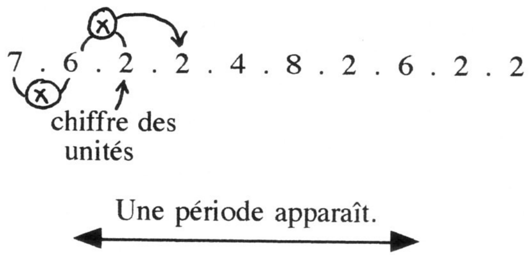
François DROUIN

DES MULTIPLICATIONS ET DES RÉSEAUX

Par Anne MILLET

Comme nous le rappelle le B.O. n°44 du 05/12/96 à la page 2948 (mathématique, articulation école-collège), et comme nous le constatons dans nos classes, la connaissance des tables de multiplication doit être entretenue car celles-ci ne sont pas stabilisées par tous les élèves.

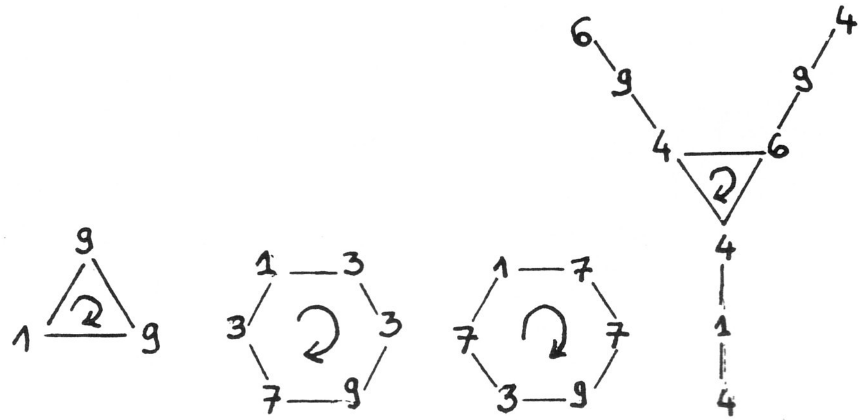
Je choisis deux entiers naturels inférieurs à 10 (par exemple 7 et 6).
Je les multiplie (42) ; je ne garde que le chiffre des unités (2) ; je le multiplie avec le chiffre écrit précédemment ($6\times2 = 12$) et je ne garde que le chiffre des unités, que j'inscris à droite des précédents.

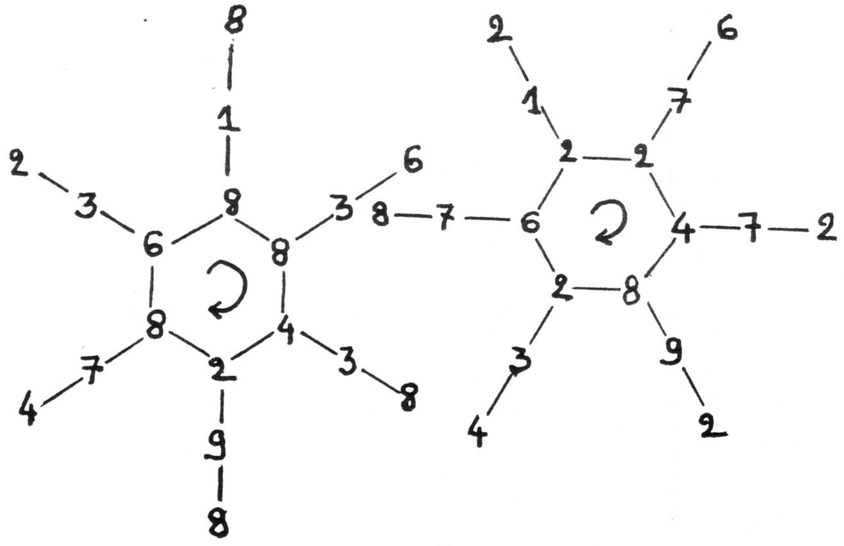


Je continue ainsi ma chaîne de nombres (chiffres) :

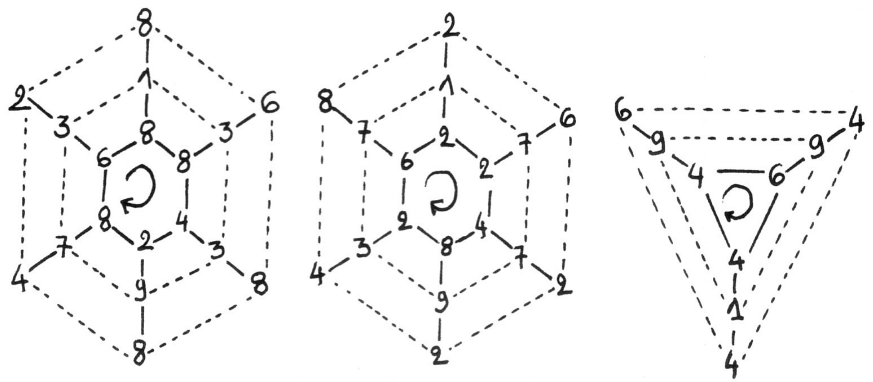
(ici, la période est 6.2.2.4.8.2).

Voici les schémas que l'on peut obtenir contenant toutes les chaînes possibles, hormis les chaînes « inintéressantes » formées par n.0, 0.n, n.5, 5.n, 1.6 et 6.1 :





Un des élèves du collège Emile Zola a repéré d'autres liaisons possibles, indiquées en pointillés dans les schémas ci-dessous. Cela permet de réduire le nombre total de schémas à trois :



Pourquoi ne pas faire découvrir ces schémas à nos élèves ?
Pourquoi ne pas leur proposer des schémas à compléter ?
Ils y trouveront l'occasion de « stabiliser » leurs tables de multiplication…

Question subsidiaire : pourquoi n'y a-t-il pas de période de 4 nombres ?

