DANS NOS CLASSES

Le hasard au collège

par Jacques VERDIER

Il y a une dizaine d'années, j'animais le groupe IREM « Proba-Stat en Europe », qui a débouché sur la parution d'une brochure, « **L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS AU COLLEGE ET AU LYCÉE : EXEMPLES EUROPÉENS ET PROPOSITIONS**[3] ». Après un tour d'horizon des programmes d'une bonne dizaine de pays européens et une analyse des représentations que les élèves se faisaient du hasard, cette brochure proposait quelques pistes pour un enseignement de l'aléatoire au collège (nous étions des précurseurs !).
Voici ce que nous écrivions alors :

Le traitement de l'aléatoire au collège, objectifs généraux :
Donner une “ culture ” de l'aléatoire à tout citoyen, et faire en sorte que de très solides “ intuitions ” puissent se développer :

1. être capable de distinguer ce qui ressortit à l'expérience aléatoire (hasard “ calculable ”) de ce qui ressortit à la contingence fortuite, et être capable d'avoir un esprit critique devant certaines affirmations des médias ;
2. être capable de déterminer a priori la probabilité de phénomènes aléatoires en utilisant diverses stratégies ;
3. “ intégrer ” le fait que la probabilité d'un événement est la limite des fréquences observées.

Le programme du collège devra fournir une assise solide pour l'enseignement des probabilités en seconde, et de la statistique inférentielle dans les classes scientifiques du lycée.

Et nous terminions par les propositions suivantes (que je vous laisse comparer avec le programme de troisième) :

Voici ce que, pour nous, pourraient être les acquis des élèves en fin de collège :

Savoir ce qu'est une expérience aléatoire : c'est tout d'abord une expérience (au vrai sens du terme : on doit réaliser) ; cette expérience peut être décrite par un « protocole », elle peut être répétée (au moins en théorie) autant de fois que l'on veut dans les mêmes conditions, on peut en déterminer à l'avance la liste des issues, on ne peut prévoir quelle en sera l'issue au moment où on la réalise. L'idée étant « le hasard n'a pas de mémoire ».

[3] Cette brochure est toujours en vente à l'IREM de Lorraine, pour la modique somme de 3 € (voir http://www.irem.uhp-nancy.fr/). Voir aussi la rubrique « Matériaux pour une documentation » du Bulletin Apmep n°439.

retour sommaire

Savoir qu'il y a « égale probabilité » (dite en termes de « chances ») dans un certain nombre de cas : lancer d'une pièce, lancer d'un dé, tirages de boules au loto, roulette à secteurs égaux, etc. Le raisonnement que doit faire l'élève étant du type « *Il n'y a pas plus de chances que ceci arrive plutôt que cela* », pour des raisons de symétrie, de régularité des objets... (ce qu'on appelait à la Renaissance la Géométrie du Hasard).

Savoir que ce n'est pas parce qu'il y a k possibilités qu'il y a « une chance sur k » que l'événement se produise. Exemples : une roulette dont les secteurs sont inégaux, une urne contenant des boules de couleurs en proportions différentes. Les élèves devront avoir construit des « modèles mathématiques » correspondant à ces expériences : probabilités proportionnelles aux secteurs (aux arcs de circonférence, aux angles au centre) dans le premier cas, probabilités proportionnelles aux nombres de boules de chaque couleur dans le second cas.

Observer des « fluctuations d'échantillonnage » : sur des cas simples (comme pile/face, dés), avoir fait des statistiques sur un grand nombre de coups (une centaine), et comparer avec les résultats des autres (le professeur apportera l'information concernant d'autres classes, d'autres années ...) ; traiter statistiquement ces fluctuations. Se rendre compte qu'on est peut-être loin de la probabilité attendue (on pourra faire la comparaison en termes d'*espérance théorique*, calculée comme une moyenne : par exemple, si on lance 100 fois une pièce, on *espère théoriquement* 50 'PILE').

Un objectif final (dont nous ne savons pas s'il peut être atteint à ce stade) serait : savoir faire la différence **de nature** entre une fréquence observée (a posteriori) qui est du domaine de la statistique, et une probabilité (déterminée a priori).

