LE PETIT VERT

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N° 93	**MARS 2008**	Abonnement 4 n^{os} par an : 5,80 €

SOMMAIRE

Retour sommaire

« LE PETIT VERT » est le bulletin de la Régionale Lorraine A.P.M.E .P..
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il paraît quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).
Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la « vie mathématique » locale, et d'autre part de permettre les échanges entre les adhérents.
On y trouve un éditorial (rédigé par un membre du Comité) et diverses annonces, les rubriques « problèmes », « dans la classe » et « maths et média », et parfois une « étude mathématique ». Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article, et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à :
jacverdier@orange.fr et christophe.walentin@wanadoo.fr

Information

Que les lecteurs soucieux de recevoir leur Petit Vert « électronique » régulièrement n'hésitent pas à nous signaler tout changement d'adresse électronique !

Merci

Retour sommaire

édito

MILITANT

Je vais m'adresser à vous qui n'êtes pas encore adhérents à l'APMEP, que vous soyez stagiaire, jeune enseignant ou bien professeur aguerri. Je vais m'adresser à vous, qui faites partie de notre association depuis quelques années en vous posant la légitimité de rester.

En ces temps d'avenir flou, de bivalence plus ou moins imposée, de socle plus ou moins stabilisé, de notation plus ou moins pernicieuse, de démotivation plus ou moins forte, il reste un lieu où vous avez tout à gagner. Etre adhérent, c'est être militant, c'est voir des pratiques et des activités dont vous pourrez vous inspirer sans qu'elles vous soient imposées, c'est rencontrer des passionnés qui ne demandent qu'à vous convaincre qu'une autre façon de travailler est possible, c'est échanger des points de vue sur les mathématiques mais aussi sur le métier en lui–même, c'est « vider son sac » et avoir des coups de gueule pour redonner des couleurs à vos coups de blues, c'est tout simplement avoir le sentiment d'avancer, d'avoir des moments de respiration au moment où vous avez le sentiment qu'on vous étouffe, de « travailler plus pour gagner plus ».

Oui, j'ose cette formule, pas dans le sens capitalistico–économique mais dans le sens de votre bien être, à vous enseignants. Lorsqu'on milite à l'APMEP, on donne plus en temps mais ce que l'on récolte ce n'est pas du pouvoir d'achat supplémentaire, c'est du pouvoir de meilleur être et même si cela ne se voit pas sur le bulletin de paie, votre envie décuplée, vos joies partagées avec les élèves, tout ceci va se capitaliser.

Bien sûr, sur Internet, en un seul clic, on peut tout trouver, mais ne risquez-vous pas de tomber sur des denrées qui à la longue deviennent périssables ? Et si vous optiez pour le développement durable en venant à l'APMEP ? Pas d'engrais, pas de pesticide, pas d'OGM, rien que du naturel, rien que du bio !! Dois-je rajouter qu'une énorme partie de ce que vous versez à l'APMEP peut être déduit de vos impôts ?

Je suis militant depuis bientôt 10 ans, et même si parfois ma vie privée me mange du temps, et même si parfois je rentre à la maison en me disant que je suis fatigué de ce métier où les élèves et les parents me considèrent comme un nanti, le fait de savoir que je suis entouré par des collègues, des amis, que je peux me ressourcer au sein d'une équipe telle que l'APMEP, ceci me redonne un coup de fouet et l'envie d'en découdre.

Venez nous rejoindre, la porte est grande ouverte et on peut pousser les murs…

Philippe SIMONIN

Retour sommaire

DANS NOS CLASSES

Équations du second degré au Moyen-Orient (suite)

Anne Gaydon,
Gilles Waehren,
commission histoire APMEP Lorraine

La première partie de cet article est parue dans le Petit vert n° 92 de décembre 2007. Elle traitait des équations babyloniennes.

Introduction générale : objectifs et mode de fonctionnement

Dans le cadre de la commission « histoire et épistémologie », nous avons travaillé sur une approche historique de la résolution des équations. Dans nos classes respectives (seconde et première S) nous avons proposé des activités (voir en annexe) sur ce thème.
Les objectifs étaient multiples :
- donner une perspective historique au travail effectué en lycée sur les équations du second degré ;
- mettre en évidence l'existence de méthodes variées pour résoudre ces équations (autres que la factorisation utilisée en seconde ou la méthode du discriminant vue en première) ;
- envisager la résolution de problèmes algébriques à l'aide d'une construction géométrique.

Les activités ont été proposées en classe (travail de groupe ou individuel avec mise en commun). Chacun de nous a élaboré des fiches de travail différentes dont l'exploitation en classe a nécessité entre une heure et demie et trois heures selon le document utilisé.

Deuxième partie : les équations du second degré chez Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi est un mathématicien arabe du IX$^{\text{ème}}$ siècle de notre ère. Il exerce principalement à Bagdad où il compose sa grande œuvre, "Précis de calcul de al Jabr' et al-Muqābala", dans laquelle il pose les bases du calcul algébrique nécessaire à la résolution des équations. Pour les problèmes du second degré, il établit une liste de cinq équations qui se résolvent chacune par une méthode spécifique. Comme cela se pratique encore à l'époque, les problèmes algébriques ont tous leur pendant géométrique, héritage de la tradition grecque ainsi qu'on le constate dans cette première méthode.

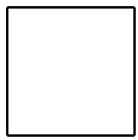
Retour sommaire

La démarche d'Al-Kwarizmi est différente de celle des Babyloniens :
- il fait un inventaire des équations du second degré et montre qu'elle se ramènent à l'une des équations suivantes : $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $x^2 + bx = c$; $x^2 + c = bx$; $bx + c = x^2$;
- il utilise pour cela deux opérations :
    - "al jabr" transposition des termes négatifs dans l'autre membre ;
    - "al muqabala" réduction de termes semblables dans les deux membres ;
- il propose une justification géométrique de chaque résolution (ce qui correspond à la mise sous forme canonique).

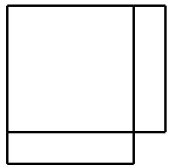
Dans la classe de Gilles

Concernant la résolution des équations de la forme $x^2 + bx = c$, Al-Khwarizmi suggère un cas particulier du type "Résoudre $x^2 + 4x = 32$".
La démarche à suivre ressemble à celle-ci

On considère un carré de côté x

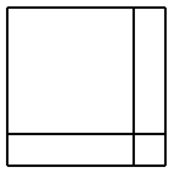


On le complète par deux rectangles de dimensions x et 2
L'aire de la figure obtenue est $x^2 + 4x$.



Le petit carré d'aire 4 complète la figure en un grand carré d'aire $(x + 2)^2$ ou 32 + 4.

Donc il faut résoudre $(x + 2)^2 = 36$ … ou $(x + 2)^2 - 36 = 0$.



Dans ce cas, la méthode géométrique est historiquement avérée. Les conditions d'utilisation mieux définies et les étapes plus claires rendent l'algorithme plus accessible aux élèves, si ce n'est la mise en équation finale qui semble triviale… *a posteriori*. En effet, il faut pour cela bien avoir en mémoire les différentes phases du raisonnement. La solution négative est, une fois encore, écartée alors que le problème n'impose pas de quantités positives *a priori*. Rappelons ici que, si l'on sait opérer sur les nombres négatifs au moins depuis le premier siècle de notre ère, ces nombres ne seront acceptés que tardivement comme solution d'un problème (en Europe, Cardan qui au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle admettra l'existence de racine

Retour sommaire

négative d'une équation). On peut penser que les solutions négatives d'une équation ne faisaient pas partie des mathématiques d'Al-Khwarizmi.
Comme pour les équations babyloniennes, les élèves ont réinvesti sans difficulté la méthode pour résoudre d'autres équations du même type $x^2 + bx = c$; mais il ne leur a pas été proposé d'équation sans solution ni d'autres types d'équations parmi celles étudiées par Al-Kwarizmi.

