

## GRAND MINI PETIT MAXI

### Utilisation en classe d'une activité suggérée par le problème n°75 du Petit Vert

François DROUIN  
Groupe Jeux de la régionale  
Francois.Drouin@ac-nancy-metz.fr

En classe de sixième, cinq ou dix minutes avant la fin de l'heure, je place les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 dans une grille 3x3. En bout de ligne, j'indique les produits des nombres de chaque colonne et de chaque ligne. Je m'assure que tous les élèves ont parfaitement compris comment mes calculs ont été faits.

Je leur propose ensuite une grille comme celle ci-contre en leur précisant que je ne leur dis pas où sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Je leur demande de rechercher pour la fois suivante où étaient mis ces nombres. L'usage de la calculatrice est autorisé et même conseillé (comment l'interdire pour une recherche à la maison ???). De plus, je leur précise que nous verrons ensemble les méthodes explorées par chacun.

			6
			160
			378
72	56	90	

La fois suivante, peu d'élèves ont réussi la grille. L'examen des méthodes essayées est alors d'un grand intérêt. Dans la plus-part des cas, les élèves ont fait leurs essais au hasard, certains montrent des solutions fausses présentant plusieurs fois le même nombre, d'autres, enfin, présentent une solution correcte, mais ne peuvent expliciter leur démarche (aide extérieure qui s'est limitée à chercher et à trouver à la place de l'élève ?).

Si aucune solution correcte n'est proposée, je relance la recherche sur la grille proposée la fois précédente. Sinon je propose une nouvelle grille...

Grande question : en observant les 6 produits proposés, peut-on à coup sûr trouver la place de certains de ces nombres ? Selon les souvenirs de choses vues les classes précédentes, la place du nombre 5 est souvent trouvée. Il est temps de voir ou revoir les classiques critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9. Il est aussi intéressant de faire comprendre que pour qu'un nombre soit divisible par 6, il faut qu'il soit divisible par 2 et par 3 et que si le nombre est pair et divisible par 9, il est divisible par  $2 \times 9$ , c'est-à-dire par 18 donc par 6 et par 3.

Après ces précisions, le placement du nombre 5 est immédiat. Pour le nombre 9,

### Problème du trimestre n°77

proposé par Michel HENRY (Besançon), qui le tient de Marcel CANDAMINE

On considère l'équation :

$$1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{\dots}}} = 3 + \frac{4}{3 + \frac{4}{3 + \frac{4}{\dots}}}$$

Il y a  $n$  traits de fraction de part et d'autre du signe égal.

-1 est solution évidente de l'équation. Soit  $x_n$  l'autre solution.

Étudier la suite  $(x_n)$ .

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à  
PoI LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES.

### Solution du problème n°76

proposé par Philippe FÉVOTTE, de Mont-sur-Meurthe

On considère la pile de  $n$  étages-ci-contre.

On procède à l'expérience aléatoire suivante : on tire au hasard un nombre  $p_1$  entre 1 et  $n$ , et on supprime les cases  $p_1$  à  $n$ . La pile comporte donc désormais  $p_1 - 1$  étages.

On recommence l'opération : on tire au hasard un nombre  $p_2$  compris entre 1 et  $p_1 - 1$  et on retire les étages  $p_2$  à  $p_1 - 1$ , et ainsi de suite...

Soit  $X$  le nombre de tirages nécessaires pour faire disparaître la

$n$
$n-1$
...
3
2
1

Une solution très, très, complète de Joël Kieffer, trois autres, plus sobres, de Renaud Dehaye, Loïc Terrier et Jacques Choné.

Ces deux dernières solutions établissent par récurrence sur  $n$  que l'espérance de la variable pour une pile de  $n$  étages est égale au  $n$ <sup>ième</sup> terme de la série harmonique :  $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ .

