Remue-méninges
52 apr. J.-C.

.Une composition de Christelle un jour de confinement
Florian Schneider: Kraftwerk. Un florilège.

Des défis, des énigmes, des problèmes pour exercer votre observation, votre déduction, voire vos habilités en mathématiques en ce Jour de Confinement, d'où le titre.
Pour tous les niveaux et j'espère pour tous les goûts.

Thème : Les transvasements.

Comment obtenir 4 litres avec un récipient de 5 litres et un de 3 litres ?
Walter Bruce Willis dans « Die Hard 3(Une journée en enfer) » y arrive : Solution de Walter Bruce Willis ici.
Mais a-t-il la solution la plus rapide ?
Que se passe-t-il si on change les contenances ?
Devons-nous toujours tâtonner ?
Votre premier défi est de sauver le monde en trouvant une solution comme Walter Bruce Willis en 1 minute.
Réponse de Walter Bruce Willis.
Le premier nombre donne l'état du seau de 5 litres, le deuxième l'état du seau de 3 litres.
(0;0), (5;0), (2;3), (2;0) , (0,2) , (5;2), (4;3).
7 étapes.
Pouvez-vous mieux faire ?

Nous reviendrons sur les réponses précédentes mais auparavant nous allons observer que le problème traverse les âges et peut être donné en primaire au collège et au lycée.
On trouve trace du problème (3 pintes, 4 pintes, 5 pintes) dans le livre de Nicolas Chuquet (Téléchargeable ici: BNF.) *« Triparty en la science »*datant de 1484.

Réédition de 1881.
Le jeu du tavernier : Il est ung homme vendant vin lequel na que une mesure de troys pintes. Survient vng ault home aportant vne mesure tenant 5 pintes Lequel demande au tauernier 4 pintes de son vin. (On demande ?) comant ce tauernier po'ra bailler a laultre ces 4 pintes veu quil na que vne mesure de 3 pintes auec la mesure de laultre qui en tient 5. Response. soit emplye la mesure de 5 Et de ces 5 soit emplye la mesure de 3 Et ces 3 pintes remises au tonneau Et ce qui est en la mesure de 5 soit mys en celle de troys. Puis

encores soit emplye la mesure de 5 Et de ces 5 soit remplye la mesure de 3 Et par ainsi en la mesure de 4 [Il y a une erreur dans le texte de 1881, c'est de la mesure de 5 dont il devrait s'agir ici] *demourront 4 pintes qui est ce que lon demande. Ou ault'ment soit emplye la mesure de 3 et vuydee en celle de 5 Et encores de rechef emplye la mesure de 3 et dicelle emplir celle de 5 Puis vuyder celle de 5 ou tonneau Et 1 pinte qui est demouree en celle de 3 soit mise en celle de 5 et apres soit emply 3 et vuyde en 5 et ce sera fait.*

On retrouve un problème identique dans l'ouvrage « *Problèmes plaisants et délectables* » de Claude Gaspard Bachet (Téléchargeable ici. BNF)
Page 138.

Deux bons compagnons ont 8 pintes de vin à partager entre eux également, lesquelles sont dans un vase contenant justement 8 pintes, et pour faire leur partage ils n'ont que deux autres vases dont l'un contient 5 pintes et l'autre 3. On demande comment ils pourront partager justement leur vin, ne se servant que de ces trois vases.

A vous de « soudre » (c'est le mot qui suit l'extrait) cette question .
Voici deux solutions de Bachet.

1re *Solution.*

VASES.

8	5	3
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

2e *Solution.*

VASES.

8	5	3
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

Pour Bachet il faut procéder à tâtons ou avec un discours :

Or, bien qu'il semble que cette question ne se puisse soudre par règle certaine, et qu'il y faille nécessairement procéder à tâtons, toutefois on peut par un discours certain et infaillible parvenir à la solution d'icelle, ou discourir son impossibilité, si par hasard on la proposait impossible; et de fait sur la question proposée on peut ainsi discourir :

On retrouve en général trois types de problèmes de transvasement.
- On a deux récipients et de l'eau à volonté que l'on peut jeter et l'on doit trouver un certaine contenance.
- On a trois récipients et l'on doit trouver deux contenances.
- On a deux, trois ou même plus récipients et l'on doit trouver plusieurs contenances.

Défi.

Z possède un récipient d'une capacité de trois litres et un autre de cinq litres. Il veut avoir une mesure de quatre litres en faisant les transvasements nécessaires à partir du fût qui contient 20 litres. Comment Z s'y prendra-t-il ? Problème posé par Tartaglia (1500-1567).