D'autre part, il est intéressant de noter que, si cette activité fonctionne bien avec des élèves de seconde, elle illustre aussi parfaitement le passage à la forme canonique en première (dans les cas appropriés) guidant même certains élèves dans la recherche de cette expression, surtout quand ils manquent d'affinités avec les identités remarquables !
Sur l'exemple précédent, on peut déterminer la forme canonique de $x^2 + 4x - 32$ puisque, la figure totale ayant comme aire $(x + 2)^2$, l'aire du gnomon (le grand carré et les deux rectangles) est l'aire totale amputée de celle du petit carré soit $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$ d'où $x^2 + 4x - 32 = (x + 2)^2 - 36$.

Conclusion

En général, nos élèves sont familiarisés avec la mise en équation de problèmes géométriques qui devient parfois un prétexte pour calculer. Le problème babylonien en est un exemple. Ce qui est moins banal dans leur formation, c'est d'envisager que la résolution d'une équation puisse passer par une construction géométrique. L'algorithme graphique s'impose alors comme une évidence ; il est ensuite consolidé par le travail algébrique.

Dans la classe de Anne

Le problème (voir annexes, document 6) extrait du manuel d'Al-Khwarizmi propose la résolution de l'équation $x^2 + 21 = 10x$.

La solution utilise les formules $x' = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ et $x''' = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ où b est le coefficient de x dans le second membre de l'équation et c le coefficient constant ; ces formules de calcul sont celles utilisées pour résoudre en classe de première une équation du second degré (qui correspondent à la résolution de l'équation $x^2 - 10x + 21 = 0$).
Les élèves lisent le texte et écrivent en langage mathématique actuel les calculs effectués.

Retour sommaire

L'obtention d'une solution les satisfait en général et l'expression « Si tu le désires ajoute cela à la moitié des racines … » conduit certains à penser qu'il n'est pas nécessaire de déterminer une autre solution.
Certains élèves ne voient pas la nécessité de déterminer toutes les solutions. Historiquement, la recherche exhaustive des solutions est une démarche relativement récente.

En utilisant la même méthode ils essayent de résoudre deux autres équations dont l'une n'a pas de solutions réelles.

Une heure est consacrée au bilan du travail.
On vérifie les solutions trouvées pour les deux premières équations.
Pour la troisième équation il y a un problème : un réel négatif n'a pas de racine carrée dans **R** ; doit-on en déduire que la méthode ne marche pas ou bien qu'il n'y a pas de solution ? On va alors rappeler la remarque d'Antoine et suggérer aux élèves une vérification graphique. La résolution graphique proposée par Antoine pour le problème babylonien va permettre de répondre à la question. Les élèves tracent la courbe d'équation $y = x^2 - 4x + 10$ et cherchent son intersection avec l'axe des abscisses.
Le problème de l'existence de solutions est alors posé (et l'observation des courbes permet de donner une réponse) ; si la lecture graphique ne donne pas avec exactitude les solutions d'une équation, elle permet aux élèves de justifier l'existence ou non de solution.

Bilan

Les textes historiques, au premier abord déroutants, suscitent en fait l'envie d'une recherche et d'un approfondissement afin de valider et de s'approprier une méthode inhabituelle ; les élèves ont ainsi l'impression de participer au mystère de la genèse d'une idée en mathématiques et réalisent que les mathématiques ne constituent pas un ensemble de règles fixées (et figées) mais évoluent.
Les différentes approches (algébriques, géométriques voire analytiques) suggérées par ces textes permettent de mobiliser les connaissances de seconde, d'ouvrir leur esprit sur l'existence même de plusieurs méthodes pour un seul problème ; ils les invitent à se questionner et à se rendre compte de la valeur de leur questionnement dans un domaine où ils ne sont pas considérés comme des experts.

Retour sommaire

Annexes - Les documents de travail donnés aux élèves

Document 5 (classe de Gilles, 2ème partie).

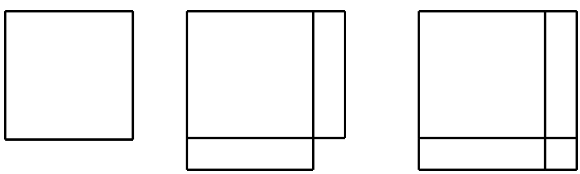
Résolution d'équation du second degré chez les Arabes au IXème siècle. La méthode d'Al-Kwarizmi.

Enoncé du problème : On considère un rectangle. La longueur ajoutée à la largeur est 14. La surface est 48. Les dimensions sont inconnues.
a) On pose x la longueur et y la largeur. Traduire l'énoncé à l'aide de deux équations.
b) Par substitution, éliminer y dans une des équations et l'écrire sans quotient. Une telle équation est appelée équation du second degré.

Résolution suggérée par le texte babylonien :	**Questions**
14 fois 14 est égal à 196 48 fois 4 est égal à 192 Tu soustrais 192 de 196 et il reste 4 4 est quel nombre multiplié par lui-même ? 2 fois 2 est égal à 4. Tu soustrais 2 de 14 et il reste 12. 12 fois 0,5 est égal à 6 6 est la largeur. Tu ajoutes 2 à 6, cela fait 8. 8 est la longueur.	a) Quelle remarque peut-on faire concernant la transition entre la 4ème et la 5ème ligne ? b) Traduire chacune des lignes de la résolution à l'aide d'égalités dépendant de x et y. Exemple $14 \times 14 = 196$ correspond à $(x + y)\times(x + y) = 196$ … c) Appliquer la méthode précédente au problème suivant : "La longueur ajoutée à la largeur est 16. La surface est 60. Les dimensions sont inconnues".

Exemple : La résolution de $x^2 + 4x = 32$.

On peut faire des figures pour les différentes étapes de la résolution :



1. On construit un carré de côté x. Son aire est …
2. Sur deux côtés de ce carré, on construit deux rectangles dont l'autre dimension est 2. La somme de leurs aires est …. L'aire de la surface obtenue est ….

Retour sommaire

3. On complète la figure ainsi obtenue en un carré en ajoutant le carré de côté 2.
L'aire totale de la figure est donc ….

La somme des aires du carré de côté x et des deux rectangles est ...
On en déduit l'égalité $x^2 + 4$ =...
Comment peut-on trouver cette égalité autrement ?
Résoudre $x^2 + 4x = 32$ revient donc à résoudre $(x + 2)^2 = 36$.
Résoudre cette équation et procéder de même avec $x^2 + 12x = 45$.