Loïc Terrier fait remarquer que cette espérance est donc du même ordre de grandeur que  $\ln n$ . Il indique par ailleurs que " *un raisonnement heuristique donne le bon ordre de grandeur : si on suppose que, grosso modo, la pile diminue de moitié à chaque coup, on obtient un temps de  $\ln(k)/\ln(2)$ ...* "

Joël Kieffer étudie la loi de probabilité de la variable ; il établit ainsi que la

(Suite page 22)

## ET AISS SÉMA FOM MËCHEL SI HOUSS

Le problème ci-dessous est inspiré de l'ouvrage d'Henry Bréjoud " La pratique du calcul en 7° " (1960), page 84, énoncé n° 648.

Nous donnons son interprétation en patois platt de Porcellette (Moselle), avec une traduction française.

Lire à la française avec une musique germanique. Un e gras, ou un a gras se prononce .Le **ch** gras est guttural, il donne une espèce de r roulé (comme la j espagnole). Les h se prononcent. Un ë se prononce entre i et é.

Et aiss séma fom Mëchel si houss és richtich véa coma tzén méta lang. Méchel hat de léngue mét e méta gemèst oun hat féa méta drissich gefoun.

A hat ava alles gout gemach.

Ouf oïnmöl méerkt a dat si méta ze kouatz éss oun dat e paa zèntiméta fèlen.

Vifil zèntiméta félen ?

Vén a de braïte mét em méta gemésst hét, hét a dréi coma funef méta gefoun.

Ven a, mét dése geméste léngue oun braïte, de flaiche fom ess séma geraicht hét, vé falch véa de antvoat gewên ?

*La salle à manger de la maison de Michel mesure réellement 4,10 mètres de long.*

*Michel a mesuré la longueur avec un mètre et a trouvé 4 mètres 30.*

*Il a pourtant tout bien fait.*

*Tout à coup il remarque que le mètre est trop court et qu'il manque quelques centimètres.*

*Combien de centimètres manquent ?*

*S'il avait mesuré la largeur avec le mètre, il aurait trouvé 3,25 mètres.*

*S'il avait, avec ces longueur et largeur mesurées, calculé la surface de la salle à manger, à quel point la réponse aurait elle été fausse ?*



Envoyer vos solutions (rédigées en platt par vos élèves) à Martine.Dechoux@wanadoo.fr

les placements possibles sont notés (sur la grille proposée ci-dessus deux placements sont possibles pour le nombre 9 dans la ligne inférieure...). Par la suite la grille se complète assez vite.

			<b>6</b>
		<b>5</b>	<b>160</b>
<b>(9)</b>		<b>(9)</b>	<b>378</b>
<b>72</b>	<b>56</b>	<b>90</b>	

L'examen de la troisième colonne nous fait aborder l'opération à trous  $\dots \times 5 \times 9 = 90$  et le sens de la division.

Le nombre 7 pourrait être rapidement placé. Cependant le rôle des nombres premiers ne sera rencontré qu'en classe de seconde et aucun critère simple de divisibilité par 7 n'est présenté aux élèves.

Les élèves ayant compris qu'avec l'étude des placements des nombres 5 et 9, la recherche était facilitée, je leur propose une nouvelle grille. Celle-ci est résolue sans trop de problème par un grand nombre d'élèves. Ceux-ci vont à la rescousse des élèves encore en difficulté.

Je leur propose ensuite de créer une nouvelle grille et de la proposer comme nouvelle recherche à leur voisin de table. Cette activité les motive beaucoup : ils ont peut-être peiné pour résoudre la grille que je leur avais proposée, mais ils réussissent tous à en concevoir une nouvelle. Je suis bien conscient que ,dans ces deux phases, le niveau de difficulté est différent, mais cette mise en situation de réussite des élèves ayant dû être aidés leur permet d'accepter d'aller plus loin dans l'exploitation de ce " jeu ".

Ces nouvelles grilles créées par les élèves vont me permettre d'introduire un défi à l'intérieur de la classe.