JOURNÉE RÉGIONALE

DES MATHÉMATIQUES

Merci de bien vouloir diffuser cette présentation de la Journée Régionale auprès de vos collègues.

MERCREDI 18 MARS 1998

AU C.R.D.P. DE NANCY

Planning de la Journée :

Matinée :
9 h à 10 h 15 : La Régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P., sa vie, ses oeuvres.
En particulier :
Présentation des deux dernières brochures.
Présentation de l'exposition itinérante.
Présentation de la bibliothèque de prêt par correspondance.
10 h 15 : pause-café déambulatoire, rencontres, brochures.

10 h 45 à 12 h 30 : Conférence de **Abdenacer MAKHLOUF**, (de l'Université de Haute-Alsace / Mulhouse, coauteur de la brochure APMEP n°103) : « **POUR UN ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE EN TERMES DE GRANDEUR : LES RÉELS DÉVOILÉS ».**

12 h 45 : REPAS :
Le repas sera pris au Foyer du Jeune Ouvrier du Grand Sauvoy de MAXÉVILLE (à environ 500 m à pied du C.R.D.P.).
Prix du repas : 50 Francs (vin et café inclus). **Il est nécessaire de s'inscrire à l'avance** pour ce repas (chèque à joindre à l'inscription).

Après-midi :
14 h 30 à 16 h 30 : **ATELIERS** au choix (voir liste ci-après).
16 h 30 à 17 h : pause-café déambulatoire, rencontres, brochures.
17 h à 19 h : Assemblée Générale de la Régionale A.P.M.E.P. (ouverte à tous).

LISTE DES ATELIERS 1998

A 1. MATHÉMATIQUES EUROPÉENNES ET RELATIONS INTERNATIONALES, par Richard CABASSUT (Lycée International de Strasbourg, Président de la Régionale A.P.M.E.P. d'Alsace).

Les sections européennes se sont fortement développées en Lorraine, et impliquent l'enseignement des mathématiques soit au titre de discipline non-linguistique enseignée partiellement dans une langue étrangère, soit au titre du projet d'établissement dans le partenariat avec les établissements étrangers. La possibilité, dans l'enseignement des mathématiques, d'échanges avec d'autres pays se développe : voyages de classes dans le cadre du programme européen SOCRATES, utilisation d'internet ou de la visioconférence...

A travers l'étude de quelques exemples, on envisagera comment s'organiser au sein de l'A.P.M.E.P. et de nos établissements pour intégrer cette dimension européenne voire internationale dans l'enseignement des mathématiques.

A 2. INTERNET ET « PUBLIMATH », par Michèle FABREGAS (Lycée Schuman, Metz) et Pol LE GALL (Lycée Daubié, ROMBAS).

Découverte sur Internet du serveur de la Régionale Lorraine, de la banque de données « PUBLIMATH », ainsi que d'autres sites utiles à un enseignant de mathématiques.

Atelier **limité aux 14 premiers inscrits** (travail sur postes informatiques reliés au serveur académique).

A 3. TROISIÈME DEGRÉ ET IMAGINAIRES, animé par Jacques VERDIER Lycée Varoquaux, Tomblaine).

Comment la recherche des solutions des équations du troisième degré a permis la découverte des nombres imaginaires, depuis les mathématiciens arabes du IX^{ème} siècle jusqu'au siècle de Descartes. L'évolution du statut de ces nombres, et les problèmes de leur représentation graphique.

Le contenu de cet atelier reprend celui de la brochure éditée par la régionale sous le même titre.

PETIT VERT N°52. DECEMBRE 1997

A 4. QUELQUES DIAPOSITIVES A PROPOS DES MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE, par Jean-Claude BRESSON (Collège Callot, Vandoeuvre)

Il s'agit de tenter de répondre concrètement à la question fréquemment posée par les élèves : « M'sieur, à quoi ça sert les maths ? ». La réponse prend la forme de courts montages de 15 à 20 diapositives par chapitre (soit environ 10 min.) sur une vingtaine de thèmes géométriques, algébriques ou historiques illustrant les principales notions mathématiques du collège.

A 5. UTILISATION DE L'EXPOSITION « OBJETS MATHÉMATIQUES », par François DROUIN (Collège de Saint-Mihiel).

Les quatre exemplaires réalisés par notre régionale ne demandent qu'à circuler dans les écoles, collèges, lycées, bibliothèques publiques... Pendant cet atelier, les participants pourront découvrir les 10 stands, manipuler les objets, et envisager des pistes de travail (pour la classe, les dispositifs de consolidation, les parcours diversifiés, etc.) et la présentation de mathématiques vers le « grand public ».

A 6. INTRODUCTION DE L'ANALYSE AU B.E.P. ET AU BAC PRO., animé par Jean-François NOËL (Lycée Professionnel du Chablais, Thonon les Bains).

Il s'agit de proposer une progression cohérente pour les élèves qui ne disposent pas des outils théoriques habituels et qui bâtissent une grande partie de leurs savoirs à partir de situations professionnelles ou issues de leur environnement.

A 7. DES DONNÉES STATISTIQUES À LEURS REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES. animé par Bernard PARZYSZ (professeur à l'I.U.F.M. de Lorraine, site de Metz).

Cet atelier concerne aussi bien le lycée que le collège

A 8. EVAPM-1, PREMIÈRE, par Michel BARDY (Commission Nationale A.P.M.E.P. « Second Cycle »).