Document 6 (classe d'Anne, fiche 4)

La méthode d'Al Kwarizmi

Le mathématicien Muhammad Al Kwarizmi (780 – 850) a travaillé à Bagdad. Dans la première partie de son traité d'algèbre figurent ses travaux sur les équations du premier et du second degré.
Il indique comme les babyloniens les calculs à effectuer pour trouver les racines (les solutions) de l'équation.
Voici un exemple de résolution proposé par Al Kwarizmi

Résolution de l'équation $x^2 + 21 = 10x$
« Divise en deux les *racines* ce qui donne 5 ; multiplie 5 par lui-même tu obtiens 25 ; retire les 21 qui sont ajoutés au *carré* [de x] il reste 4 ; extrais la racine – cela donne 2 – et retire- la de la moitié des *racines*, c'est-à-dire de 5 il reste 3 ; c'est la racine que tu cherches. Si tu le désires ajoute cela [i.e. $\sqrt{4} = 2$] à la moitié des *racines* cela te donne 7 qui est la racine que tu cherches »

Vocabulaire le mot *racine* désigne le nombre x cherché, « diviser en deux les *racines* » signifie « diviser en deux le coefficient de x »

1. Ecrire en langage mathématique les calculs que l'on doit effectuer pour obtenir la solution. Combien de solutions obtient-on ?
2. En utilisant la même méthode résoudre l'équation $x^2 + 45 = 14x$.
3. Peut-on résoudre de la même façon l'équation $x^2 + 10 = 4x$?
4. Quelle méthode de résolution propose Al Kwarizmi pour les équations du second degré de la forme $x^2 + c = bx$?

Retour sommaire

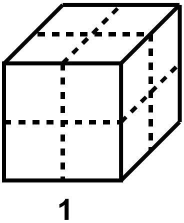
DANS NOS CLASSES

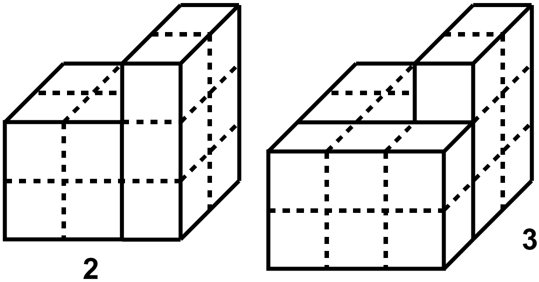
Fractions et pourcentages avec le « puzzle de Cardan »

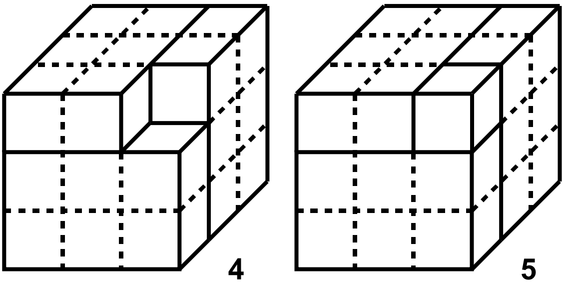
Par François DROUIN

(activité en classes de quatrième et troisième techno)

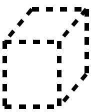
La fiche –élève :







Voici les cinq étapes de la construction d'un puzzle de Cardan. Un cube 3× 3×3 se construit petit à petit.

Numéro de l'étape	1	2	3	4	5
Nombre de cubes placés 					
Fraction du cube 3×3×3 déjà construite					
Pourcentage du cube 3 ×3×3 déjà construit					

Retour sommaire

A quelle étape puis-je dire que la moitié du cube a été construite ?

A quelle étape puis-je dire que les deux tiers du cube ont été construits ?

A quelle étape puis-je dire que moins de 10% du cube ont été construits ?

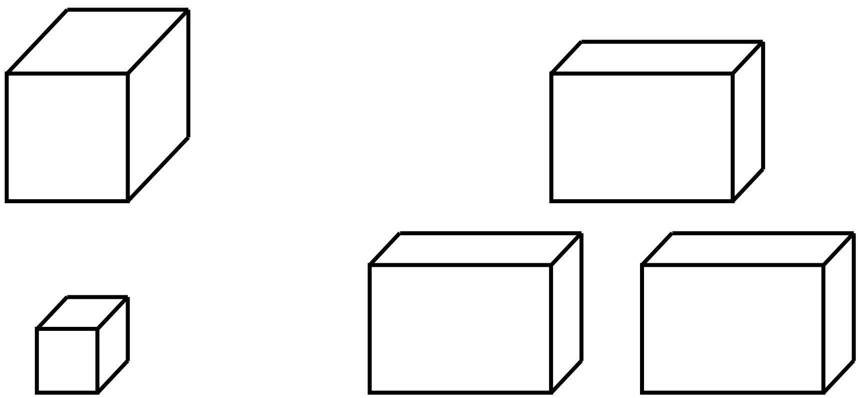
Pourquoi cette activité ?

Cette activité avait été crée il y a quelque temps pour des élèves de quatrième technologique au collège de Saint-Mihiel. Le travail sur les écritures fractionnaires et les pourcentages était ici couplé avec un travail concernant la vision dans l'espace.

D'autres puzzles ont été utilisés pour ce type d'activité : le Puzzle Q.I. Block par exemple présenté dans la brochure JEUX 5 (A.P.M.E.P. 1998). Dans tous les cas, l'auto correction était possible pour les élèves : dans la dernière colonne, ils devaient retrouver le nombre total d'« unités » placées, 1 et 100%.

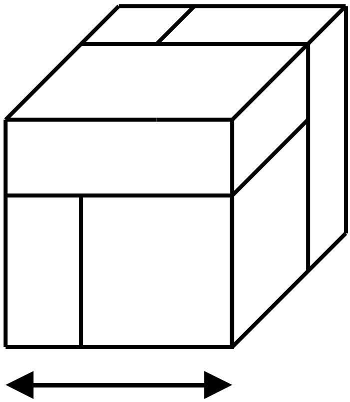
Un puzzle attribué à Cardan (1501-1576) ?

Ce puzzle est présenté dans la fiche GALION THEMES intitulée « Histoire de cubes » (GALION 1972).



Retour sommaire

Un cube de côté a, un cube de côté b et trois parallélépipèdes rectangles de côtés a, b et a + b permettent la visualisation de : **$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab (a + b)$**



Une heureuse surprise en cours d'utilisation :

Pour les élèves, la joie de retrouver les résultats attendus les a incités à demander d'autres activités de ce type.
De plus, la découverte que le remplissage de la première ligne du tableau pouvait s'assimiler à une recherche d'effectifs cumulés et le remplissage des deux autres lignes à une recherche de fréquence cumulée, de médianes ou de déciles d'une série statistique m'a donné envie de faire les années suivantes ce type d'activité bien avant d'aborder le chapitre « statistiques » et son langage spécifique.

Lors de rencontres futures avec les mots comme « effectifs cumulés » ou « fréquences cumulées », il était toujours possible de revenir à la situation avec les puzzles pour donner un peu de sens à ce vocabulaire qui effraie quelque peu les élèves (en particulier les élèves de troisième technologique destinataires à l'origine de ce type d'activité).