Chaque élève a devant lui la grille qu'il a construit. Je lui précise qu'il a obtenu six produits. Parmi ces six nombres, l'un est le plus grand et sera entouré en rouge. L'autre est le plus petit et sera entouré en vert. Parmi les grilles construites, j'aimerais connaître le nombre entouré en rouge le plus petit possible et le nombre entouré en vert le plus grand possible. Cela revient à chercher le plus petit des maximums et le plus grand des minimums (formulation perturbant quelque peu les élèves...). Nous affichons au tableau les différents records pour le nombre " rouge " et pour le nombre " vert ". En fin d'heure, ces résultats sont affichés dans la salle de classe et constituent les records actuels de la classe.

Il est à noter que les records évoluent petit à petit et sont améliorés les fois suivantes. Cette activité proposée régulièrement en classe et lors de stages de formation nous laissait apparaître 90 comme " petit maximum " et 56 comme " grand minimum ". La question s'est évidemment posée de savoir si ces records sont les bons et si nous pouvons le prouver...D'autres questions annexes

pouvaient surgir : les deux records font-ils nécessairement partie de la même grille (lors de l'évolution en classe des records partiels, cela n'est pas le cas...).

La solution au problème n° 75 proposé dans le Petit Vert n°76 nous apporte une preuve qu'empiriquement nous étions sur la bonne voie. André Stef nous montre que le plus petit maximum ne peut pas dépasser 92. Nous avons trouvé 90, or 91 et 92 ne peuvent pas être obtenus comme produits de trois entiers différents inférieurs à 10. 90 est donc le nombre cherché. Comme l'écart minimum entre les nombres est 36 (voir Petit Vert n° 76), le travail d'André Stef valide également les conjectures faites par les élèves.

Je pense vous avoir convaincu de l'intérêt de proposer ces grilles et le défi annexe en classe de sixième. J'aimerais que nos collègues enseignant en classe de seconde n'hésitent pas à les utiliser eux aussi : l'apport supplémentaire des nombres premiers facilite le placement du nombre " 7 ". La décomposition en produit de facteurs premiers des produits proposés n'est pas à négliger...

Des prolongements de cette activité sont possibles. Nous avons multiplié, nous pourrions additionner. Les nombres indiqués seront les sommes des trois nombres de chaque ligne ou de chaque colonne (voir grille ci-contre).

Les élèves pensent que ces grilles sont plus faciles à remplir. Ils se trompent, il n'y a plus de nombre pouvant se placer rapidement...

Le défi de l'écart minimal entre le maximum et le minimum peut aussi être proposé. Nous connaissons tous cependant le carré magique formé des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 et nous savons que grâce à la caractérisation de ces carrés magiques, nous obtiendrons six sommes égales à 15. Parvenir à ses sommes égales est à chaque fois un étonnement pour les élèves.

Ces grilles utilisant les produits et les sommes sont présentées dans la brochure " JEUX 2 " de l'APMEP. Les deux grilles présentées dans cet article en sont d'ailleurs extraites.

Quelque temps auparavant, la revue " Le Petit Archimède ", éditée par l'A.D.C.S avait également évoqué ces grilles. Les triangles équilatéraux utilisaient également les entiers de 1 à 9 et les hexagones réguliers les entiers de 1 à 12 (voir haut de la page suivante).

Les thèmes de recherche proposés avec les carrés restent valables. Cependant les  
(Suite page 7)

			16
			17
			12
6	21	18	

## Cube magique parfait d'ordre 5

Le 18 novembre 2003, Walter Trump (professeur de mathématiques allemand) et Christian Boyer (ingénieur informatique français) ont annoncé la découverte d'un cube magique parfait d'ordre 5, résolvant ainsi la question (ouverte depuis fort longtemps) de l'existence d'un tel cube.