Réponse :

Opérations	0	1	2	3	4	5	6
Fût (20 litres)	20	15	15	18	18	13	13
Récipient de 5 litres	0	5	2	2	0	5	4
Récipient de 3 litres	0	0	3	0	2	2	3

Défi :

Une personne a une bonbonne de 12 pintes pleine de vin ; elle en veut donner 6 pintes à un ami. Pour les mesurer, elle n'a que deux autres bouteilles l'une contenant 7 pintes, l'autre contenant 5 pintes. Comment doit-elle opérer pour avoir les 6 pintes dans la bonbonne de 7 pintes ? Problème posé par Alcuin (735-804) et repris par Ozanam (1640-1717).

Réponse de Ozanam.

	12	7	5	
	A	B	C	
1^{e}	12	0	0	
2^{e}	7	0	5	On remplit la bouteille C.
3^{e}	7	5	0	On verse le contenu de C dans B
4^{e}	2	5	5	On remplit de nouveau C à même A.
5^{e}	2	7	3	On remplit B avec C.
6^{e}	9	3	0	On verse B dans A et C dans B.
7^{e}	4	3	5	On remplit C avec A.
8^{e}	4	7	1	On remplit B avec C.
9^{e}	11	0	1	On verse B dans A.

10e	11	1	0	On verse C dans B.
11e	6	1	5	On remplit C avec A.
12e	6	6	0	On verse C dans B.

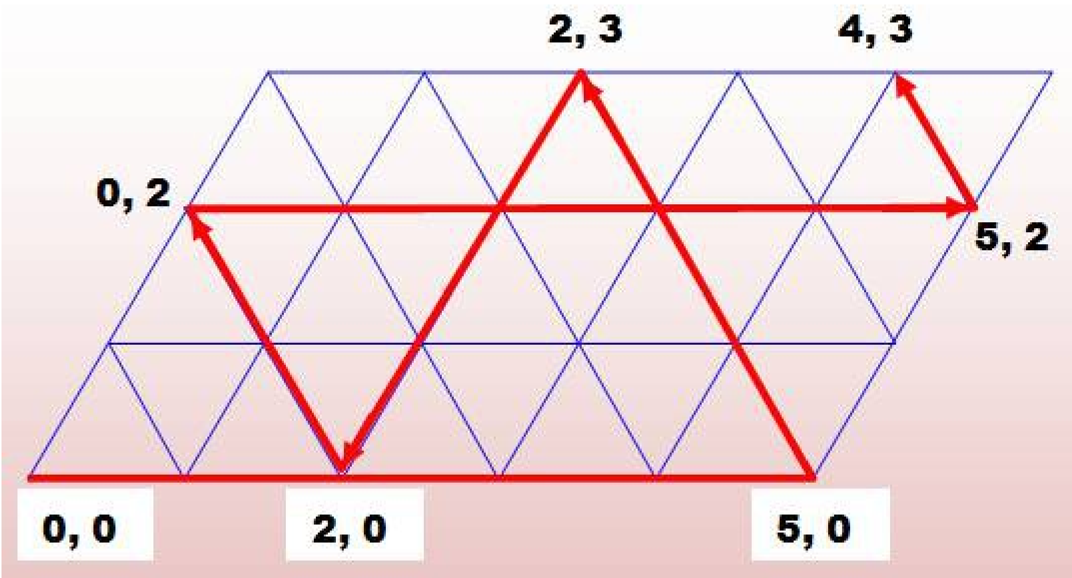
Le problème peut se généraliser à n récipients.

Voici un exemple ici (Images mathématiques: CNRS).

Bachet à son époque n'avait pas de méthode désormais cette classe de problème peut se résoudre par la méthode du billard.

Revenons au problème de Walter Bruce Willis .

Sa résolution par la méthode du billard se représente ainsi.



Une boule de billard rebondit en faisant le même angle lorsqu'elle atteint un bord.

C'est bien le cas pour le chemin rouge que vous voyez.

Les coordonnées correspondent au remplissage des récipients.

An début on part de (0;0) pour aller nécessairement à (5;0). On a rempli le plus gros récipient entièrement. On ne peut que le remplir entièrement il n'a pas de graduation.

On fait un angle de 60° avec le bord on rebondit en faisant un angle de 60°.

On arrive à (2;3). On a versé le 5 litres dans le 3 litres et il reste 2 litres dans le 5 litres.