Quelques résultats et commentaires à propos de l'évaluation organisée par l'A.P.M.E.P. dans les classes de première, et dont la brochure vient d'être publiée.

bulletin d'inscription page suivante

BULLETIN D'INSCRIPTION

(Remplir un bulletin par participant. Photocopier celui-ci autant que nécessaire. Merci)

A retourner à Jacques VERDIER, 46 rue de la Grande Haie, 54510 TOMBLAINE
au plus tôt, et en tout cas **avant le 1er février 1998**.

Les personnels en activité seront inscrits par nos soins au stage 97YCA751T auprès de la MAFPEN et recevront un ordre de mission sans frais, les autorisant à s'absenter le mercredi 18 mars, et les couvrant en cas d'éventuel accident de trajet.

NOM Prénom

Adresse personnelle

Établissement d'exercice

N.U.M.E.N :

Numéro INSEE+clé :

Choix des ateliers (indiquer deux voeux par ordre de préférence) :

1er voeu :

2eme voeu :

REPAS :
Prendra le repas au F.J.T. : OUI(1) NON

Dans ce cas, joindre un chèque de 50 F
à l'ordre de A.P.M.E.P.-Lorraine.

PETIT VERT N°52. DECEMBRE 1997

Encore quelques programmes anciens !

Joëlle AGAMIS, du Collège Alfred Kastler de STENAY, nous a fait parvenir le programme de mathématiques de la classe de sixième des lycées classiques et modernes. Rappelons qu'à cette époque, ces classes ne scolarisaient que la future.« élite » de la nation, la majorité de la population scolaire terminant ses études dans l'enseignement primaire ou primaire supérieur.

PROGRAMME DE 1944

CLASSE DE SIXIÈME CLASSIQUE ET MODERNE

Exercices de calcul sur les nombres entiers et les nombres décimaux en liaison avec la mesure des grandeurs; système métrique, quotient, règle de trois.

Mesure de longueurs, emploi des instruments usuels.

Usage de la règle, de l'équerre, du compas et du tire-ligne pour des tracés usuels.

Mesures des aires : aire du rectangle, du carré, du triangle rectangle, du trapèze rectangle; recherche de l'aire d'un polygone quelconque, par décomposition en trapèzes rectangles et triangles rectangles; formule de l'aire du cercle.

Mesure des volumes de capacité : volume du parallélipipède rectangle, du cube, du prisme droit, du cylindre; formule des volumes de la pyramide, du cône, surface de solides simples.

Mesure des poids : poids spécifique et volume spécifique.

Monnaie : prix unitaire d'une marchandise et quantité de marchandise correspondant à l'unité de monnaie.

Mesure des angles : usage du rapporteur.

Mesure du temps : addition et soustraction de nombres en heures, minutes, secondes.

Vitesse dans le cas d'un mouvement uniforme; espace parcouru pendant l'unité de temps nécessaire au parcours de l'unité d'espace.

Pourcentage, intérets simples, escomptes, rentes.

Mise à mort de l'I.R.E.M. ? (suite)

Dans notre précédent numéro, nous expliquions les conséquences catastrophiques de l'application stricte de la circulaire « BOISSINOT » par notre ancien Recteur, Monsieur MAROIS, ce qui avait eu pour conséquence la suppression pure et simple des heures affectées par le Rectorat à l'I.R.E.M. de Lorraine.

En octobre, le nouveau Directeur de l'I.R.E.M., Bernard ANDRÉ, a rencontré le nouveau Recteur de l'académie, Joseph LOSFELD. Ensemble, ils ont reconsidéré la situation.
D'après ce que nous ont dit d'une part Bernard ANDRÉ, et d'autre part Michel BARDY (qui représentait l'A.P.M.E.P. à la dernière commission mathématique d'élaboration du P.A.F.), le nouveau Recteur aurait bien compris comment ces heures « de recherche » étaient utilisées pour préparer des formations P.A.F. ultérieures. Il semblerait que la lettre que nous, Régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P., lui avions écrite[1] (voir PETIT VERT n°51 page 5), ainsi que la pétition que nous avons fait signer (et qui a été signée **très massivement**) aient pesé dans la balance : Monsieur le Recteur est prêt à reconsidérer la situation.

L'ennui est que les heures initialement prévues (55 en juin) ont été « saupoudrées » sur diverses actions dans diverses disciplines : il est quasiment impossible de les réaffecter maintenant (en effet, qui « déshabiller », Pierre ou Paul, pour rhabiller l'I.R.E.M.) ?
Une dizaine d'heures[2] ont cependant déjà pu être débloquées sur les crédits de la « Mission Innovation » pour faire fonctionner des groupes de recherche dont le thème pouvait rentrer sans ce cadre.
Une réunion « tripartite » (Rectorat - I.R.E.M. - I.U.F.M.) a été annoncée, mais la date n'en est pas encore fixée.
Monsieur le Recteur a donc affirmé sa volonté de soutenir l'I.R.E.M. ; cependant ce soutien n'est pour l'instant que moral : il ne s'est pas traduit dans les faits.

Peut-on vraiment écrire :

Pas de nouvelles, bonnes nouvelles ?

Rien n'est moins sûr.

(1) Mais pour laquelle nous n'avons cependant toujours pas eu de réponse…

(2) Nous ne tenons pas compte des heures affectées à des recherches I.N.R.P. (recherches contractualisées) : elles ne dépendent pas du Rectorat, et n'ont pas été affectées par la circulaire « BOISSINOT » : il y en a une dizaine cette année, tout comme l'an passé.

PETIT VERT N°52. DECEMBRE 1997

Doubler en 2 ans ? ? ?

L'âge moyen des adhérents de notre Régionale a tendance à augmenter : c'est à dire que les « anciens » nous restent fidèles, mais que peu de « nouveaux » nous rejoignent.

Il faut absolument apporter un sang neuf à l'association, pour que de nouvelles énergies, de nouvelles idées viennent s'ajouter à celles de tous les adhérents Lorrains.