Liens :
http://maths-03.site2.ac-strasbourg.fr/vogel/Dossiers%20stage/Geoplan/LiensGeo/Cardan.pdf
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/viemaths/conf_exp_etc/expos/cestas/expocubes.htm

Retour sommaire

QUELQUES MATHÉMATICIENS LORRAINS (suite)

Henri Vogt

Dans un précédent Petit Vert (n°91 de septembre), nous ne citions pas, parmi les mathématiciens lorrains, Henri Vogt, qui a donné son nom au lycée de Commercy. En effet, nous ne savions ni où ni quand il était né, ni ce sur quoi il avait travaillé : les recherches sur Internet ne nous avaient apporté que peu de renseignements.
Heureusement, des collègues du lycée de Commercy nous ont fourni moult précisions sur sa vie et son œuvre. Il n'est pas lorrain de naissance (à un kilomètre près), puisque né le 24 janvier 1864 à Sermaize-les-Bains (Marne).
Il commença ses études au collège de Commercy, et suivit « l'enseignement spécial » qui permettait alors au collégien de poursuivre jusqu'au baccalauréat (bac sciences, mention AB, en 1880) ; il entra alors en mathématiques spéciales au lycée de Nancy (qui, évidemment, ne s'appelait pas encore Poincaré !) et fut reçu, à la fin de cette année, à l'École Normale Supérieure : septième de la liste des scientifiques, à dix-sept ans et demi !
En 1884, il était reçu à l'agrégation, étudia un an en Allemagne (où il trouva le sujet de sa thèse : *Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre*), fut nommé au lycée de Rennes, puis au lycée de Nancy.
En 1890, il devint maître de conférences puis (en 1899) titulaire de la chaire de Mathématiques Appliquées de la faculté des Sciences de Nancy, qu'il ne quitta plus. Il avait comme collègues Élie Cartan, titulaire de la chaire d'Analyse, et Jules Molk, de la chaire de Mécanique Rationnelle.
En 1906, il accepta de diriger l'Institut d'Electrotechnique et de Mécanique qui démarrait péniblement ; en quatre ans, il l'avait transformé en un institut moderne, riche en matériels, très apprécié quant à la formation des ingénieurs (400 élèves en 1910). En 1912, un don d'Ernest Solvay permit de construire de nouveaux bâtiments (section Electrotechnique), terminés en 1925 seulement à cause de la guerre.
Il mourut de maladie le 28 août 1927 à Tours-sur-Marne.

Il était venu présider, en 1911, la distribution des prix au collège de Commercy où il avait étudié, et recommanda trois vertus dans son discours aux élèves :

- **la persévérance dans l'effort**, citant en exemple Cugnot, de Void, inventeur de la machine à vapeur, et Pasteur ;
- **l'amour de l'ordre** : chacun doit avoir une activité ordonnée et méthodique ;
- **l'esprit de solidarité** : compter sur l'appui nécessaire d'autrui et accorder son appui à autrui.

En 1927, peu de temps avant sa mort, il présidait de nouveau cette cérémonie, recommandant aux élèves de s'exercer aux travaux à la campagne pendant leurs vacances, de s'intéresser aux excursions botaniques et géologiques, à l'agriculture et à l'industrie, afin de devenir **des hommes d'action pleins de bon sens** : le bons sens étant, d'après Descartes, la chose du monde la mieux partagée.

Entre autres publications : *Leçons sur la résolution algébrique des équations,* en 1895 :
http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=Vogt029&seq=7

Retour sommaire

DEUX NOUVELLES BROCHURES DE LA RÉGIONALE LORRAINE

Avec des Pentaminos :

des utilisations de pièces choisies parmi les douze pentaminos, en classe , en club , ou à la maison…

Depuis de nombreuses années, j'ai tenté d'utiliser en classe et en club mathématiques ces pièces formées de cinq carrés accolés par un côté entier.

Faire des recherches avec les douze pièces n'est pas aisé, surtout pour les élèves. Cependant on rencontre des mathématiques bien intéressantes en ne manipulant que 1, 2, 3, 4, 5… pièces : aire, périmètres, symétries orthogonales, symétries centrales, rotations, translations, frises, pavages.

Par des détours on rencontre aussi les multiples de 5, les décompositions d'un entier sous la forme « …×… + …×… » ou « …× … - …×… », des phrases mathématiques à retrouver ou des activités relevant de l'énumération.
Les travaux présentés concernent des élèves de collège. Cependant un très grand nombre d'entre eux trouveront leur place dans les classes de cycle III, de SEGPA ou de tout dispositif mis en place pour aider des élèves en difficulté.

François Drouin

Retour sommaire

MATHS ET ARTS

En 2006, la Régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P. organisait un concours régional sur le thème " Mathématiques et Arts ".
Aucune piste n'était interdite quant au fond, mais le jury a privilégié les contributions collectives originales qui avaient été prétexte à une réelle activité mathématique.
La variété des productions proposées (rosaces, mosaïques marocaines, cubes en perspectives, motifs dans un carré, art et espace, perspectives impossibles, etc.) a incité la Régionale à réaliser une brochure sur ce thème pour encourager les collègues à explorer des pistes analogues.
Nous avons complété cette brochure par quelques activités qui " somnolaient " dans les disques durs de collègues, et par un article de Bernard Parzysz sur une mosaïque romaine découverte à Metz.

Les travaux présentés dans cette brochure reflètent naturellement ce rapport entre art et mathématiques. Si le rôle des mathématiques dans les réalisations des élèves relèvent souvent de l'outil, leur contribution ne se limite pas à de la reproduction, et le soin porté à la réalisation, l'inventivité de certains travaux témoignent de tout l'intérêt que chacun a trouvé dans ce concours. C'est au travers de certaines de ces activités que des élèves auront pu donner du sens aux objets mathématiques manipulés, leur donner une pertinence, une vie…

Extrait de la préface de Philippe FÉVOTTE

Ces deux brochures seront disponibles lors de la journée du 19 mars ; elles sont également en dépôt-vente à l'IREM. Coût **7 €**. chacune.
Commandes possibles auprès de Roger CARDOT, 5 rue de Saffais, 54360-BARBONVILLE ; joindre alors un chèque de 10,50 € (port inclus) à l'ordre de APMEP-LORRAINE.

Retour sommaire

ELECTIONS FICTIVES

A Gaulandville, les élections municipales se déroulent de la façon suivante : les électeurs classent les candidats par ordre de préférence, le dernier se voit attribuer 1 point, l'avant dernier 2 points, et ainsi de suite jusqu'au premier, qui se voit attribuer *n* points s'il y a *n* candidats. Est élu, dès le premier tour, celui qui a le plus grand total de points.

Cette années (heureusement pour les scrutateurs), il n'y avait que trois candidats : Bailleroux, Réginale et Tsarévitch (par ordre alphabétique). La population était partagée : 40 % était pour Réginale et ne voulait absolument pas entendre parler de Tsarévitch ; 40 % était pour Tsarévitch et ne voulaient absolument pas entendre parler de Réginale ; les 20% restants étaient pour Bailleroux, et considéraient Réginale et Tsarévitch comme bonnet blanc et blanc bonnet.

Les pourcentages donnés ci-dessus provenaient de sondages portant sur des échantillons de plus de 10 000 électeurs tirés au hasard dans la population ; la marge d'erreur était donc d'à peine 1 % pour les deux premiers qui étaient, comme on dit en Gaulandie, « *au coude à coude* ». Les paris allaient bon train, les bookmakers se frottaient les mains. Que croyez-vous qu'il arriva ?

Bailleroux fut élu, « haut la main » ! Personne ne s'expliquait ce phénomène, sauf les profs de maths adhérents à l'APMG (Association des Professeurs de Mathématiques de Gaulandie), qui firent paraître dans leur bulletin « Le Petit Orange » l'explication suivante.