On continue ainsi les rebonds. On arrive au (4;3) de Walter Bruce Willis.

Défi :

Faites le chemin par le haut pour voir s'il est plus court.

Un déplacement horizontal ou vertical correspond à vider ou à remplir un récipient.

Un déplacement en diagonal correspond à un transvasement d'un récipient dans l'autre.

Défi : Problème donné en cycle 3 par Christophe Bolsius (IEN).

Jean, au village, était celui qui puisait l'eau au puits. Il utilisait deux seaux pour son travail : un grand seau de 7 litres et un petit seau de 3 litres de contenance. Il demandait invariablement à tous les gens qui venaient chercher de l'eau :

"Combien voulez-vous de litres ? Je peux vous mesurer la quantité que vous voulez !"

7 litres ou 3 litres, c'est facile avec les seaux qu'il utilise. 10 litres, ça ne pose pas un grand problème.
Mais sauriez-vous mesurer, comme Jean, toutes les quantités (en litres) de 1 à 10 litres ?

S'il avait un seau de 4 litres et un seau de 3 litres, pourrait-il faire la même chose ?
Et avec un seau de 6 litres et un seau de 2 litres ?

Réponse.

10 litres	7 + 3	un grand seau et ensuite un petit seau
9 litres	3 + 3 + 3	Jean donne 3 seaux de 3 litres en suivant
8 litres	(7 - 3 - 3) + 7	Jean remplit le grand seau de 7 litres, puis enlève 3 litres en remplissant le petit seau, puis encore trois litres. Il donne 1 litre, plus un grand seau plein.
7 litres	7	Jean donne un grand seau plein
6 litres	3 + 3	Jean donne en suivant 2 seaux de 3 litres.
5 litres	3-(7-3-3)+3	Jean remplit un petit seau, le verse dans le grand, puis encore un petit seau, le verse dans le grand, puis encore un petit seau et complète le grand. Il lui reste 2 litres dans le petit seau, qu'il donne. Il donne ensuite un autre petit seau.
4 litres	(7-3-3)+3	Jean remplit le grand seau. Avec ce grand seau il remplit un petit seau qu'il jette, puis encore un petit seau qu'il jette. Il lui reste 1 litre d'eau qu'il donne, plus un petit seau.
3 litres	3	Jean donne un petit seau.
2 litres	3-(7-3-3)	Jean remplit un petit seau, le verse dans le grand, puis encore un petit seau, le verse dans le grand, puis encore un petit seau et complète le grand. Il lui reste 2 litres dans le petit seau, qu'il donne.
1 litre	7-3-3	Jean remplit le grand seau. Avec ce grand seau il remplit un petit seau qu'il jette, puis encore un petit seau qu'il jette. Il lui reste 1 litre d'eau qu'il donne.

S'il avait un seau de 4 litres et un seau de 3 litres, pourrait-il faire la même chose ?
Pourquoi pas ? 10=4+3+3   9=3+3+3   8=4+4   7=4+3   6=3+3
5=4+(4-3)   4=4   3=3   2=3-(4-3)   1=4-3

Et avec un seau de 6 litres et un seau de 2 litres ?
C'est un piège ! Car vous pouvez ajouter ou retrancher 6 et 2 (qui sont des nombres pairs) tant que vous voulez, vous n'obtiendrez jamais un nombre impair !!!
J'espère que vous n'avez pas renversé trop d'eau, chez vous, en testant les solutions ! Autrement, vous avez dû vous faire gronder ...

On peut démontrer que si la contenance des deux récipients sont a et b avec a et b premiers entre eux alors il est possible d'obtenir par transvasement toutes les contenances possibles.
Par contre si a et b ne sont pas premiers entre eux il va y avoir des impossibilités. Le PGCD (a,B) sera la plus petite contenance que l'on pourra obtenir.
Défi.
Déterminer les possibles pour deux récipients de 4 litres et de 6 litres.

On peut résoudre les problèmes de transvasement par des diagrammes triangulés et par les graphes mais ceci est une autre histoire.

C'est une feuille où j'ai oublié les plus jeunes mais François y veille.

Un coloriage d'un seau ici.

Une histoire de mathématicien.

Un physicien et un mathématicien assistent au départ d'un feu de poubelle. Le physicien se précipite, prend un seau, le remplit avec de l'eau et éteint le feu. Le lendemain, à nouveau le feu de poubelle. Cette fois, le mathématicien prend l'initiative et se saisit le seau et le passe au physicien. Il est satisfait d'avoir réduit le problème au cas précédent.

Un seau de musique.