Rappelons qu'un cube magique d'ordre  $n$  est un tableau de  $n^3$  entiers, tel que les  $n^2$  rangées, les  $n^2$  colonnes et les  $n^2$  piles, ainsi que les 4 diagonales, aient toutes la même somme  $S(n)$ , appelée 'constante' du cube. Si de plus le cube est constitué des entiers consécutifs  $1, 2, \dots, n^3$ , on dit que c'est un cube magique 'normal' ; on démontre alors aisément que  $S(n) = n(n^3+1)/2$ . Pour le cube d'ordre 5, cette constante vaut 315, et la valeur centrale du cube vaut 63 (démonstration de Richard Schroepel, 1972).

Si en outre les diagonales des  $6n$  'tranches' du cube (horizontales, verticales d'une direction et verticales de l'autre direction) ont aussi pour somme  $S(n)$ , le cube magique est dit parfait.

Depuis fort longtemps, on se demandait s'il était possible de trouver des cubes magiques parfaits d'ordre 5 ou d'ordre 6. Paradoxalement, il est plus facile de construire un cube magique parfait de grandes dimensions qu'un nain comme celui qui vient d'être découvert. Dès 1866, le révérend anglais Andrew Frost a décrit un cube d'ordre 7. En 1875, Gustavus Frankenstein en a conçu un d'ordre 8. Frederick Barnard, en 1888, un d'ordre 11. Courant 2003, Christian Boyer en a imaginé un d'ordre 8 192. Un monstre, magique même quand on élève les nombres contenus dans ses cellules au carré ou au cube (ce qu'on appelle un cube trimagique). Le plus petit cube parfait trimagique connu actuellement est d'ordre  $n = 256$ ...

Voici le cube découvert par Trump et Boyer :

25	16	80	104	90	91	77	71	6	70	47	61	45	76	86	31	53	112	109	10	121	108	7	20	59
115	98	4	1	97	52	64	117	69	13	107	43	38	33	94	12	82	34	87	100	29	28	122	125	11
42	111	85	2	75	30	118	21	123	23	89	68	63	58	37	103	3	105	8	96	51	15	41	124	84
66	72	27	102	48	26	39	92	44	114	32	93	88	83	19	113	57	9	62	74	78	54	99	24	60
67	18	119	106	5	116	17	14	73	95	40	50	81	65	79	56	120	55	49	35	36	110	46	22	101

Pour plus de renseignements, consulter le site d'Eric Weisstein : <http://mathworld.wolfram.com/> (en anglais).

N.B. Dans le **PETIT VERT** n°17 de mars 1989, André **VRICEL** nous proposait un carré bimagique parfait d'ordre 25, construit d'après la méthode de J. BOUTELOUP (on n'utilisait pas encore l'informatique pour les construire !), et annonçait également un carré trimagique d'ordre 32 (publié dans " **LE PETIT ARCHIMÈDE** ").

ethnomathématiques. Compte rendu des conférences et des ateliers sur ces thèmes (certains articles sont en anglais).

N°48. **LA MÉMOIRE DES NOMBRES**, par la commission Inter-IREM d'épistémologie et de mathématiques : actes du X<sup>e</sup> colloque de cette commission, Cherbourg, mai 1994.

Ouvrage de 708 pages ; cinq sections : le statut des nombres, la représentation des nombres, la diversité des nombres, la théorie des nombres (inclut la démonstration du théorème de Fermat par André Wiles), l'espace et les nombres.

N°49. **CONTRIBUTION A UNE APPROCHE HISTORIQUE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES**, par la commission Inter-IREM d'épistémologie et de mathématiques : actes de la 6<sup>ème</sup> université d'été de cette commission, Besançon, juillet 1995.

Ouvrage de 494 pages ; six thèmes traités : la construction des savoirs mathématiques ; histoire des probabilités et des statistiques ; mathématiques et philosophe ; art et mathématique ; histoire, épistémologie et enseignement des mathématiques ; mathématiques : images et modèles.

Ouvrage de 494 pages ; six thèmes traités : la construction des savoirs mathématiques ; histoire des probabilités et des statistiques ; mathématiques et philosophe ; art et mathématique ; histoire, épistémologie et enseignement des mathématiques ; mathématiques : images et modèles.