Imaginez, pour simplifier, qu'il n'y ait que 100 électeurs. Quarante pour Tsarévitch, qui ont donc voté T-B-R (voir les préférences ci-dessus) ; soit 120 points pour T, 80 points pour B et 40 points pour R. Quarante pour Réginale, qui ont donc voté R-B-T ; soit 120 points pour R, 80 points pour B et 40 points pour T. Les vingt électeurs restants, favorables à Bailleroux, se sont partagés à égalité entre B-R-T et B-T-R ; soit respectivement 30 points pour B, 20 points pour R et 10 points pour T d'une part, et 30 points pour B, 20 points pour T et 10 points pour R d'autre part. Faisons maintenant le total : 220 points pour Bailleroux et 190 pour chacun des deux autres, aucune discussion possible.

Le 1 % de marge d'erreur dans l'estimation ne changeait rien à l'affaire. Certains journalistes ont, dans leurs chroniques, proposé de changer les barèmes constitutionnels : mettre beaucoup plus de points au premier, par exemple 10 points, 5 au second, 1 au dernier.

L'APMG leur a répondu que s'ils mettaient α, β et γ points (avec $\alpha > \beta > \gamma$ quelconques), Réginale et Tsarévitch auraient chacun $40\alpha + 10\beta + 50\gamma$, et Bailleroux $20\alpha + 80\beta$. Pour que Bailleroux ne l'emporte pas, il faudrait que β soit inférieur à $(2\alpha + 5\gamma)/7$, par exemple en mettant 10 points au premier, 3 au second et 1 au dernier. Ils ont même calculé que si on mettait 10 au premier, 1 au dernier et 25/7 au second, tout le monde arriverait à égalité. Les journalistes, n'ayant rien compris, ont décidé de ne pas publier cette réponse.

Cependant, après ces élections, le nouveau responsable de l'éducation a créé un « *Comité scientifique* » destiné à revoir les programmes de mathématiques (dans lequel, bien sûr, l'APMG était représentée), et a demandé que l'on forme les élèves (et les journalistes !) sur ce qui concerne les sondages, les estimations, et toutes les mathématiques dites « du citoyen », et ce dès l'école primaire.

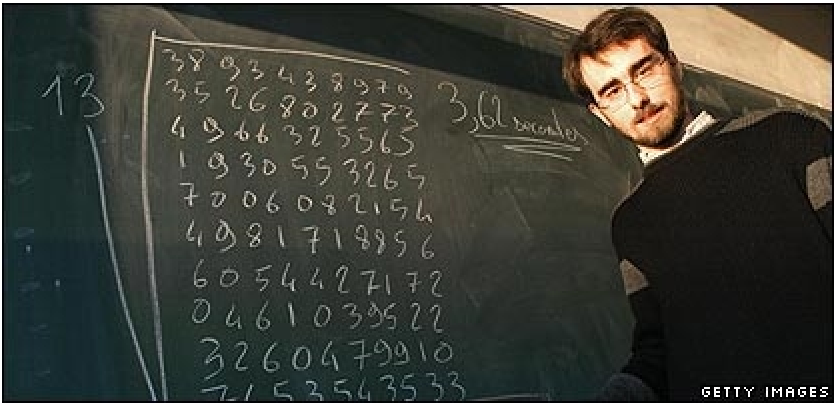
Jacques VERDIER

Retour sommaire

MATH & MEDIA

Les archives de cette rubrique sont désormais disponibles sur : http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=math_et_media

70,2 secondes pour calculer mentalement une racine treizième



Tout s'est passé mardi 12 décembre 2007, au Musée des Sciences de Londres. **70,2**, c'est le nombre exact de secondes qu'il aura fallu à Alexis Lemaire pour calculer (de tête) la racine treizième d'un nombre de 200 chiffres.

Il faut savoir que ce nombre à 200 chiffres a été choisi au hasard par un ordinateur (il n'y a alors eu

Retour sommaire

aucune triche). 70 secondes plus tard, l'étudiant âgé de 27 ans donnait la réponse du calcul : 2 407 899 893 032 210, qui multiplié 13 fois par lui

même (2 407 899 893 032 210^{13}) donnait le nombre initial choisi par l'ordinateur. Le précédent record de ce doctorant en intelligence artificielle à Reims (France), établi le 15 novembre à New York, était de 72,4 secondes.

Alexis Lemaire avait raconté avoir pris conscience de ses dons pour le calcul mental à l'âge de 11 ans. Il avait battu plusieurs records dans la catégorie de la racine treizième de nombres à 100 chiffres, mais avait fini par trouver l'exercice trop facile pour lui. Il a expliqué qu'il s'astreignait à une hygiène de vie stricte et à un entraînement mental digne d'un athlète. Les anglophones ont d'ailleurs forgé le néologisme de *« mathlete »*.

Extraits de Le Monde Informatique, le Figaro, L'Est Républicain, Numb3rs, etc.

Croissance exponentielle à Buchy et Orny

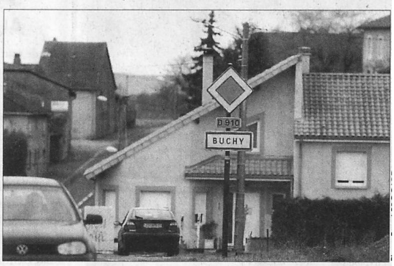
R.L. 16/01/08

D'un recensement à l'autre, Buchy et Orny, deux communes de la deuxième couronne messine, voient leur population croître d'environ 50 %. Explications.

Le boom de la construction dans la deuxième couronne messine est la raison majeure de l'explosion démographique de la commune de Buchy, dont Philippe Ries est le maire. « *On passe de 76 habitants en 99 à 114 aujourd'hui. Ça ne m'affole pas. C'est simple, les gens n'ont plus le moyen d'acheter à Metz puisque les prix des terrains sont devenus prohibitifs.* » A 10 000 euros l'are, un cadre de vie plutôt nature malgré la proximité de l'aéroport et les projets de Mégazone, le petit bourg du sud messin a su tirer son épingle du jeu. « *18 km de Metz, soit 5 minutes et 20 km de Pont-à-Mousson. Toute l'offre commerciale de proximité est aussi présente à Solgne. Cette situation est un atout évident* », prolonge l'élu, agent immobilier de métier et content de voir Buchy se garnir de jeunes familles et d'enfants. Offrir un bain de jouvence à l'âge moyen des habitants du village, c'était aussi le combat de Jacques Bouchès, maire d'Orny, dont la commune explose littéralement entre 1999 et 2008 – de 229 à 351résidants. Plus 53 % ! Son levier : un lotissement, dont les maisons ont trouvé preneurs en moins de temps qu'il n'en faut pour le dire.

« *Entre 1990 et 1999, on perdait des habitants, les jeunes surtout partaient, à 20-22 ans. Il y a quatre ou cinq ans quand on a lancé l'idée d'un lotissement, on était un de derniers villages du sud messin à ne pas en avoir.* » La D 955 (vers Metz) qui passe à deux fois deux voies (inauguration prévue au printemps en 2008), « *ça compte* », souffle le premier magistrat, sûr de l'impact de la Voie verte sur la dynamique rurbaine. Il n'oublie la grosse affaire du moment : l'hôpital de Mercy et son futur personnel qui plante ses jalons. « *36 maisons dans le lotissement, c'est l'essentiel de l'augmentation de la population. Mais hors de ce projet, on a beaucoup de demandes. Il y a un vrai effet hôpital de Mercy, c'est sûr* ». A 12 500 euros l'are, c'est encore très tentant.

A.M.