Depuis un an, beaucoup de documents ont été publiés sur l'enseignement des probabilités en troisième, de nombreuses formations ont été mises en place dans l'académie, où le professeur peut trouver énormément de « grain à moudre » pour préparer ses cours. Je voudrais cependant revenir ici sur trois points : certaines conceptions du hasard chez les élèves, le lien entre la probabilité et les fréquences observées, et les premières notions de probabilités avant d'aborder le programme de troisième.

Quelques conceptions du hasard

Nous avions interrogé 702 élèves (de six collèges) : chaque élève répondait à quatre questions choisies parmi 10. Voici quelques résultats extraits de cette étude.

Question posée à 235 élèves de sixième, cinquième et quatrième : « **En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : un 2 ou un 6 ? Pourquoi ?** ».

retour sommaire

35 % répondent ‘**un 2**’ ; **12** % répondent ‘**un 6**’ ; **42** % répondent correctement, et 11 % ne répondent pas à cette question. **72** % des élèves ayant correctement répondu justifient leur réponse.
Remarques : Le dé fait partie de l’expérience personnelle de l’élève dans le cadre de différents jeux. Cette “ expérimentation ” semble brouiller l’analyse de la situation. Ainsi Éric (6ème) écrit “ *A mon avis, on a plus de chance sur le 2, car je tombe toujours sur un 2* ”. Bruno (5ème) répond aussi “ *C’est le 2, car c’est rare qu’on tombe sur le 6* ”. Autre explication pour Alison (4ème) : “ *C’est plus facile d’obtenir un 2 car 6 est le plus grand chiffre qu’il y a sur un dé* ”.

Autre question : « On joue avec deux dés, en les lançant chacun notre tour. Je prétends que c’est plus difficile pour moi de faire un double six que pour toi de faire un double trois. Ai-je raison ? »
53 % des 204 élèves testés répondent exactement. Exemples de réponses correctes : “ *Non ; vous avez tort* ” ; “ *Il y a autant de chances* ” ; etc.
73 % des 204 élèves ont fourni une justification à leur réponse. Parmi ceux-ci, 34 % ont fourni une justification considérée comme correcte.

Exemples de réponses fournies par les élèves :

- Non, car ce n’est pas des chiffres, c’est le HASARD (*en énormes caractères*) qui décide (6ème).
- Il n’y a pas de raison, c’est aussi dur de faire le double de six que le double de trois, parce que c’est deux doubles (5ème).
- Tous les deux sont pareils, il faut juste avoir de la chance (5ème).
- Non, cela est aussi difficile car 3 et 6 sont en face (5ème).
- Non, car c’est la même chose sauf que les nombres sont différents, pour moi c’est de la chance. Ou alors les six sont plus grands que les trois donc c’est plus dur à faire (4ème).
- Non, 3 ou 6 c’est pareil. Mais remarque, je trouve que faire 6 c’est plus dur, je ne sais pas pourquoi mais quand je joue je fais difficilement 6 (4ème).
- Non, car tous les deux ont autant de chances de faire un double de six qu’un double de trois. Mais c’est quand même plus difficile de faire un double de six (6ème).
- Oui, car un double trois sort souvent, et plus facilement que le double six (5ème).

Nous avions également testé 145 élèves de première (avant qu’ils n’abordent le chapitre des probabilités) sur trois questions. En voici deux :

