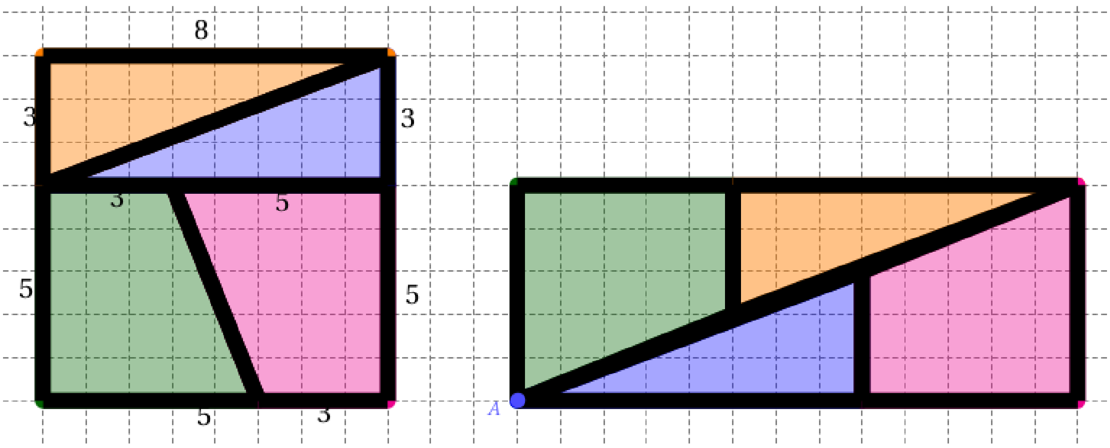
DANS NOS CLASSES

PUZZLE DE LEWIS CAROLL ET SUITE DE FIBONACCI

Gilles Waehren

Voici un exercice d'un devoir maison donné en seconde en 2019 :

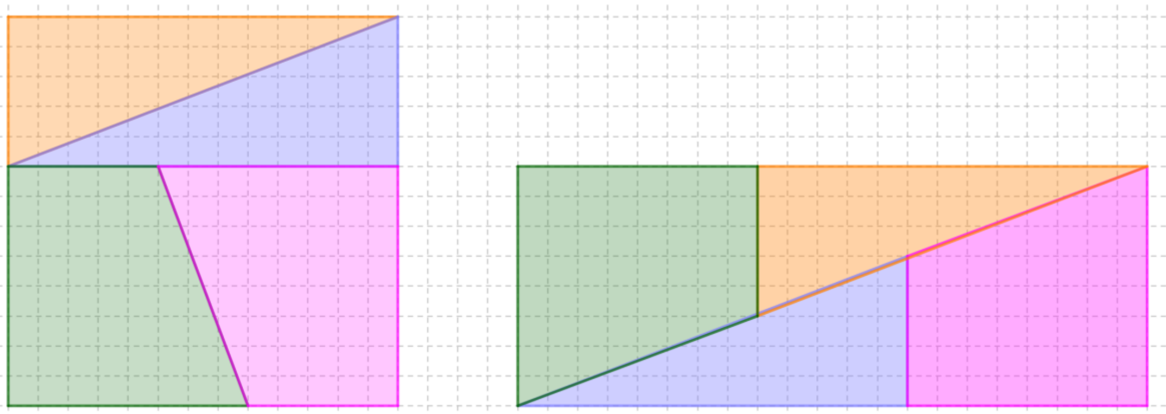


1. Calculer les aires des deux grands quadrilatères. Quel est le paradoxe dans cette configuration ?

2. On considère un repère de centre A. Déterminer les coordonnées des différents points de la figure dans ce repère. Expliquer le paradoxe.