Le petit village de Buchy, situé à 18 km de Metz, a vu sa population passé de 76 habitants en 1999 à 114 aujourd'hui. La flambée des prix de l'immobilier dans la capitale mosellanne est un des facteurs expliquant cette croissance.

Retour sommaire

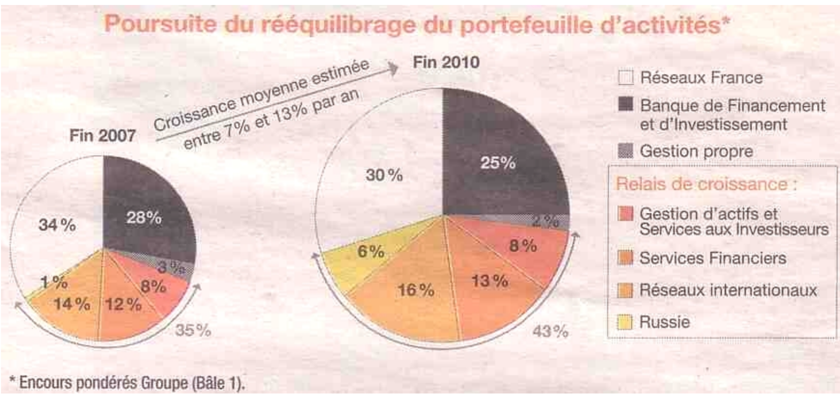
Sous ce titre, on cherchait dans l'article du Républicain Lorrain du 16/01/08 en quoi la croissance était **exponentielle**. Tout ce qu'on pouvait trouver était ceci :
« On passe de 76 habitants en 99 à 114 aujourd'hui » pour Buchy et « *la commune explose littéralement : entre 1999 et 2008, de 229 à 351 résidants. Plus 53 % !* » pour Orny.

Peut-être que, tout simplement, « exponentiel » est synonyme de « au moins égal à 50 % » ? ? ?

Remarquons que, mathématiquement, rien n'indique que la croissance n'est pas exponentielle : si chaque année la population a augmenté de 4,61 %, on peut affirmer que la croissance de la population de Buchy est exponentielle (au moins sur la période 1999-2008)…
N.B. On pourra trouver, dans la brochure n°147 de l'APMEP « ***Dé-chiffrer par les maths*** » des activités intéressantes (niveau lycée) sur les différents types de croissance (chapitre 5, pages 127-137), et en particulier un travail sur des extraits de sites Web (pages 132-133).

Mais dans ce même article, une petite phrase anodine pour justifier l'attrait de la commune de Buchy (située tout près de l'aéroport, au carrefour de la D 955 Metz-Sarrebourg et de la D 910 Pont-à-Mousson – Saint-Avold, pour ceux qui ne connaissent pas) : « ***18 km de Metz, soit 5 minutes,*** *et 20 km de Pont-à-Mousson*. » A quelle vitesse peut-on rouler sur la D 955 (il est vrai qu'il y a une portion à 2x2 voies) ? D'après nos calculs, cela ferait une moyenne de 216 km/h… Va-t-il falloir poursuivre le maire pour incitation à la délinquance routière par presse interposée ?

GRAPHIQUE EXACT ?



Publicité de la Société Générale, 25 février 2008

Retour sommaire

Les informations portées sur ce graphique sont-elles cohérentes ?
Au premier coup d'œil, les parts des « fromages » semblent correspondre aux pourcentages indiqués (et en plus on soupçonne l'infographiste d'avoir utilisé un logiciel ad hoc pour transformer les données qu'il possédait en graphiques circulaires).
Mais la « taille » des deux disques correspond-elle bien à l'augmentation annoncée ?
Je pense qu'un tel problème « ouvert » peut être donné à des élèves de collège (troisième ?), à condition qu'ils maîtrisent suffisamment le concept de proportionnalité.

Je l'ai abordé ainsi, mais il y a peut-être d'autres démarches possibles : 1°) à quel intervalle de pourcentages correspond une augmentation de 7 à 13 % l'an si on l'applique sur 3 ans (de fin 2007 à fin 2010, il y a bien 3 ans) ? 2°) quelle est l'augmentation en pourcentage de la « taille » des disques ? Y a-t-il concordance entre les deux résultats ?

On ne connaît pas les données numériques sur lesquelles s'appliquent les pourcentages (7 à 13 %). Si l'on a bien compris que l'augmentation en valeur est proportionnelle à la base de départ (c'est le principe même des pourcentages…), on peut choisir une valeur fictive de départ, par exemple 100 (la « fameuse » base 100). Trois augmentations successives de 7 % donneront : $100 \rightarrow 107 \rightarrow 114{,}49 \rightarrow 122{,}5$ environ. Soit une augmentation de 22,5 % … et non pas $3\times7 = 21$ %. De même, les trois augmentations de 13 % donneront environ 44,3 %.
Bien sûr si l'élève a déjà dans son bagage mathématique le fait qu'une augmentation de 7 % correspond à une multiplication par 1,07 qui, appliquée trois fois de suite correspond à une multiplication par $1{,}07^3$, donc à une augmentation de $(1{,}07^3 – 1)$, les choses iront bien plus vite … mais cela est déjà assez difficile en 1e L ou en 1e ES ! Et je n'ai pas tenu compte du mot « moyenne » posé sur la flèche … car le « pourcentage moyen » correspondant à plusieurs augmentations en pourcentages (même sur des périodes égales) me paraît hors de portée du citoyen « moyen » (celui du socle !).
En conclusion, la flèche indique une croissance totale comprise entre 22,5 et 44,3 %

Quelle est l'augmentation de la « taille » des disques ? Là, il est important de savoir que ce que l'œil (le cerveau ?) « voit », c'est l'<u>aire</u> du disque. Alors je prends ma règle graduée, et je mesure les diamètres : approximativement 32 et 44 mm (du moins sur mon original ; mais si on a intégré le concept de proportionnalité, on comprend que cela ne dépend ni de l'unité de mesure choisie, ni du taux de

Retour sommaire

réduction ou d'agrandissement de l'image). Je peux calculer les aires de mes deux disques, faire le rapport, et je trouve environ 1,89. **L'aire du disque a augmenté d'environ 89 %**. Bien sûr, si l'on sait que l'aire du disque est proportionnelle au carré du rayon, pas la peine de passer par le calcul intermédiaire des aires…

Finalement, j'en conclus que le graphique est faux (largement) : l'augmentation annoncée est au maximum de 44,3 % et le disque a crû de 89 %.

Vous me rétorquerez que mes mesures des diamètres sur l'image ne sont peut-être pas très précises… mais l'écart calculé est tel « qu'il n'y a pas photo » !

Une autre question peut alors être posée : comment l'infographiste (qui doit avoir au moins son bac) a-t-il fait ses calculs ? Influencé par les commerciaux, il a déjà peut-être déjà décidé de prendre l'augmentation maximale, 13 %. Et trois fois 13 % ça fait 39 %. On prend un premier cercle quelconque, et on augment son diamètre de 39 %. Et ça correspond bien à la figure observée (à ½ mm près). Mais cela n'est peut-être que pure supposition de ma part !

Jacques VERDIER

Est-ce qu'elle reviendra? ... - - Oui, oui. - Juliette sembla rassurée. Sans doute ignorait-elle cette spécificité linguistique : en mathématiques, plus par plus font plus, alors que le mot oui multiplié par deux équivaut toujours à une négation.