Nous comptons donc sur chacun d'entre vous pour présenter l'A.P.M.E.P. à ceux qui ne la connaissent pas encore. Pour ce faire, vous disposez chez vous de bulletins, de brochures, etc. que vous pouvez présenter à vos collègues de travail.
Pour vous aider dans cette tâche, nous avons joint à ce Petit Vert, insérés entre les pages centrales, d'une part un magnifique dépliant en couleurs présentant l'A.P.M.E.P., d'autre part un bulletin de première adhésion ([1]) au verso duquel sont également présentées nos activités.

Si chacun d'entre vous réussissait à faire adhérer ne serait-ce qu'un seul collègue, pensez que nos effectifs doubleraient ! Si l'objectif paraît quelque peu irréalisable, rien ne coûte d'essayer.

([1]) Non utilisable pour le renouvellement de votre cotisation.

MATHS ET MEDIAS

Une nouvelle rubrique, de Bernard Parzysz

1. En voiture...

Dans son édition du 30 septembre 1997, le Républicain lorrain annonçait que, pour les immatriculations de véhicules, la Moselle venait de passer à 3 lettres. C'est-à-dire que, après le numéro 9999 ZZ 57, les nouveaux numéros mosellans comporteront désormais 3 chiffres (au maximum) et 3 lettres (exactement).
De façon générale, si l'on considère *l* lettres et *n* nombres disponibles, le nombre d'immatriculations possibles est l^3n. A priori, puisque notre alphabet comporte - selon un récent recensement - 26 lettres, et que de 1 à 999 il y a - sauf erreur de ma part - 999 nombres, on peut théoriquement immatriculer ainsi $26^3\times999$ véhicules, soit environ 17 millions et demi. Cependant, le titre de la une du quotidien est le suivant :


LA MOSELLE PASSE AU TRIPLE « A »

Trois lettres pour 13,8 millions de véhicules... en 106 ans

Nous en apprenons bientôt, dans le corps du journal, la raison, qui est que certaines lettres et certains nombres ne sont pas utilisés : « *Les numéros allant de 1 à 10 ne sont plus décernés, ni le 57, ni le 1000* [] (...) *Dans le même temps sont aussi évacuées du catalogue les voyelles I, 0 et U* ».

Reprenant le calcul précédent, mais avec $l = 23$ (= 26 - 3) lettres et $n = 988$ (= 1000 - 12) nombres, nous trouvons cette fois $23^3\times988$ = 12 020 996. Ce qui est loin des 13,8 millions annoncés.
Deux hypothèses - qui ne sont pas exclusives l'une de l'autre - viennent à l'esprit, pour expliquer les causes de cette différence : elle peut être due au nombre différent de lettres et/ou de nombres pris en compte dans le dénombrement. Le tableau suivant indique, pour 4 valeurs du nombre de lettres (23, 24, 25, 26) et 5 valeurs du nombre de nombres (988, 989, 998, 999, 1000), le nombre d'immatriculations que l'on peut réaliser :
On voit que les 13,8 millions s'obtiennent pour $l = 24$ lettres et $n = 998$ ou 999 ou 1 000 nombres, ce qui ne correspond aucunement à ce qui est

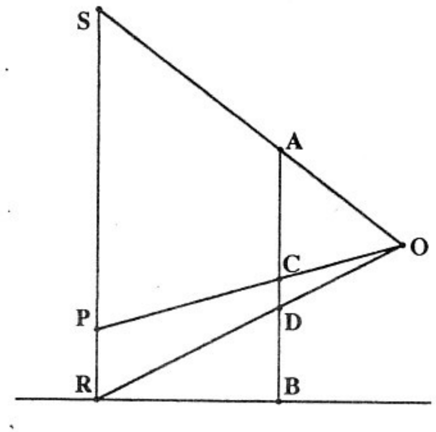
	988	989	998	999	1 000
23	12 020 996	12 033 163	12 142 666	12 154 833	12 167 000
24	13 658 112	13 671 936	13 796 352	13 810 176	13 824 000
25	15 437 500	15 453 125	15 593 750	15 609 375	15 625 000
26	17 365 088	17 382 664	17 540 848	17 558 424	17 576 000

annoncé. Alors pourquoi 24 lettres au lieu de 23 ? E pourquoi ne pas avoir ôté les nombres de 1 à 10 ? Mystère…

2. Mesurer un arbre

Dans le courrier des lecteurs de son édition du 8 octobre 1997, le Républicain lorrain indique, par la plume de M. Koscher de Lemberg, un moyen utilisé par les forestiers allemands pour évaluer la hauteur d'un arbre : « [*il*] *nécessite une canne à crosse qui est posée à l'envers sur le sol, la pointe en haut. Deux encoches y ont été pratiquées, l'une à exactement 80 cm de la pointe, l'autre à exactement 72 cm. Il faut ensuite tâtonner sur le terrain pour trouver un point où la visée permet d'aligner la pointe avec la cime de l'arbre, l'encoche 80 cm avec le pied de l'arbre. A cet endroit, il faut disposer d'un aide qui placera sur le tronc de l'arbre une pastille devant être alignée avec l'encoche 72 cm (...). La pastille étant placée, il suffira de mesurer la distance du sol à la pastille et la multiplier par 10 pour obtenir la hauteur de l'arbre avec une très bonne approximation* ».

La situation ici décrite correspond au dessin ci-contre.



Légende :
[SR] : *arbre à mesurer* (S : sommet ; R : base ; P : pastille)
[AB] : *canne* (A : pointe ; B, base ; C et D : encoches).
AC = 72 cm, AD = 80 cm.
On a RS/RP = DA/DC = 10 .
D'où la hauteur RS de l'arbre, en multipliant par 10 la distance (RP) de la pastille au sol.