N°50. **ANALYSE ET DÉMARCHE ANALYTIQUE : LES NEVEUX DE DESCARTES**, par la commission Inter-IREM d'épistémologie et de mathématiques : actes du XI<sup>ème</sup> colloque de cette commission, Reims, mai 1996.

Actes du XI<sup>ème</sup> colloque de cette commission, Reims, mai 1996.

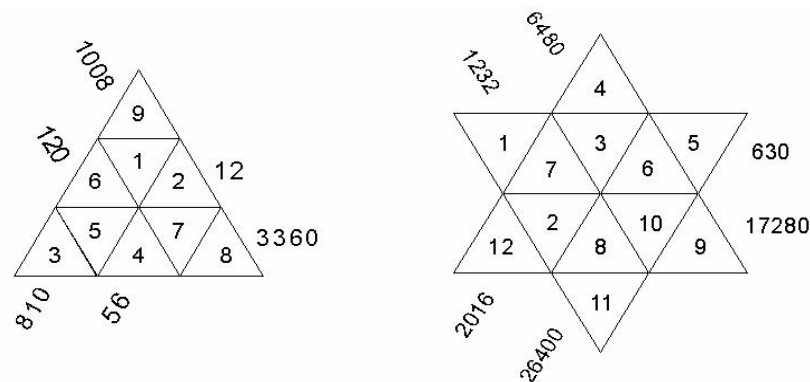
Associer les termes analyse et analytique semble, littéralement, aller de soi. Pourtant, la séparation entre le chapitre sur la géométrie analytique et celui sur l'analyse est tellement habituelle dans les programmes de mathématiques, que n'est jamais interrogé le rapport existant entre ces deux domaines, que recouvrirait la racine commune de leurs appellations. Or, l'histoire des mathématiques permet en même temps de comprendre les relations entre la géométrie analytique et l'analyse, et de saisir ce qui est propre aux différents actes du mathématicien lorsqu'il résout un problème géométrique ou quand il étudie une fonction. 398 pages.

## Comprend qui pourra !

### Recul des dépenses liées à l'environnement :

En 2001, la dépense pour la protection de l'environnement s'est élevée à 26,7 milliards d'euros, soit une progression de 3,7 selon l'IFEN. Cette progression est à comparer aux 5,4% d'augmentation réalisés en 2000. Cette baisse s'explique en partie par la diminution des investissements...

*Mensuel "HYDROPLUS", septembre 2003*



(Suite de la page 6)

produits de cinq nombres qui apparaissent m'incitent à ne pas proposer ces configurations à mes élèves de sixième. Les collègues enseignant en classe de seconde auront sans doute un autre regard que moi...

Dans le cas des grilles multiplicatives carrées, le produit des nombres écrits horizontalement est égal au produit des nombres écrits verticalement et est égal à  $9!$ . La résolution de grilles incomplètes telles ci-contre est alors possible.

			504
			120
36		126	

Parmi les lecteurs du Petit Vert, il y en a sans doute qui ont des élèves susceptibles de résoudre cette variante.

Dans le cas d'une grille multiplicatrice triangulaire, les nombres formant les "pointes" peuvent être trouvés rapidement en divisant  $9!$  par le produit des deux nombres formant les lignes sous la pointe (dans l'exemple ci-contre, 9 est égal à  $9!$  divisé par  $12 \times 3360$ ). Une grille ayant les nombres 5 et 7 dans ses pointes est donc plus facile qu'une grille ayant ces nombres dans sa zone centrale.

La même méthode appliquée aux grilles multiplicatives hexagonales ne fait pas connaître aussi rapidement les nombres contenus dans les pointes.

J'ai voulu dans ces quelques lignes montrer l'intérêt de l'introduction de ces grilles (et des défis associés) dans nos classes, de la sixième aux différentes classes de lycée. J'ai voulu aussi montrer que ce jeu d'apparence simple peut révéler quelques contenus mathématiques moins immédiats (la solution proposée par André Stef au problème 75 me conforte dans cette idée).