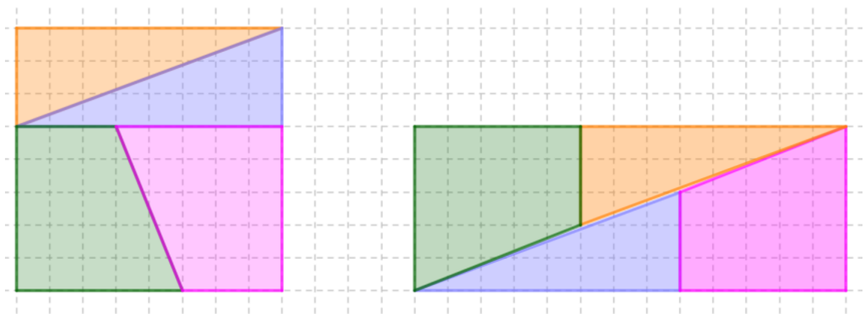
La méthode suggérée était analytique. Comme nous étions dans le chapitre des équations de droite, certains ont appuyé leur raisonnement sur la comparaison des coefficients directeurs ; d'autres ont préféré les coordonnées de vecteurs pour établir l'absence de colinéarité. Mais l'objet de cet article n'est pas d'analyser le travail de mes élèves ou les améliorations possibles de l'énoncé. Pour insister sur l'aspect paradoxal de la situation, j'avais grossi le trait… Le maximum d'épaisseur possible sur GeoGebra permet de masquer le parallélogramme d'aire 1 qui vient s'immiscer dans la figure de droite. Ce n'est guère élégant.

En revisitant dernièrement ce puzzle dans le cadre d'une réflexion sur les aires en cycle 3, je me suis rendu compte que les dimensions mises en jeu sont quatre termes consécutifs de la suite de Fibonacci : 3 – 5 – 8 – 13. M'est alors venue l'envie de tester le quadruplet suivant : 5 – 8 – 13 – 21. Les deux assemblages se font de la même manière, mais l'aire du carré de gauche est alors : $13^2 = 169$, tandis que le rectangle de droite a une aire égale à : $21 \times 8 = 168$. Dans ce cas, les pièces du puzzle de droite se chevauchent.



Mais la différence est moins perceptible que dans le premier cas :

Retour au sommaire



(L'échelle est quasiment la même pour les deux images)

Je cherche alors quelques informations à ce sujet sur la toile : le site de Gérard Villemin en parle, ainsi que ce forum de mathématiques.net. Le résultat est le suivant pour la suite de Fibonacci (u_n) : $(u_{n+1})^2 = u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n-1}$ou encore

$$\boxed{Pn : « \ (u_{n+1})^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^{n-1} \ »}$$

Autrement dit, la différence des aires entre le carré et le rectangle est toujours égale à 1. Cette différence reste significative pour le puzzle classique, mais diminue en importance pour les puzzles de plus grandes dimensions.

La démonstration de l'égalité peut être donnée en Terminale :

$P0$ est vraie, on a bien : $(u_1)^2 - u_0 u_2 = 1 - 2 = (-1)^{-1}$.

Montrons que Pn est héréditaire, c'est-à-dire que :

pour tout entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie.

Soit k un entier tel que

$$(u_{k+1})^2 - u_k \times u_{k+2} = (-1)^{k-1}$$

On a alors : $(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = (u_{k+2})^2 - u_{k+1}(u_{k+2} + u_{k+1})$ par définition,

donc $(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = (u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+2} - (u_{k+1})^2$

$$(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = u_{k+2}(u_{k+2} - u_{k+1}) - (u_{k+1})^2$$

$$(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = u_{k+2}u_k - (u_{k+1})^2$$

$(u_{k+2})^2 - u_{k+1}u_{k+3} = -(-1)^{k-1} = (-1)^k$, par hypothèse de récurrence.

On a obtenu l'égalité au rang $k+1$.

La relation est donc vraie pour tout naturel n.

Je n'ai pas écrit d'énoncé en Terminale. On peut très bien poser le paradoxe avec les figures 3 - 5 – 8 – 13 et 5 – 8 – 13 – 21 et laisser les élèves expliquer l'origine de l'illusion. Puis leur demander d'écrire la relation en fonction de n et la démontrer. Conclure en expliquant que le rapport de l'écart d'aires sur l'aire totale tend vers 0.

Note du comité de rédaction du Petit Vert : *cette mise en œuvre de termes de la suite de Fibonacci est évoquée dans les pages 54 et 55 de la brochure Jeux 8.*

Retour au sommaire