Suite page 15

Commentaire :
Cette petite glane m'a fait penser que les lecteurs du Petit Vert auraient sans doute matière à alimenter une rubrique « maths et Médias » dans laquelle on trouverait des exemples intéressants et/ou amusants du traitement que les journaux, revues, chaînes de télévision réservent aux mathématiques. Il leur suffirait de m'adresser leurs trouvailles (coupures de journal ou de revue accompagnée d'un commentaire) à l'adresse suivante :

Bernard PARZYSZ
3 rue Marie Sautet, 57000 METZ

Sans doute pourrait-on y trouver, outre de l'amusement, des idées à exploiter en classe.

Mise à mort de l'I.R.E.M. ? (suite)

A partir de Janvier 1998, suite aux demandes du Ministère de ne plus séparer formation initiale et formation continue - ce qui a toujours été une des demandes de notre association -, la M.A.F.P.E.N. va être rattachée à l'I.U.F.M. de LORRAINE. Comment va se situer l'I.R.E.M. dans cette nouvelle démarche ? Les propos de Monsieur DA CUNHA-CASTELLE aux journées nationales A.P.M.E.P. de Marseille n'ont pas donné de réponse claire à cette question. Et dans une lettre de Monsieur Claude ALLÈGRE, répondant à la Régionale de LILLE (qui s'inquiétait elle aussi de la suppression des heures de « son » I.R.E.M.), on peut lire :

> *J'ai cependant demandé à mes services d'examiner la situation des I.R.E.M. en vue de bien identifier leurs missions, et de les articuler plus rationnellement avec les missions générales des universités en matière de recherche, notamment avec celles désormais confiées, depuis leur création, aux Instituts Universitaires de Formation des Maîtres, qui participent également à la recherche en éducation.*

Affaire à suivre, donc...

Au plan local.... La Régionale s'y emploiera.

Problème du trimestre n°52

Énoncé proposé par François DROUIN

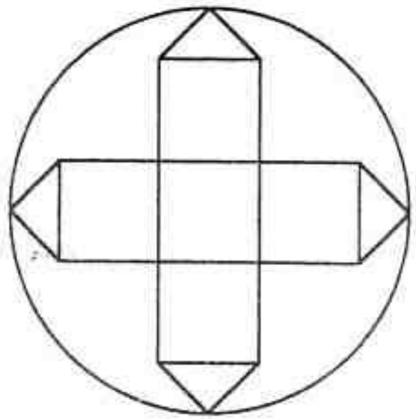
Le numéro spécial « NOMBRES » de LA RECHERCHE (n°278, juillet-août 1995) indique un méthode utilisée par les paysans du Nordeste brésilien :
« Pour trouver l'aire d'une parcelle ayant la forme d'un quadrilatère, ils multiplient la demi-somme des longueurs de deux côtés opposés par la demi-somme des longueurs des deux autres côtés opposés. »
Existe-t-il des quadrilatères autres que le rectangle pour lesquels cette méthode est exacte ?

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

Solution du problème n°51

Rappel de l'énoncé : On dispose d'un disque de 21 cm de diamètre, découpé dans une feuille de papier format A4.
Quelle est la dimension maximale d'un cube dont le patron (en un seul morceau) peut être réalisé dans ce disque ?
N.B. On ne tiendra pas compte des « languettes » d'assemblage.
Combien y a-t-il de patrons possibles (à une isométrie près) ?

Je n'ai reçu que deux réponses pour ce problème, l'une de François DROUIN (55 Chauvoncourt), et l'autre de Pol LE GALL (57 CourcellesChaussy).



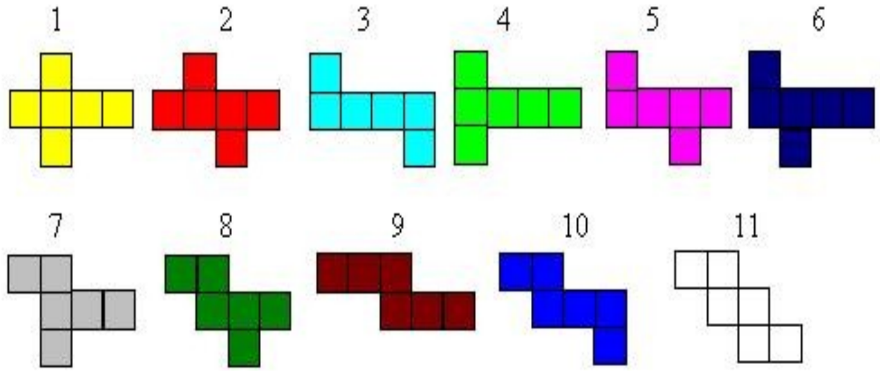
P. Le Gall m'a transmis le dessin ci-contre, qui met le doigt sur une imprécision de l'énoncé (si je puis m'exprimer ainsi, car les dessins en général - et celui-ci en particulier - sont dépourvus d'appendices digitaux).

Lorsque j'ai posé le problème, j'avais en tête les patrons "classiques" du cube, dans lesquels les faces sont conservées entières, sans découpage. Mais le texte du problème ne le précisait pas, et ' notre collègue, s'engouffrant dans la brèche, est arrivé à placer, dans un disque de diamètre d, un cube de côté $d/4$.

Pour ma défense, je m'appuierai sur une citation d'un article paru dans le dernier Bulletin Vert (le gros) : « *[Les jeux mathématiques] doivent être, par définition, un plaisir de l'esprit. Pour cela, chacun doit comporter, ou bien une astuce dans la solution qui le rende très facile alors qu'il a l'air très difficile, ou bien une certaine beauté dans l'énoncé qui le rende "appétissant". <u>Un certain manque de précision dans le texte doit par contre être d'avance acceptée</u>* » (c'est moi qui souligne).