retour sommaire

Nous avons fourni aux élèves une statistique des tirages des 49 boules du loto depuis que ce jeu existe[4] et nous leur demandions : « **Ces informations peuvent-elles être utiles à un joueur pour jouer la prochaine fois, et pourquoi ?** ».
35 % répondaient que ces informations étaient **inutiles**, en évoquant le fait que ces résultats étaient dus uniquement au hasard, avec parfois des remarques fort pertinentes : « *Les tirages précédents n'influencent pas le prochain tirage* », « *Ce qui s'est passé avant n'intervient pas* », etc.
34 % répondaient que ces informations étaient **utiles**, et qu'il fallait choisir les numéros ***qui étaient sortis le plus souvent*** ; 6 % répondaient que ces informations étaient utiles, mais qu'il fallait jouer les numéros ***qui étaient sortis le moins souvent*** (avec des explications du type « *les boules qui sont le plus sorties ne sortiront plus une nouvelle fois* », « *ça a tendance à s'égaliser* »,…) J'ai même eu une fois un élève de BTS qui, après le cours de probabilités, m'a expliqué que « *d'après la loi des grands nombres, ce sont les numéros qui sont le moins sortis qui ont la plus forte probabilité de sortir la prochaine fois* »…
Les autres réponses (un quart des sondés) sont plus ou moins explicites, avec quelquefois des explications floues (« *C'est utile, car grâce à ces chiffres, les gens vont pouvoir calculer* »), amusantes (« *C'est inutile, les gens jouent leurs dates de naissances* ») ou inexistantes.

Second exemple en première : « ***Si je lance simultanément deux pièces de 1 F, il y a une chance sur trois de voir 1 pile et 1 face » : cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?***
Les **deux tiers** des élèves répondent qu'elle est **vraie**, la très grosse majorité d'entre eux expliquant qu'il y a trois possibilités : soit 2 'Pile', soit 2 'Face', soit un de chaque. Un sur cinq répond que c'est faux, mais seulement 6 sur les 154, dont trois doublants, donnent une explication exacte. Les 15 % de réponses restantes sont diverses, mais deux élèves disent « *Il faudrait faire l'expérience pour pouvoir répondre* ».

Probabilités et fréquences observées

Cette dernière réponse d'élève est celle sur laquelle je rebondis pour proposer l'expérience « aléatoire ». Le « protocole » est simple : chaque élève jette d'assez haut les deux pièces (pour qu'il n'y ait pas de 'tricherie'

[4] Ces statistiques sont disponibles sur http://lotoscope.com/statistiques.php3 et portent sur près de 5 000 tirages.

retour sommaire

possible) au minimum 25 fois, et fait la statistique des résultats : 2 ‘Pile’, 2 ‘Face’, ou un de chaque. On organise ensuite un recensement global (qui porte sur 500 à 1000 lancers) et on « observe » : on est généralement très loin des proportions attendues 1/3, 1/3, 1/3 et plutôt dans les environs de ¼, ¼, ½ , ce qui permet de mettre sérieusement en doute l’affirmation initiale majoritaire. Cela deviendra la nouvelle conjecture, mais qui devra être justifiée par un raisonnement théorique à bâtir.

On a beaucoup parlé de l’expérience des punaises, qui retombent sur le dos ou sur la pointe. Là, le problème se complique : il faut d’abord supposer l’existence **a priori** d’une des deux issues, l’expérience étant construite pour en donner une estimation. Il faut ensuite bien définir le protocole expérimental, l’expérience devant pouvoir être répétée (au moins en théorie) autant de fois que l'on veut dans les mêmes conditions. Il faut donc déjà travailler avec le même type de punaises pour tous ; il faut également choisir la surface sur laquelle on lance (il y a des phénomènes de rebond qui ne sont pas anodins) ; lancer une seule punaise un grand nombre de fois (et non pas un grand nombre de punaises en une seule fois), etc.

Nos élèves connaissent un certain nombre d’expériences qui semblent aléatoires, mais ne le sont aucunement : prenons par exemple le jeu télévisé « La roue de la fortune ». Les candidats essayent de « viser » une case qui leur est favorable, par exemple la case à 10 000 €. Mais la roue est très lourde et peut difficilement faire plus d’un tour ; aussi les candidats essayent-ils de calculer l’impulsion qu’ils lui donnent afin qu’elle s’arrête au bon endroit. Si l’on pouvait s’entraîner un peu plus, avec l’expérience on arriverait souvent au but (c’est comme la pétanque ou le tir à l’arc : il y a des champions). Où est l’aléatoire dans ce jeu ? (Et pourtant le modèle de la roue est un bon modèle pour les probabilités).