Amélie Nothomb (Les Catilinaires)

Retour sommaire

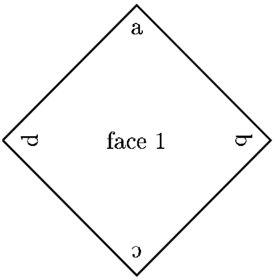
ETUDE MATHEMATIQUE

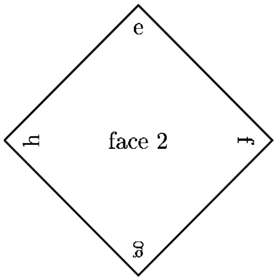
Petite présentation des graphes de Cayley

Loïc Terrier, lycée Loritz

Lors de la conférence inaugurale des journées de Besançon, Douglas Hofstadter nous a parlé de certains groupes, et de leurs graphes de Cayley ; ces derniers sont assez méconnus, peu enseignés.

Prenez un sous-bock carré : de combien de façons pouvez-vous le bouger tout en le laissant « globalement invariant » ? Il y a le quart de tour, dans un sens ou dans l'autre, le demi-tour, les renversements qui changent de face...
Considérez toutes ces transformations, ajoutez la transformation « identité » (celle qui consiste à ne rien faire), et vous obtenez un ensemble à huit éléments. Si *x* et *y* sont deux éléments de cet ensemble, on peut définir une loi * par : $x * y = y \circ x$ (on applique *x* puis *y*). Muni de cette loi, les huit éléments forment un **groupe** : on a $(x * y) * z = x * (y * z)$, l'identité est l'élément neutre, $x * y$ laisse encore le sous-bock globalement invariant et toute transformation admet une transformation inverse (celle qui remet le sous-bock dans sa position initiale).
La question qu'on se pose est : comment représenter ce groupe ?
Marquons les coins du sous-bock, sur chaque face :





On fixe une position de départ : le coin « a » visible, en haut (figure 1). On nomme chaque transformation du nom du coin visible en haut après la transformation (partant de la position de départ) : « a » sera donc l'identité, « b » sera le quart de tour dans le sens positif, « c » le demi-tour, etc...

Retour sommaire

Une première façon de représenter le groupe consiste à dresser sa table de multiplication :

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	c	d	a	h	e	f	g
c	c	d	a	b	g	h	e	f
d	d	a	b	c	f	g	h	e
e	e	f	g	h	a	b	c	d
f	f	g	h	e	d	a	b	c
g	g	h	e	f	c	d	a	b
h	h	e	f	g	b	c	d	a

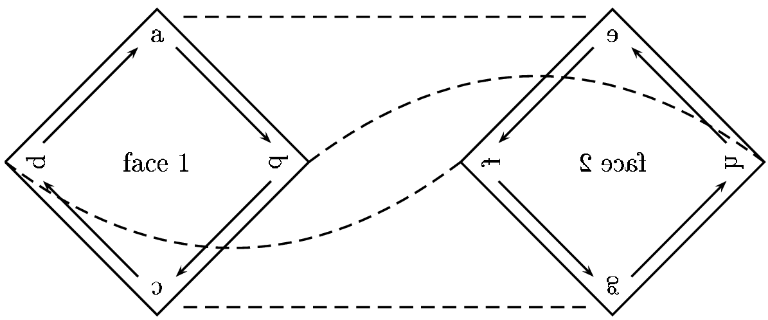
Cette table contient toute l'information sur le groupe, mais peut-on dire que c'est une bonne façon de le représenter ?

On peut lire sur cette table que le groupe n'est pas commutatif (on n'a pas en général $x*y=y*x$) et on observe deux blocs $\{a,b,c,d\}$ et $\{e,f,g,h\}$ qui correspondent aux deux faces du sous-bock.

En fait, il est facile de se convaincre que toutes les transformations peuvent s'obtenir à l'aide de b et e. Par exemple, on a $c=b*b$ et $h=e*b*b*b$ (que l'on notera $h=e*b^3$).

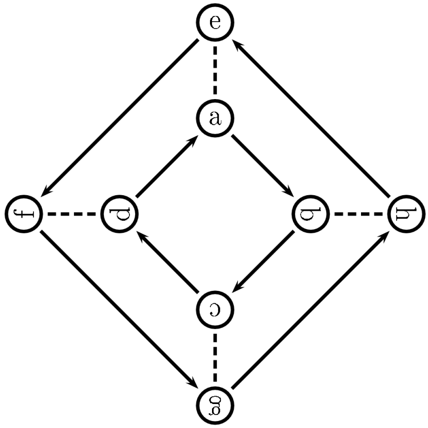
Les éléments b et e sont des générateurs du groupe. Remarquons que $b^4=a$, $e^2=a$ et $(b*e)^2=a$.

Sur le sous-bock, relions par une flèche les couples du type $(x,x*b)$, et par un trait en pointillé les couples du type $(x,x*e)$ (comme $e^2=a$, il est inutile de flécher).



On peut dessiner l'ensemble du graphe sur un plan, et on obtient alors le graphe ci-dessous :

Retour sommaire



Ce graphe est appelé « graphe de Cayley » du groupe.

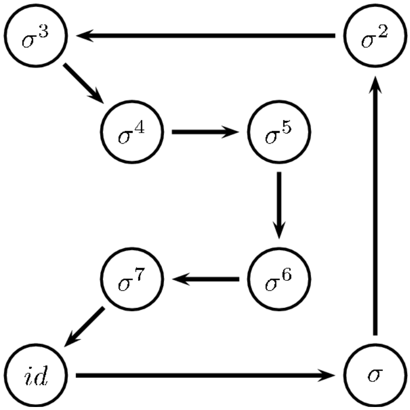
Ce groupe est le groupe diédral D_4 , qui est obtenu comme produit semi-direct de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

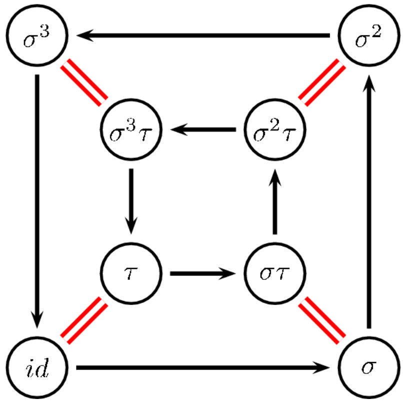
Un élément correspond à un trajet sur le graphe, en partant de l'identité (*a*) : *c*, par exemple, correspond au trajet obtenu en suivant deux fois la flèche. Pour *g*, c'est flèche, flèche, puis pointillés.
On retrouve facilement la table de multiplication : pour faire $g*c$, par exemple, on part de *g* et on suit le trajet associé à *c* : on obtient *e*.

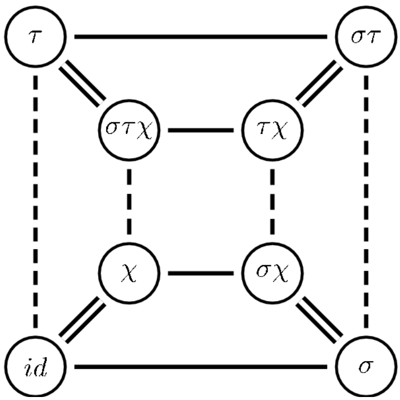
Pour déterminer l'ordre d'un élément, il suffit de suivre le trajet associé à cet élément, jusqu'à retomber sur l'identité.