F. Drouin, lui, m'a envoyé les dessins des divers développements "classiques" du cube, chacun étant inscrit dans le disque qui lui paraît avoir le plus petit diamètre. Il arrive ainsi, au mieux, à inclure un développement d'un cube de côté a dans un disque de diamètre $a\sqrt{17}$, soit $a = d/\sqrt{17}$ (seuls les résultats sont donnés). C'est un peu moins bien que P. Le Gall, mais il semble bien que ce soit le meilleur résultat qu'on puisse obtenir sans avoir à recoller une face. Voyons ce qu'il en est exactement, en explicitant la démarche.

<u>Rappel</u> : Étant donné un cube, on démontre qu'il en existe en tout et pour tout 20 développements différents conservant les faces, à une isométrie directe près. 18 d'entre eux constituent des paires de symétriques (par rapport à un axe), les deux derniers étant eux-mêmes leur propre symétrique. Ce qui nous donne finalement, à une isométrie (directe ou indirecte) près, 11 développements : ceux qui sont représentés ci-dessous :



Lorsque j'ai eu l'idée de ce "problème du trimestre", je l'avais conçu comme une amusette : pour chacun des différents développements d'un cube, chercher, de façon intuitive, le plus petit disque le contenant. Puis - après avoir reçu la réponse de F. Drouin - je me suis demandé si, finalement, la détermination de ce disque était aussi "naturelle" qu'elle en avait l'air, et comment, lorsqu'on avait trouvé "une" solution correspondant à un développement donné, on pouvait être sûr qu'il s'agissait bien de

"la" solution. J'ai finalement abouti à la petite étude qui suit.

Notre problème est en fait un cas particulier du problème suivant :
Soit dans le plan affine euclidien une surface S compacte (c'est-à-dire fermée et bornée), connexe et non réduite à un point (on sait qu'alors on peut l'inclure dans un disque fermé de rayon fini). On cherche le (ou les) disque(s) fermé(s) de rayon minimum contenant S.

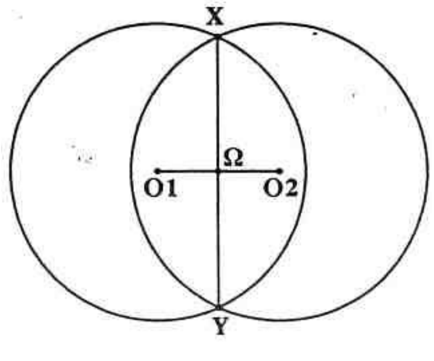


fig. 1

Proposition 1 : **Un tel disque existe et est unique**.
<u>Existence</u> : elle résulte du fait que l'ensemble des rayons des disques contenant S est un fermé de $\mathbb{R}$, de la forme [r ; +∞[.
<u>Unicité</u> : soient donc deux disques distincts D_1 et D_2 de même rayon minimum r, contenant S et respectivement centrés en O_1 et O_2. Les frontières de ces deux disques sont sécantes en X et Y, et S est incluse dans l'intersection de D_1 et de D_2. Soit Ω le milieu commun de $[O_1,O_2]$ et de [XY]. S est également incluse dans le disque de centre Ω et de rayon $\Omega X < O_1 X = r$, ce qui est absurde.

Proposition 2 : **Soit D le disque défini ci-dessus. Il existe au moins deux points distincts, communs aux frontières de S et de D.**

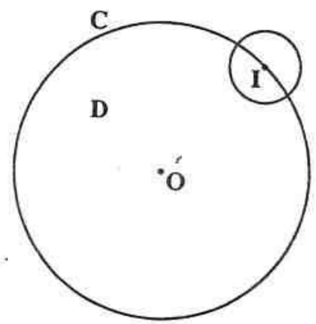


fig. 2

a) Si tous les points de S étaient intérieurs à D, l'ensemble des distances des points de S au centre 0 de D serait un compact de R, strictement majoré par le rayon r de D, ce qui est absurde. De plus, un point d'intersection de S avec la frontière C de D appartient nécessairement à la frontière F de S car, s'il était intérieur à S, il serait le centre d'une boule ouverte contenue dans S, et certains points de cette boule n'appartiendraient pas à D (*fig. 2*).
Il existe donc au moins un point A de F appartenant également à C. Montrons qu'il en existe un deuxième.

b) Définissons, pour tout point M de S distinct de A, le réel positif k_M de la façon

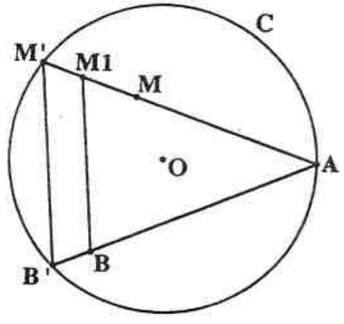


fig. 3

suivante :
Soit M' le point où la demi-droite [AM) recoupe C (*fig. 3, ci-après*), c'est-à-dire l'autre extrémité de la corde de support (AM) ; on pose k_M = AM/AM' .
L'ensemble des k_M est évidemment majoré par 1. Montrons qu'il contient 1.
En effet, s'il avait pour plus grand élément k < 1, on pourrait trouver un point B de S tel que k_B = k (B' étant l'extrémité de la corde correspondante).
Dans ce cas, l'homothétie h de centre A et de rapport k est telle que h(B') = B. Posons D' = h(D).
De plus, pour tout point M de S distinct de A, on a

$$0 < \frac{AM}{AM'} = k_M \leq k$$

, donc h(M') est un point M_1 tel que $M \in]AM_1[$. Par conséquent $h^{-1}(M)$ appartient à]AM'[: le point $h^{-1}(M)$ est donc intérieur à D, et il s'ensuit que M est intérieur à h(D,) de rayon kr < r, ce qui est absurde.
Il existe donc un point B de S, distinct de A, tel que k_B = AB/AB' = 1, c'est-à-dire que B appartient à C.