Se pose également un problème théorique que l’on ne peut pas aborder au collège : la loi des grands nombres, que l’on exprime en termes usuels par « la fréquence observée tend vers la probabilité », converge de façon extrêmement lente, et pas du tout monotone : à chaque « coup », on a en effet au moins une chance sur deux que la fréquence observée s’éloigne de la probabilité théorique (ce qui est contraire à la notion « intuitive » de limite). Par ailleurs, les résultats des expérimentations fluctuent de façon importante (c’est facile à observer) : on ne peut donc pas s'appuyer sur les seules observations et sur une loi des grands nombres intuitive pour déterminer des probabilités à ce niveau. Certaines propriétés devront donc être affirmées comme vraies par le professeur (et non vérifiables), de la même façon que le professeur de géographie affirme au collège que la Terre est ronde et qu'elle tourne autour du Soleil.

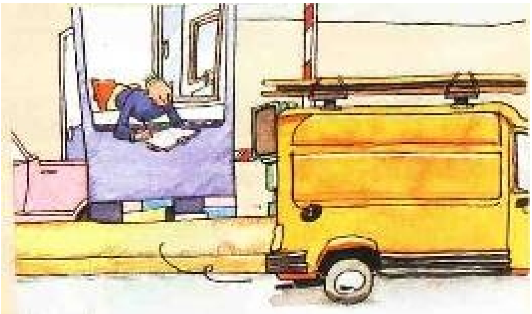
retour sommaire

L'initiation aux probabilités dès la sixième ?

Je ne donnerai ici qu'un seul exemple, celui des classes de 1ère et 2ème année d'E.S.O. (enseignement secondaire obligatoire) en Espagne, qui font suite à l'école primaire, mais un an plus tard qu'en France (élèves de 12 ans et 13 ans).

Les programmes diffèrent légèrement d'une province à un autre, certaines adoptant le programme « madrilène », d'autres étant autonomes. Les objectifs ;

- Obtention, par des moyens empiriques, d'informations sur la régularité dans les situations aléatoires ;
- Techniques simples d'attribution de probabilités ;
- Attitude positive dans la quantification du probable.



Le plus simple est de donner, sans commentaire, des exemples directement extraits d'un manuel de première année « de collège », chapitre « Hasard et probabilités ».

Exercices d'introduction :

● A la caisse de péage d'une autoroute, l'employé note la dernière lettre de la plaque d'immatriculation des voitures qui passent[5]. Au bout de trois heures, il a ainsi accumulé beaucoup d'information. Peut-il prédire quelle sera la dernière lettre de la prochaine voiture ?

● Yolanda et Alberto sont en train de jouer avec un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Mais Alberto est un tricheur, et a trafiqué le dé pour qu'il y ait six sur toutes les faces. Quand Yolanda lance son dé, pouvons-nous prédire

[5] Nous avons modifié l'énoncé initial : les plaques espagnoles sont désormais du type 4 chiffres + 3 lettres, par ex. 1234 BCD, sans différenciation entre les province.

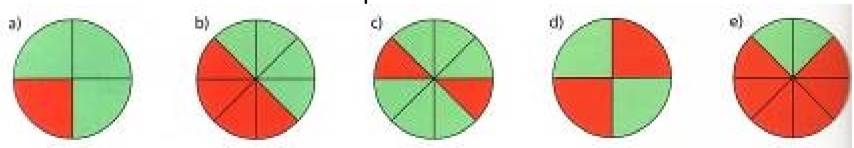
retour sommaire

quel nombre sortira ? Quand Alberto lance son dé, pouvons-nous prédire quel nombre sortira ?

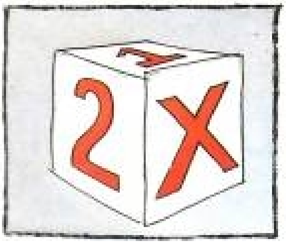
L'expérience de Yolande est une expérience aléatoire, car on ne peut pas prévoir le résultat ; mais celle d'Alberto n'est pas une expérience aléatoire, car nous savons d'avance le résultat.