Il existe (à isomorphisme près) cinq groupes à huit éléments : D_4 , $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}_2$ (groupe des quaternions). Voici le graphe de Cayley de trois d'entre eux : saurez-vous les identifier ?

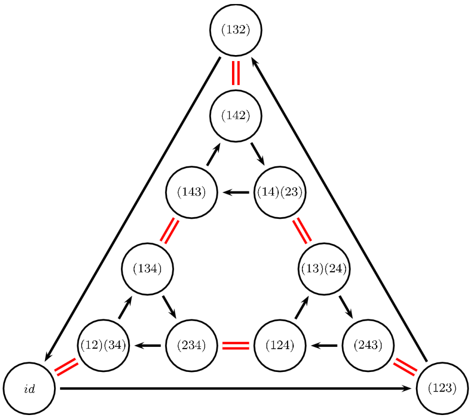
Retour sommaire

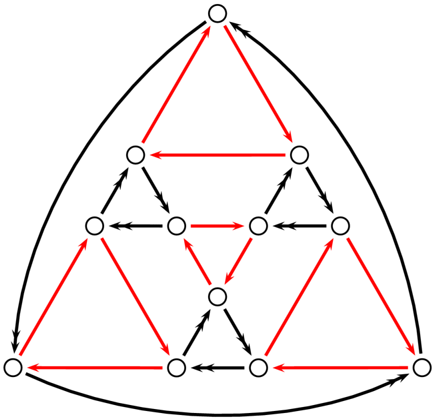






Pour terminer, remarquons qu'un groupe peut avoir plusieurs graphes de Cayley différents, selon le système de générateurs utilisé. Voici deux graphes possibles du groupe A_4 :





En guise de conclusion : le graphe de Cayley permet d'appréhender un groupe (discret), de le visualiser et d'en déduire un certain nombre de propriétés non triviales (et c'est beau, non ?)

EXPOSITION “ OBJETS MATHÉMATIQUES ”

L'exposition, crée par un groupe de notre régionale A.P.M.E.P., présente actuellement dix sept stands mêlant jeux, manipulations et mathématiques. Son contenu, à l'origine destiné à des élèves de collège, a été utilisé avec profit par des classes de cycle III de l'école élémentaire, des élèves de lycée, des professeurs stagiaires, des Centres de Documentation, des bibliothèques municipales.

Elle a circulé en Lorraine et dans d'autres régions françaises et a fait quelques petits détours chez nos amis belges.

Ses créateurs souhaitent que la manipulation des objets présentés montre quelques aspects culturels mais non nécessairement utilitaires des Mathématiques. Ils sont également persuadés que faire des

Retour sommaire

mathématiques, c'est chercher et ne pas trouver tout de suite, se poser des questions, essayer de valider des résultats conjecturés, se convaincre et convaincre ses interlocuteurs de la pertinence des résultats obtenus.
Ces dix sept stands sont une modeste occasion de montrer que la culture scientifique et mathématique peut être un être source de plaisir accessible à tous.

Quatre exemplaires circulent dans les quatre départements lorrains. Une modique somme (10 €) est demandée comme participation à sa rénovation. La durée du prêt n'est pas limitée, cependant une durée de une ou deux semaines semble être la durée habituelle.

Contacter :
Pour la Meurthe-et-Moselle, André STEF, I.E.C.N.-Faculté des Sciences, BP 239, 54506 VANDOEUVRE Andre.Stef@iecn.u-nancy.fr
Pour la Meuse, François DROUIN, IUFM de Lorraine, site de Paixhans, 57000 METZ, Francois.Drouin@ac-nancy-metz.fr
Pour la Moselle, Martine DECHOUX, Martine.Dechoux@wanadoo.fr
Pour les Vosges, Marie-José BALIVIERA, Lycée Louis Geisler, 88110 RAON-L'ÉTAPE, baliviera.mj@wanadoo.fr

Retour sommaire

Sudoku mathématicien n° 93

A			P				I	
E	O					N		
C			A			E		R
	N			I	O	R	E	A
	E	C	N				O	I
O								C
		A	E		P		C	
N			O	R				

Ce sudoku un peu spécial cache le nom d'un célèbre mathématicien.
Comme dans tout sudoku, chaque lettre doit apparaître une fois et une seule dans chaque ligne, dans chaque colonne, et dans chaque carré de 3x3. Mais une des 9 lettres n'apparaît pas dans la grille ... c'est pour que ce ne soit pas trop facile.
Quand vous aurez terminé, le nom de ce mathématicien apparaîtra (dans l'ordre) dans une des lignes ou une des colonnes... ce qui vous aidera à déterminer la lettre manquante !

Pour vous aider encore un peu : bien que ce mathématicien ait été le fils d'un professeur de médecine, il a failli mourir de la diphtérie à l'âge de 5 ans.

Solution(s) du problème du trimestre n° 92

Deux versions du problème ont circulé (ceci grâce à mon incorrigible distraction) :

Est-il possible de construire une suite infinie d'entiers (u_n) telle que :

- u_n s'écrit avec n chiffres (en base 10)
- $u_{n+1} = u_n \times 10 + k$, avec k entier
- u_n est premier

(par exemple, la suite 3 , 37 , 379, ... ?)

et une deuxième version où $u_{n+1} = k * 10^n + u_n$ (ex : 3, 23, 523, ... ?)

Merci à Jacques Choné, à Loïc Casanova et à Yann Payoux (entre deux plongées à Rangiroa) pour leurs solutions. Comme pour le théorème des quatre couleurs (mais en plus simple quand même), l'informatique donnait un bon coup de pouce. Dans les deux cas, on trouve un nombre fini de nombres. Jacques Choné signale que ces nombres ont déjà été étudiés : il s'agit des nombres premiers dits raccourcissables à gauche (respectivement : à droite). Pour les curieux, signalons que le plus grand nombre premier raccourcissable à gauche est 73 939 133 (dernier terme de la suite 7, 73, 739, ...) et le plus grand nombre raccourcissable à droite est 357 686 312 646 216 567 629 137 !

Retour sommaire

Problème du trimestre, n° 93

proposé par Loïc Terrier

Ce problème fait référence aux graphes de Cayley (voir article). Le groupe des quaternions peut être défini par deux générateurs : a et b et les relations : $a^4=1$, $b^4=1$, $a^2=b^2$ et $aba=b$.
Pouvez-vous déterminer son graphe de Cayley ? Est-il possible de le représenter dans le plan en évitant que deux arêtes quelconques ne se coupent ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou toute proposition de nouveau problème à : Loïc Terrier, 42B rue du maréchal Foch, 57130 Ars sur Moselle ou envoyez un mail à loic.terrier@free.fr .

Joël KIEFFER nous a quittés le 7 janvier dernier, il avait 58 ans. Professeur au lycée Hélène Boucher de Thionville, il était adhérent de l'APMEP de longue date. Passionné par son métier, il voulait faire partager son enthousiasme : de 2004 à 2007, il avait animé plusieurs ateliers lors de nos Journées régionales ou nationales et organisé des « goûters » mathématiques dans son établissement, sur des sujets qui lui tenaient à cœur (utilisation du logiciel de statistiques 'R', du logiciel de géométrie dynamique 'GeoGebra', etc.). Il avait également fourni nombre d'énoncés à la rubrique 'problèmes' du Petit Vert.
Nous regrettons très vivement sa disparition, et sommes de tout cœur avec sa famille.

Adieu, Joël

Retour sommaire