<u>*Remarque*</u> : si S est un polygone, les deux points précédents en sont des sommets.
En effet, si l'un des points communs aux frontières du disque D et du polygone S était un point intérieur à l'un des côtés, [MN], du polygone :
- ou bien [MN] serait tangent à C, et alors les sommets M et N seraient extérieurs au disque (contradiction) ;
- ou bien [MN] serait sécant à C, et alors l'un des deux sommets M ou N serait intérieur au disque, et l'autre extérieur (contradiction).

Proposition 3: Si S a un centre de symétrie, il s'agit du centre 0 de D.

Soit Ω le centre de symétrie de S (ce centre est unique, puisque S est bornée), supposé distinct de O, et soit s la symétrie par rapport à Ω.
On a S = s(S) ⊂ s(D). S est donc incluse dans l'intersection de D et de s(D), ces disques étant de rayon minimum r et de centres distincts O et s(O). Ceci est en contradiction avec la proposition 1.

<u>Conséquence</u> : si un point de S appartient à la frontière C de D, il en est de même de son symétrique.

Proposition 4 : Si S a un axe de symétrie, cet axe contient le centre 0 de D.

PETIT VERT N°52. DECEMBRE 1997

Soit Δ un axe de symétrie de S, et supposons que O ∉ Δ. Soit σ la symétrie par rapport à Δ. La démonstration est la même que la précédente, en remplaçant s par σ.
Même conséquence que ci-dessus.

Proposition 5: Si S est un triangle, la frontière C de D est :
- dans le cas où les trois angles du triangle sont aigus : le cercle circonscrit
- sinon : le cercle ayant pour diamètre le plus grand des trois côtés.

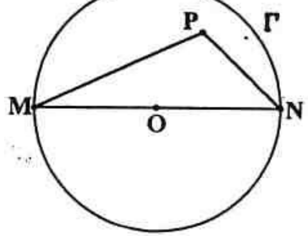


fig. 4

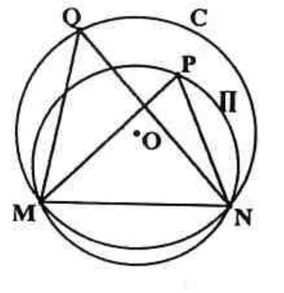


fig. 5

Soit MNP le triangle, [MN] son plus grand côté et G le cercle de diamètre [MN].
On a nécessairement d ≥ MN.
a) si l'angle MNP est obtus, on a exactement d = MN, car le sommet P est intérieur à G (*fig. 4*); donc D est le disque de frontière G en raison de l'unicité.

b) si l'angle MNP est droit, on a le même résultat.

c) si l'angle MNP est aigu, le triangle MNP a ses trois angles aigus. D'après la proposition 2, deux de ses sommets (par exemple M et N) sont sur C. Le troisième sommet (P) est donc, soit sur C, soit intérieur à C. Montrons que le second cas est impossible.

Soient Q un point quelconque de C situé dans le même demi-plan de frontière [MN] que P, et Π le cercle circonscrit au triangle MNP, de diamètre δ (*fig. 5*).
Dans le triangle MNP, on a MN/sin(MPN= = δ. De même, dans le triangle MQN, on a MN/sin(MQN) = d.
Si P est intérieur à C, on a MQN < MPN < 90°d'où sin(MQN) < sin(MPN) < 1, et δ > d, ce qui contredit le fait que, par définition de C, on a d ≤ δ.
Par conséquent, le point P appartient à C, d'où C = Π.

Appliquons maintenant ces résultats à notre problème :

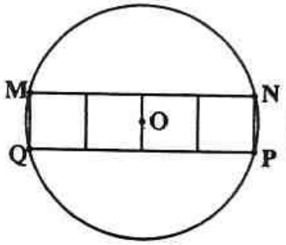


fig. 6

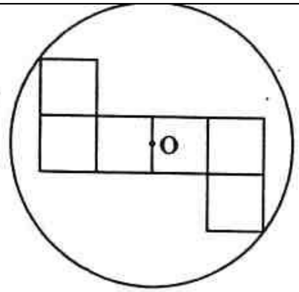


fig. 7

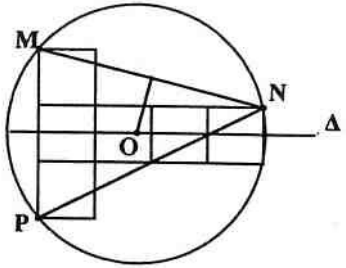


fig. 8

1°) Soit la surface rectangulaire MNPQ constituée de 4 carrés alignés ; la frontière du disque D (*fig. 6*) est le cercle circonscrit au triangle rectangle MNP (proposition 5). Si maintenant on ajoute deux carrés pour obtenir le développement n° 1, on vérifie aisément que ces carrés sont intérieurs à D, qui est le disque cherché. Même chose pour le développement n° 2. Dans ce cas, on a donc $a = d/\sqrt{17}$… Malheureusement, ceci ne s'applique pas aux développements n^{os} 3, 4, 5 et 6.

2°) Pour le développement n° 3, on remarque qu'il possède un centre de symétrie O, ce qui permet de déterminer le disque D (proposition 3) en considérant les points de S les plus éloignés de O (*fig. 7*). On a ici a = d/5.