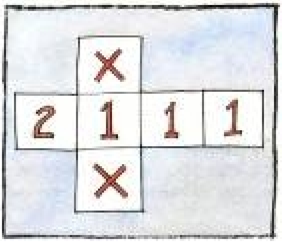
Pour pratiquer :

● Observe les roulettes suivantes : sur lesquelles la couleur rouge et la couleur verte ont-elles la même probabilité de sortir ?

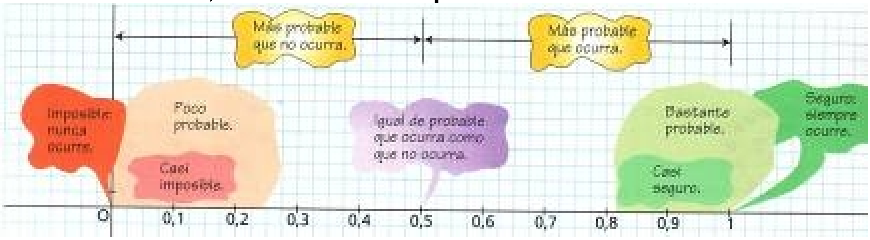


● Un dé spécial comporte trois faces avec un **1**, deux faces avec un **X** et une face avec un **2**. On lance le dé. Tous les résultats sont-ils équiprobables ? Qu'est-ce qui sera le plus facile à obtenir ? Qu'est-ce qui sera le plus difficile à obtenir ?





Dans le « cours », une « **échelle de probabilité** » :

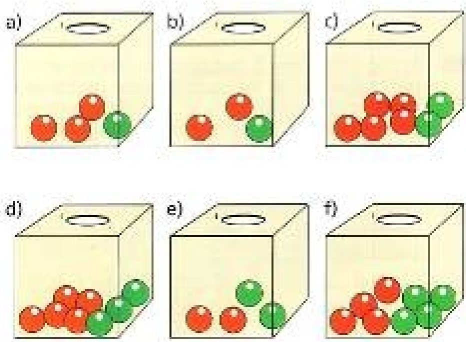


Quelques exercices :

● On lance un dé sur lequel sont inscrits les nombres de 1 à 6. Y a-t-il un des nombres qui sera plus difficile à obtenir que les autres ? Y a-t-il un des nombres qui sera plus facile à obtenir que les autres ?

retour sommaire

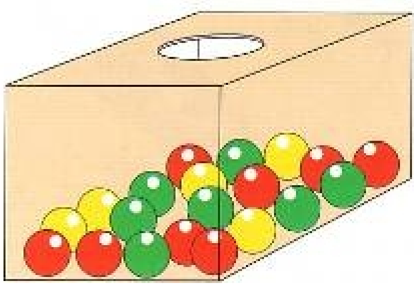
● On tire, sans regarder, une boule de chacune des urnes que nous te présentons. Dans laquelle est-il le plus probable d'obtenir une boule verte ?



Et un des exercices les plus difficiles à ce niveau :

● On extrait une boule au hasard de l'urne ci-dessous. Donner la probabilité :

a) qu'elle soit rouge.
b) qu'elle soit verte.
c) qu'elle soit jaune.
d) qu'elle ne soit pas rouge.
e) qu'elle ne soit pas verte.
f) qu'elle ne soit pas jaune.



CARNET ROSE

Une de nos adhérentes a trouvé ce faire-part de naissance dans Le Monde du 21/12/08. Attirée par le titre, elle l'a aussitôt scanné et envoyé au Petit Vert … sans savoir que Sarah-Jane était aussi une adhérente de la régionale ! (il est vrai qu'il n'y avait qu'une matheuse pour rédiger ce joli texte). Félicitations aux heureux parents.


L'hypothèse de variance finie garantit l'existence de l'espérance.

Sarah Jane et Julien
l'ont réalisée le 16 décembre 2008
avec la naissance de

Emi.

Famille Cagnat et Fritz
(Epinal-Metz).

retour sommaire