3°) De même, le développement n° 4 possède un axe de symétrie D, donc le centre O de D se trouve sur D (proposition 4). Considérons le triangle acutangle MNP (*fig. 8*) : il est inscriptible dans un cercle C dont le centre O est l'intersection de la médiatrice de [MN] avec D. On vérifie alors que le développement entier est inclus dans le disque de bord C. D'où, derechef, a = d/5.

4°) Pour les développements n^{os} 5 et 6, partons de l'ensemble de 5 carrés représenté sur la *fig. 9*. Le triangle rectangle MNP est inscriptible dans le cercle de diamètre [MP] (proposition 5), et on vérifie que le 6ème carré que l'on ajoute pour achever

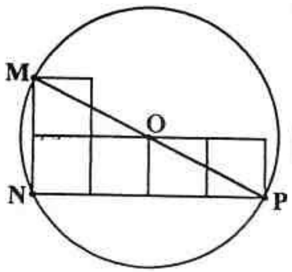


fig. 9

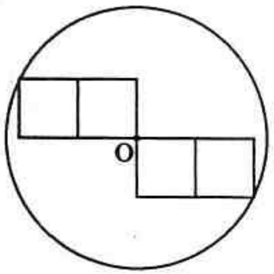


fig. 10

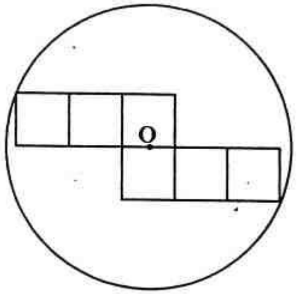


fig. 11

PETIT VERT n°52. DECEMBRE 1997

le développement est bien intérieur à ce cercle. On en déduit $a = d/2\sqrt{5}$.

5°) Considérons à présent une surface constituée de 4 carrés disposés comme sur la *fig. 10*. Elle admet un centre de symétrie, et le disque D s'obtient comme au 2°. Si maintenant nous ajoutons deux carrés pour réaliser les développements nos 7 et 8, nous pouvons vérifier sans difficulté qu'ils sont inclus dans D, et calculer que l'on a cette fois $a = 2d/\sqrt{85}$..

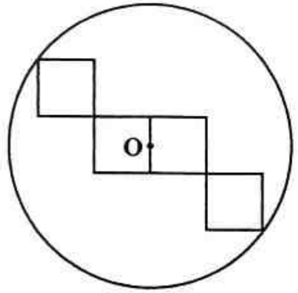
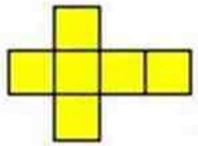


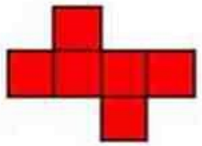
fig. 12

6°) Par contre, ceci ne vaut plus si nous ajoutons deux carrés pour constituer le développement n°9. Mais nous pouvons derechef appliquer la méthode du 5° à cette figure, qui présente elle aussi un centre de symétrie (*fig.11*) On en déduit que $a = d/\sqrt{29}$.

7°) Plaçons maintenant les 4 carrés comme sur la *fig. 12*. La méthode du 5° s'applique également ici pour obtenir le disque D. Et, si l'on ajoute deux carrés pour obtenir les développements nos 10 ou 11, on vérifie aisément qu'ils sont bien inclus dans D (d'où $a = d/2\sqrt{5}$).

Ce qui met un terme à notre recherche.





Réclame

La Régionale Lorraine vient d'acquérir un stock de brochures récemment éditées par l'A.D.C.S. (Association pour le Développement de la Culture Scientifique). Elle se propose de vendre ces brochures à ses adhérents.

LE SYSTÈME MÉTRIQUE HIER ET AUJOURD'HUI, par Louis Marquet, Albert Le Bouch et Yves Roussel. 1997.
Trois parties principales : la création du système métrique, la diffusion du système métrique, la permanence du système (S.I.) ; mais aussi des documents constitutifs de l'époque, une bibliographie détaillée, et une iconographie en quadrichromie.
Format A5 (15x21 cm), 270 g. Prix : 150 F (95 F pour les adhérents A.P.M.E.P.) + frais de port 19 F.

JEUX MATHÉMATIQUES DU « SCIENTIFIC AMERICAN », par Martin Gardner.
La réédition en langue française de ce livre publié pour la 1ère fois en 1979 et épuisé depuis plus de 15 ans fera le régal de celles et ceux qui l'ont maintes fois réclamé, et aussi de ceux qui découvriront ce livre pour la première fois.
Citons quelques titres de chapitres : canevas et nombres premiers, ricochets de boules, combinatoire, système ternaire, le Pont au Ânes (théorème de Pythagore), la cycloïde, théorie des graphes, limites de séries...
Format A5 (15x21 cm), 330 g. Prix : 150 F + frais de port 19 F (franco de port pour les adhérents A.P.M.E.P.).

Pour commander ces brochures, écrire à Roger CARDOT, 5 route de Saffais, 54360-BARBONVILLE, en joignant un chèque à l'ordre de l'A.P.M.E.P.
On peut aussi venir les retirer directement à l'I.R.E.M. (sans frais de port).

PETIT VERT N°52. DECEMBRE 1997

SOMMAIRE

LE PETIT VERT

(BULLETIN DE LA RÉGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

Directeur de la publication : Jacques VERDIER

N° CPPAP : 2 814 D 73 S. ISSN : 0760-9825. Dépôt légal : 1997.

Imprimé au siège de l'Association :

IREM (Faculté des Sciences), Boulevard des Aiguillettes, VANDOEUVRE

Ce numéro a été tiré à 525 exemplaires.

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 20 FRANCS (*)

NOM :

ADRESSE :

Désire m'abonner pour un an (année civile) au "PETIT VERT"

Signature :

Joindre règlement à l'ordre de : APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)

(*) L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents l'A.P.M.E.P.